

## Série 12

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans chacun des cas suivants, calculer  $A^n$  en fonction de  $n$ , où  $A$  est la matrice proposée.

a.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

b.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Solution:

- a. Comme  $A$  est diagonale, on a vu au cours que la matrice  $A^n$  est obtenue en élevant chacun des coefficients diagonaux à la puissance  $n$  :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

- b. D'après le résultat vu au cours, on a ici :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Au passage, expliquons comment retrouver ce résultat à l'aide de la formule du binôme de Newton. On écrit la matrice proposée sous la forme :

$$A = 4I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

puis on élève à la puissance  $n$  (la formule du binôme s'applique bien ici car les matrices  $4I_2$  et  $N$  commutent) :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^{n-k} N^k.$$

La matrice  $N$  étant de carré nul, seuls les indices  $k = 0$  et  $k = 1$  apportent une véritable contribution à la somme. On trouve alors :

$$A^n = 4^n I_2 + n4^{n-1} N = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- c. La matrice  $A$  proposée ici ne possède aucune valeur propre réelle. Elle est en fait ici déjà sous forme réduite. Ecrivons-la alors sous forme "polaire" :

$$A = \sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}}_{R_{\frac{\pi}{4}}}$$

c'est-à-dire comme multiple scalaire d'une matrice de rotation. On trouve ensuite :

$$A^n = (\sqrt{2})^n \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{4}) & -\sin(\frac{n\pi}{4}) \\ \sin(\frac{n\pi}{4}) & \cos(\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix}}_{R_{\frac{n\pi}{4}}}.$$

On a par exemple :

$$A^4 = -4I_2, A^8 = 16I_2 \dots$$

**Exercice 2.** On donne deux suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = 1, v_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n. \end{cases}$$

Calculer les valeurs exactes de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution:** On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'application linéaire  $f$  ayant  $A$  pour matrice en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (5x - 3y, 3x - y).$$

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a donc la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

qui entraîne par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ fois}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Pour cela, on commence par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

Par conséquent  $f$  possède une unique valeur propre, à savoir 2. Comme l'application  $f$  n'est pas égale à  $2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , on sait qu'elle admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une base  $\mathcal{B} = u, v$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = u + 2v. \end{cases}$$

On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour  $v$  n'importe quel vecteur "non propre" de  $f$ . Posons par exemple :

$$v = (1, 0).$$

Ce n'est pas un vecteur propre de  $f$  car :

$$f(v) = f(1, 0) = (5, 3)$$

n'est pas proportionnel à  $v$ . On déduit alors  $u$  de la deuxième égalité dans le système écrit ci-dessus :

$$u = f(v) - 2v = (5, 3) - 2(1, 0) = (3, 3).$$

Ainsi définie, la famille  $\mathcal{B} = u, v$  est bien une base de  $\mathbb{R}^2$  et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(u) = f(3, 3) = (6, 6) = 2(3, 3) = 2u \\ f(v) = f(1, 0) = (5, 3) = (3, 3) + 2(1, 0) = u + 2v. \end{cases}$$

Au niveau matriciel, on vient d'établir que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathcal{B}$ . On en déduit :

$$A^n = (P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1})^n = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3n+2 & -3n \\ 3n & 2-3n \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3n+2)2^{n-1} \\ 3n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a donc établi les expressions suivantes pour  $u_n$  et  $v_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (3n+2)2^{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = 3n2^{n-1}.$$

**Exercice 3.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par les données initiales  $u_0 = \alpha$ ,  $u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

- Dans le cas où  $\alpha = 0$ , calculer la valeur exacte de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer la valeur de  $\alpha$  sachant que la suite  $(\frac{u_n}{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite finie, et calculer cette limite.

**Solution:** Avant de répondre aux deux questions posées, rappelons la stratégie vue au cours pour manier ce genre de suites. On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (7x - 12y, x)$$

et sa matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en base canonique. On a alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u_{n+1} - 12u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

si bien que, par récurrence :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ fois}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

- a. Dans le cas où  $\alpha = 0$ , la discussion qui précède montre que  $u_n$  est le coefficient en bas à gauche dans la matrice  $A^n$ . Pour trouver ce coefficient, on va chercher à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Commençons par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 7X + 12 = (X - 3)(X - 4).$$

Par conséquent  $f$  possède deux valeurs propres, à savoir 3 et 4. On peut donc déjà affirmer que  $f$  est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\text{Ker}(f - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 3y}_{\text{Vect}((3,1))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Ker}(f - 4 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 4y}_{\text{Vect}((4,1))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (3, 1), (4, 1)$$

est une base de  $\mathbb{R}^2$  qui est formée de vecteurs propres pour  $f$  : c'est une base propre pour  $f$ . Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathcal{B}$ . On trouve maintenant :

$$A^n = (P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1})^n = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{n+1} - 3^{n+1} & 4 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 4^{n+1} \\ 4^n - 3^n & 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

On a déjà dit que  $u_n$  se trouve en bas à gauche dans cette matrice :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4^n - 3^n.$$

- b. Revenant au cas général, on peut utiliser la formule pour  $A^n$  trouvée au a. et la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

obtenue ci-dessus pour trouver l'expression :

$$u_n = 4^n - 3^n + \alpha(4 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n) = (4\alpha - 1)3^n + (1 - 3\alpha)4^n.$$

On en déduit alors :

$$\frac{u_n}{3^n} = (4\alpha - 1) + (1 - 3\alpha)\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Pour que cette suite possède une limite finie, il faut donc que  $\alpha$  soit égal à  $\frac{1}{3}$ , auquel cas la limite recherchée est  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 4.** On donne deux suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = (\sqrt{3} - 2)u_n + \sqrt{\frac{3}{2}}v_n. \end{cases}$$

- Calculer la valeur exacte de  $\cos(\frac{\pi}{12})$ .
- Montrer que les suites données sont périodiques.

Solution:

a. Observons par exemple que :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

On a alors, d'après les formules vues au cours de trigonométrie :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Remarque : il y a beaucoup de manières de procéder. On pourrait par exemple observer aussi que  $\frac{\pi}{12}$  est la moitié de  $\frac{\pi}{6}$  et utiliser les formules de bisection.

b. Notons  $A$  la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} - 2 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y, (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{\frac{3}{2}}y\right).$$

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a donc la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

qui entraîne par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ fois}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Comme :

$$\operatorname{tr} A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \det A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2) = 1,$$

on voit que  $f$  a pour polynôme caractéristique :

$$X^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)X + 1 = (X - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right))^2 + (\sin\left(\frac{\pi}{12}\right))^2.$$

L'application linéaire  $f$  admet donc pour forme réduite la matrice de rotation :

$$R_{\frac{\pi}{12}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & -\sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}.$$

Au niveau matriciel, il existe une matrice  $2 \times 2$  inversible  $P$  telle que :

$$P^{-1}AP = R_{\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou encore} \quad A = PR_{\frac{\pi}{12}}P^{-1}.$$

Par conséquent, on voit par exemple que :

$$A^{24} = (PR_{\frac{\pi}{12}}P^{-1})^{24} = PR_{\frac{\pi}{12}}^{24}P^{-1} = P \underbrace{R_{2\pi}}_{I_2} P^{-1} = I_2.$$

On trouve alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+24} \\ v_{n+24} \end{pmatrix} = A^{n+24} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^{24}A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

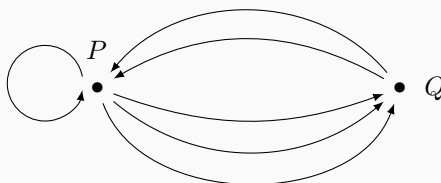
Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+24} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+24} = v_n.$$

Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc bien périodiques (la période de chacune de ces suites étant un diviseur de 24), et ce indépendamment de leurs valeurs initiales.

Remarque : pour résoudre cet exercice, il n'a pas été nécessaire d'effectuer concrètement la réduction de  $f$ . Seule la connaissance de la forme réduite a été utile.

**Exercice 5.** La figure ci-dessous représente deux points  $P$  et  $Q$  reliés entre eux par des chemins à sens unique, dont le nombre est donné par les coefficients de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  :



- Compter le nombre de chemins à 2 étapes allant de  $P$  à  $P$ , de  $P$  à  $Q$ , de  $Q$  à  $P$  et de  $Q$  à  $Q$ .
- Calculer la matrice  $A^2$  et comparer avec les nombres trouvés en a. Que constatez-vous ?
- En généralisant, interpréter, pour tout  $n \geq 1$ , les coefficients de la matrice  $A^n$  comme nombres de chemins à  $n$  étapes dans le circuit, puis montrer votre résultat. *Indication : on pourra raisonner par récurrence.*
- Calculer, en fonction de l'entier  $n$ , le nombre de chemins à  $n$  étapes joignant  $P$  à  $Q$ .

Solution:

- Pour se rendre de  $P$  à  $P$  en 2 étapes il y a deux options : soit on emprunte deux fois successivement le chemin qui boucle sur  $P$ , soit on se rend au point  $Q$  en utilisant l'un des 3 chemins possibles, puis l'on revient à  $P$  en empruntant l'un des 2 chemins possibles. Au total, on dénombre donc :

$$1 \times 1 + 3 \times 2 = 7$$

possibilités. Pour se rendre de  $P$  à  $Q$  en 2 étapes, on doit d'abord emprunter le chemin qui boucle sur  $P$ , puis l'un des 3 chemins qui vont de  $P$  à  $Q$  (et ce car il n'y a pas de chemin qui boucle sur  $Q$ ). On trouve donc ici :

$$1 \times 3 = 3$$

possibilités. En raisonnant de la même façon, on constate qu'il y a 2 manières de passer de  $Q$  à  $P$  en 2 étapes et 6 manières de relier  $Q$  à lui-même en 2 étapes.

- Un calcul direct montre que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On constate alors que les coefficients dans cette matrice sont exactement ceux que l'on a trouvé en a.

- Pour tout  $n \geq 1$ , introduisons les nombres de chemins à  $n$  étapes dans le circuit, selon le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } P \text{ à } P & \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } P \text{ à } Q \\ \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } Q \text{ à } P & \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } Q \text{ à } Q \end{pmatrix}$$

On a par exemple :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = A^2.$$

En se basant sur ces premières valeurs, on conjecture que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = A^n.$$

Montrons à présent ce résultat en raisonnant par récurrence, l'initialisation ayant déjà été faite. Supposons maintenant que cette égalité a lieu pour  $n$  et cherchons à l'établir pour  $n+1$ . Intéressons-nous alors par exemple au coefficient  $\alpha_{n+1}$ . Observons que pour relier  $P$  à lui-même en  $n+1$  étapes il y a deux cas : soit on emprunte l'un des  $\alpha_n$  chemins à  $n$  étapes qui partent et arrivent en  $P$  et on ajoute comme  $n+1$ -ème étape le chemin qui boucle sur  $P$  (une seule possibilité), soit on se rend au point  $Q$  en  $n$  étapes (il y a donc  $\beta_n$  possibilités) et on termine en empruntant l'un des 2 chemins qui reviennent sur  $P$  depuis  $Q$ . En définitive, on a donc la relation :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n.$$

Passons à l'étude du coefficient  $\beta_{n+1}$ . Cette fois-ci, comme il n'y a aucun chemin qui boucle sur  $Q$ , on voit que pour rejoindre  $P$  à  $Q$  en  $n+1$  étapes il faut emprunter l'un des  $\alpha_n$  chemins qui conduisent de  $P$  à lui-même en  $n$  étapes, puis finir en empruntant l'un des 3 chemins allant de  $P$  à  $Q$ . Ceci montre la relation :

$$\beta_{n+1} = 3\alpha_n.$$

En raisonnant de même, on prouve aussi les deux relations :

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\delta_n \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} = 3\gamma_n.$$

Au niveau matriciel, on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n + 2\beta_n & 3\alpha_n \\ \gamma_n + 2\delta_n & 3\gamma_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}}_{A^n \text{ par hypothèse}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_A = A^{n+1}.$$

Ceci achève de prouver par récurrence la propriété voulue.

- d. D'après le c., le nombre recherché ici est donc le coefficient en haut à droite dans la matrice  $A^n$ . Pour trouver ce coefficient, introduisons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (x + 3y, 2x)$$

de matrice  $A$  en base canonique et cherchons à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Commençons pour cela par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3).$$

Par conséquent  $f$  possède deux valeurs propres, à savoir  $-2$  et  $3$ . On peut donc déjà affirmer que  $f$  est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\text{Ker}(f + 2\text{id}_{\mathbb{R}^2}) : x + y = 0}_{\text{Vect}((1, -1))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2}) : 2x = 3y}_{\text{Vect}((3, 2))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (1, -1), (3, 2)$$

est une base de  $\mathbb{R}^2$  qui est formée de vecteurs propres pour  $f$  : c'est une base propre pour  $f$ . Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathcal{B}$ . On trouve maintenant :

$$\begin{aligned} A^n &= (P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1})^n = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(-2)^n & -3(-2)^n \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 2(-2)^n & 3^{n+1} - 3(-2)^n \\ 2(3^n - (-2)^n) & 2 \cdot 3^n + 3(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le nombre de chemins à  $n$  étapes joignant le sommet de gauche à celui de droite est donc :

$$\frac{1}{5}(3^{n+1} - 3(-2)^n) = \frac{3}{5}(3^n - (-2)^n).$$

Voilà alors les premières valeurs de la suite obtenue :

$$3, 3, 21, 39, 165, 399, 1389 \dots$$

**Exercice 6.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice  $B \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$  :

a.  $A = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$

b.  $A = \begin{pmatrix} 34 & -15 \\ 50 & -21 \end{pmatrix}$

c.  $A = \begin{pmatrix} 7 & -25 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$

*Indication : pour b. et c. on pourra commencer par réduire  $A$ .*

**Solution:**

- a. Si l'on pose :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

on obtient ici directement :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = A.$$

- b. Introduisons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (34x - 15y, 50x - 21y)$$

de matrice  $A$  en base canonique et cherchons à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Commençons pour cela par calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{cases} \text{tr } A = 34 - 21 = 13 \\ \det A = 34 \cdot (-21) + 15 \cdot 50 = -714 + 750 = 36 \end{cases} \Rightarrow \chi_f(X) = X^2 - 13X + 36 = (X - 4)(X - 9).$$

Par conséquent  $f$  possède deux valeurs propres, à savoir 4 et 9. On peut donc déjà affirmer que  $f$  est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 30 & -15 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 9I_2 = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 50 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\text{Ker}(f - 4 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) : 2x = y}_{\text{Vect}((1,2))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Ker}(f - 9 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) : 5x = 3y}_{\text{Vect}((3,5))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (1, 2), (3, 5)$$

est une base de  $\mathbb{R}^2$  qui est formée de vecteurs propres pour  $f$  : c'est une base propre pour  $f$ . Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathcal{B}$ . Posons alors :

$$B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que :

$$B^2 = (P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1})^2 = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

On a donc bien trouvé une racine carrée de  $A$ .

c. Introduisons l'application linéaire  $f$  ayant  $A$  pour matrice en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (7x - 25y, 2x - 7y)$$

et cherchons maintenant à réduire  $f$  (ou  $A$ ). Pour cela, on commence par calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{cases} \text{tr } A = 7 - 7 = 0 \\ \det A = -49 + 50 = 1 \end{cases} \Rightarrow \chi_f(X) = X^2 + 1.$$

L'application  $f$  ne possède donc aucune valeur propre réelle. La forme du polynôme caractéristique que l'on a obtenue montre que  $f$  admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une base  $\mathcal{B} = u, v$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = v \\ f(v) = -u. \end{cases}$$

On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour  $u$  n'importe quel élément non nul de  $\mathbb{R}^2$ , comme par exemple  $(1, 0)$ . On déduit alors  $v$  de la première égalité ci-dessus :

$$v = f(u) = f(1, 0) = (7, 2).$$

Ainsi définie, la famille  $\mathcal{B} = u, v$  est bien une base de  $\mathbb{R}^2$  et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(u) = f(1, 0) = (7, 2) = v \\ f(v) = f(7, 2) = (-1, 0) = -u. \end{cases}$$

Au niveau matriciel, on vient d'établir que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathcal{B}$ . Observons à présent que la forme réduite de  $A$  que l'on a trouvée n'est autre que la matrice de rotation  $R_{\frac{\pi}{2}}$ . Pour extraire une racine carrée de cette forme réduite, on peut donc naturellement penser à la matrice de rotation  $R_{\frac{\pi}{4}}$  (le processus géométrique de tourner d'un angle de  $\frac{\pi}{2}$  est le même que celui de tourner deux fois consécutivement d'un angle de  $\frac{\pi}{4}$ ). On est donc amené à poser :

$$B = P \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}}_{R_{\frac{\pi}{4}}} P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 8 & -25 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

On voit alors que :

$$B^2 = (PR_{\frac{\pi}{4}}P^{-1})^2 = PR_{\frac{\pi}{4}}^2P^{-1} = PR_{\frac{\pi}{2}}P^{-1} = A.$$

On a donc bien trouvé une racine carrée de  $A$ .