Série 1

Exercice 1. On considère l'énoncé suivant : "12 est un nombre pair".

a. Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

b. L'écrire à l'aide de symboles mathématiques.

c. Mêmes questions a. et b. avec l'énoncé "Tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré".

Solution:

a. Cet énoncé est vrai.

b. Pour un entier, le fait d'être pair est équivalent au fait d'être un multiple de 2. Autrement dit, l'énoncé proposé peut s'écrire symboliquement de la manière suivante :

$$\exists x \in \mathbb{N},\ 12 = 2x.$$

c. Voici la traduction de l'énoncé proposé ici à l'aide de symboles :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x^2.$$

Cet énoncé est faux, comme le montre le choix de $x = 0.5$, pour lequel $x^2 = 0.25$ est strictement inférieur à x.

Exercice 2. On considère l'énoncé suivant : "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 17$".

a. Ecrire cet énoncé en toutes lettres. Est-il vrai ou faux ?

b. Ecrire la négation de cet énoncé, avec des symboles d'abord, puis en toutes lettres.

Solution:

a. En toutes lettres, l'énoncé proposé ici se lit "Il existe un réel dont le carré est égal à 17", ou autrement dit "17 possède (au moins) une racine carrée dans les réels". Cet énoncé est vrai (prendre $x = \sqrt{17}$ ou $-\sqrt{17}$).

b. La négation de cet énoncé s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 17$$

et se lit "17 n'est le carré d'aucun réel".

Exercice 3. On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R},\ x > 1 \text{ et } x < 4\}.$$

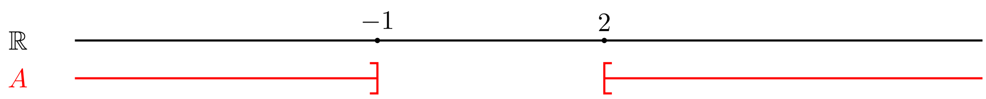
a. Représenter les ensembles A et B sur la droite des réels.

b. Ecrire chacun des ensembles A et B comme intervalle ou réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

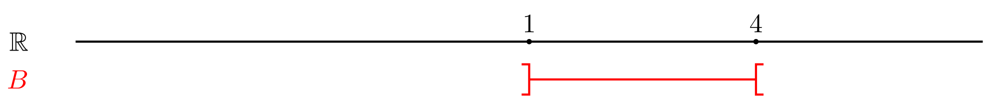
c. Mêmes questions a. et b. mais pour les sous-ensembles $A \cup B$ et $A \cap \complement_{\mathbb{R}}(B)$ de $\mathbb{R}$.

Solution:

a. Voici la représentation demandée pour A :



et celle pour B :



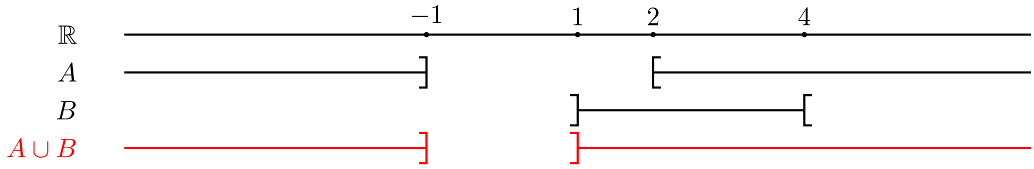
b. Voici les écritures recherchées :

$$A =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\quad \text{et} \quad B =]1, 4[.$$

c. En "mettant ensemble" les éléments de A et ceux de B, on trouve :

$$A \cup B =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[.$$

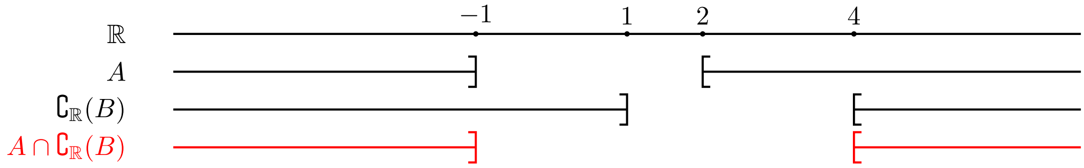
Voici la figure correspondante :



Le complémentaire de B dans $\mathbb{R}$ est formé de la réunion des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[4, +\infty[$. On trouve alors :

$$A \cap \complement_{\mathbb{R}}(B) =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[.$$

Voici la figure correspondante :



Exercice 4. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{N}$:

$$A = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}.$$

a. Donner quelques-uns des premiers termes sous-entendus par les pointillés dans la description de A.

b. Ecrire le sous-ensemble A à l'aide d'une propriété caractéristique portant sur les entiers naturels.

c. Mêmes questions a. et b. avec le sous-ensemble $B = \{2, 5, 10, 17, 26, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$.

Solution:

a. En examinant la logique de la suite proposée pour décrire A, on se rend compte que pour passer d'un entier au suivant il suffit d'additionner 4. Si l'on continue la description on obtient donc :

$$A = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, \ldots\}$$

b. Les entiers listés sont donc ceux de la forme $4y + 3$, où y est un entier naturel. On peut donc écrire :

$$A = \{x \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\exists y \in \mathbb{N},\ x = 4y + 3}_{\text{propriété caractéristique portant sur } x} \quad \}.$$

c. En examinant la logique de la suite proposée pour décrire B on se rend compte qu'il s'agit de la suite de tous les carrés d'entiers naturels (à partir de $1^2 = 1$) "augmentée de 1". Autrement dit, les entiers listés sont exactement ceux de la forme $y^2 + 1$, où y est un entier naturel non nul. On a donc :

$$A = \{x \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\exists y \in \mathbb{N}^*,\ x = y^2 + 1}_{\text{propriété caractéristique portant sur } x} \quad \}.$$

Exercice 5. On donne un ensemble à 4 éléments $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Dans chacun des cas suivants, écrire la liste de tous les sous-ensembles A de E vérifiant la condition donnée. Combien y en a-t-il ?

a. Card $A = 2$ b. $\{\alpha\} \subset A \subset \complement_E(\{\beta\})$ c. $\mathrm{Card}(A \cup \{\gamma, \delta\}) = 3$.

Solution:

a. On doit lister les sous-ensembles A de E qui possèdent exactement 2 éléments. On en trouve 6 :

$$\{\alpha, \beta\},\ \{\alpha, \gamma\},\ \{\alpha, \delta\},\ \{\beta, \gamma\},\ \{\beta, \delta\},\ \{\gamma, \delta\}.$$

Pour produire cette liste, on peut par exemple commencer par chercher les sous-ensembles à 2 éléments qui contiennent α (ce qui nous amène aux 3 premiers), puis ceux qui ne le contiennent pas.

b. Un sous-ensemble remplissant la condition étudiée ici s'écrit sous la forme $A = \{\alpha, \ldots\}$ (car il contient α). Par ailleurs, la liste d'éléments passée sous silence via les pointillés ne doit pas contenir β (car A ne contient pas β). On trouve alors 4 possibilités :

$$\{\alpha\},\ \{\alpha, \gamma\},\ \{\alpha, \delta\},\ \{\alpha, \gamma, \delta\}.$$

c. Un sous-ensemble A vérifie la condition étudiée ici si et seulement s'il possède **exactement un** élément qui est différent de γ et δ (il faut qu'il en possède au moins un, car sinon on aurait $\mathrm{Card}(A \cup \{\gamma, \delta\}) = 2$, et il ne faut pas qu'il en possède plus de deux, car sinon on aurait $\mathrm{Card}(A \cup \{\gamma, \delta\}) = 4$). On trouve alors qu'il y a 8 sous-ensembles qui conviennent, à savoir :

$$\{\alpha\},\ \{\alpha, \gamma\},\ \{\alpha, \delta\},\ \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta\},\ \{\beta, \gamma\},\ \{\beta, \delta\},\ \{\beta, \gamma, \delta\}$$

Exercice 6. On donne un ensemble E ainsi que deux sous-ensembles A et B vérifiant $\complement_E(A) \subset B$.

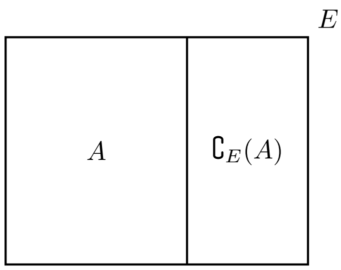
a. Faire un dessin représentant E, A et B (diagramme de Venn).

b. Montrer que $A \cup B = E$. *Indication : prendre un $x \in E$ quelconque et montrer qu'il appartient à A ou à B.*

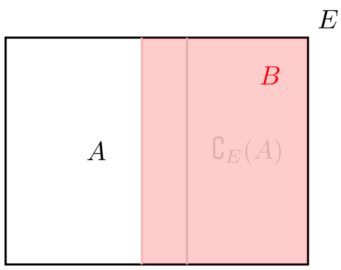
c. Montrer que $\complement_E(B) \subset A$. *Indication : utiliser le résultat montré au b.*

Solution:

a. Représentons pour commencer l'ensemble E et, à l'intérieur, le sous-ensemble A, qui découpe E en deux secteurs.



Cherchons maintenant à situer B sur notre dessin. L'hypothèse qui nous est donnée, à savoir $\complement_E(A) \subset B$, nous indique que la "boîte" représentant B doit contenir celle représentant $\complement_E(A)$. Elle est donc créée à partir de cette dernière en ajoutant certains éléments de A. On obtient une figure du type suivant :



b. Commençons par observer que l'égalité à montrer semble assez claire sur le dessin : tout élément de E se trouve dans la boîte représentant A ou dans celle représentant B (et éventuellement dans les deux). Montrons-cela formellement. Considérons pour cela un élément x de E. Il y a deux cas : soit x appartient à A, soit x n'appartient pas à A. Dans le premier cas, on peut directement conclure que x appartient à $A \cup B$ (car il appartient à A). Le deuxième cas est celui où x appartient à $\complement_E(A)$. Comme ce dernier sous-ensemble est contenu dans B (par hypothèse), on peut donc dire que x appartient à B, et donc aussi à $A \cup B$. En définitive, on a établi que tout élément de E est élément de $A \cup B$, ce qui suffit à montrer que $A \cup B = E$.

c. A nouveau, le résultat à montrer ici semble assez clair sur le dessin : tout élément en dehors de la zone rouge est automatiquement dans la boîte représentant A. Pour le montrer formellement, considérons un élément x de $\complement_E(B)$, c'est-à-dire un élément de E qui n'appartient pas à B. D'après le résultat obtenu en b., on sait que x appartient à $A \cup B$, ou, autrement dit, qu'il appartient à A ou à B. Comme il n'appartient pas à B, on voit qu'il appartient à A. On vient donc de prouver que tout élément de $\complement_E(B)$ est élément de A, ce qui montre l'inclusion

Exercice 7. (Facultatif) Soit E un ensemble non vide et A un sous-ensemble de E. Dans chacun des cas ci-dessous, quelle conclusion simple sur A se cache sous l'énoncé proposé ?

a. $\exists x \in E, x \notin A$ b. $\exists x \in A, \forall y \in A, x = y$ c. $\forall x \in E, \forall y \in A, x \neq y$ d. $\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y$.

Solution:

a. L'énoncé proposé signifie qu'il existe un élément de E en dehors de A. Autrement dit, que A est différent de E.

b. L'énoncé se lit "Il est possible de trouver dans A un élément tel que tout autre élément de A lui est égal". Il traduit donc le fait que A possède un unique élément.

c. L'énoncé traduit le fait que A est vide. En effet, il peut se lire en disant que "Tout élément de E est distinct de tout (éventuel) élément de A". Comme A est un sous-ensemble de E (et donc que tout élément de A est automatiquement élément de E), cela ne peut se produire que si A ne possède aucun élément, c'est-à-dire si c'est l'ensemble vide.

d. L'énoncé se lit "Il est possible de trouver dans A deux éléments distincts". Il traduit donc le fait que A possède au moins deux éléments distincts, autrement dit que $\text{Card } A \geqslant 2$.