Série 11

Exercice 1. Déterminer une forme réduite de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée.

a. $f : (x, y) \to (14x + 25y, -x + 4y)$ b. $f : (x, y) \to (2x + 5y, -2x)$ c. $f : (x, y) \to (30x + 901y, -x - 30y)$.

On ne demande pas d'effectuer la réduction explicitement.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 14 & 25 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

qui a trace 18 et déterminant 81. Le polynôme caractéristique de f vaut par conséquent :

$$\chi_f(X) = X^2 - 18X + 81 = (X - 9)^2.$$

Comme f n'est pas égale à $9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, on sait alors qu'elle admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

b. La matrice de f dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la trace vaut 2 et le déterminant 10. Le polynôme caractéristique de f vaut par conséquent :

$$\chi_f(X) = X^2 - 2X + 10 = (X - 1)^2 + 3^2.$$

L'application linéaire f n'admet aucune valeur propre réelle. Une forme réduite de f est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice de f dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 30 & 901 \\ -1 & -30 \end{pmatrix}$$

de trace nulle et de déterminant 1. Le polynôme caractéristique de f vaut par conséquent :

$$\chi_f(X) = X^2 + 1 = (X - 0)^2 + 1^2.$$

Une forme réduite de f est donc la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (7x + 5y, -5x - 3y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres (éventuelles).
b. Donner une forme réduite de f.
c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
On trouve alors que le polynôme caractéristique de f vaut :
$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$
Par conséquent f possède une unique valeur propre, à savoir 2.

b. Comme l'application f n'est pas égale à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, on sait qu'elle admet pour forme réduite la matrice :
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. On cherche donc une base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = v_1 + 2v_2. \end{cases}$$
On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour v_2 n'importe quel vecteur "non propre" de f. Posons alors par exemple :
$$v_2 = (1, 0).$$
Ce n'est pas un vecteur propre de f car :
$$f(v_2) = f(1,0) = (7, -5)$$
n'est pas proportionnel à v_2. On déduit alors v_1 de la deuxième égalité dans le système écrit ci-dessus :
$$v_1 = f(v_2) - 2v_2 = (7, -5) - 2(1, 0) = (5, -5).$$
Ainsi définie, la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :
$$\begin{cases} f(v_1) = f(5,-5) = (10,-10) = 2(5,-5) = 2v_1 \\ f(v_2) = (7,-5) = (5,-5) + 2(1,0) = v_1 + 2v_2. \end{cases}$$

Exercice 3. On donne l'application linéaire :
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (2x + 17y, -x + 4y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire une forme réduite de f.

b. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
On trouve alors que le polynôme caractéristique de f vaut :
$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 6X + 25 = (X-3)^2 + 4^2.$$
Par conséquent f ne possède aucune valeur propre (réelle) et d'après la forme du polynôme caractéristique que l'on vient d'identifier, on sait qu'elle a pour forme réduite la matrice :
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b. On cherche donc une base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = 3v_1 + 4v_2 \\ f(v_2) = -4v_1 + 3v_2. \end{cases}$$

On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour v_1 n'importe quel élément non nul de $\mathbb{R}^2$. Posons alors par exemple :

$$v_1 = (1,0).$$

On déduit alors v_2 de la première égalité dans le système écrit ci-dessus :

$$v_2 = \frac{1}{4}(f(v_1) - 3v_1) = \frac{1}{4}((2,-1) - 3(1,0)) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}).$$

Ainsi définie, la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(v_1) = (2,-1) = 3(1,0) + 4(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = 3v_1 + 4v_2 \\ f(v_2) = (-\frac{19}{4}, -\frac{3}{4}) = -4(1,0) + 3(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = -4v_1 + 3v_2. \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer un exemple d'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

qui n'est pas diagonalisable et telle que $f(1,2) = (3,6)$. *Indication : quelle est la forme réduite de f ?*

Solution: Supposons donnée une application f solution du problème posé et notons A sa matrice en base canonique. De l'égalité :

$$f(1,2) = (3,6) = 3(1,2)$$

on déduit que 3 est valeur propre de f et que $(1,2)$ est un vecteur propre associé. Comme f n'est pas diagonalisable, on voit que l'unique sous-espace propre de f est une droite vectorielle :

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) : y = 2x}_{\mathrm{Vect}((1,2))}.$$

Par ailleurs, f admet la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pour forme réduite. Autrement dit, il existe une base de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \underbrace{(\alpha,\beta)}_{v_1}, \underbrace{(\gamma,\delta)}_{v_2}$$

telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = 3v_1 \\ f(v_2) = v_1 + 3v_2. \end{cases}$$

Comme v_1 est un vecteur propre de f on voit que :

$$\beta = 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = (\alpha, 2\alpha).$$

Au niveau matriciel, on a donc montré l'égalité :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où P est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 2\alpha & \delta \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer une application f solution du problème (c'est tout ce qui est demandé ici), choisissons par exemple :

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (x+y, -4x+5y).$$

Vérifions que l'application que l'on vient d'obtenir convient. Tout d'abord, on a bien :

$$f(1,2) = (1+2, -4+10) = (3,6).$$

Par ailleurs, on trouve que :

$$\chi_f(X) = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$$

si bien que 3 est la seule valeur propre de f. Comme f n'est pas égale à $3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ on voit qu'elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. En discutant selon la valeur des réels α, β, γ, déterminer une forme réduite de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \gamma x + \alpha y).$$

On ne demande pas de produire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Solution: La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que :

$$\operatorname{tr}(A) = 2\alpha \quad \text{et} \quad \det(A) = \alpha^2 - \beta\gamma$$

si bien que le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 - \beta\gamma = (X - \alpha)^2 - \beta\gamma.$$

Pour décrire la réduction de f on voit donc que l'on doit discuter selon le signe du produit $\beta\gamma$ (le discriminant vaut ici $4\beta\gamma$). Supposons d'abord que $\beta\gamma > 0$. On a alors la factorisation :

$$\chi_f(X) = (X - \alpha - \sqrt{\beta\gamma})(X - \alpha + \sqrt{\beta\gamma}).$$

f possède dans ce cas deux valeurs propres distinctes. Elle est diagonalisable et admet pour forme réduite la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \sqrt{\beta\gamma} & 0 \\ 0 & \alpha - \sqrt{\beta\gamma} \end{pmatrix}.$$

Supposons à présent que $\beta\gamma = 0$. Dans ce cas, on trouve que :

$$\chi_f(X) = (X - \alpha)^2$$

si bien que f possède pour unique valeur propre α. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est égale à $\alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, ou autrement dit, si et seulement si $\beta = \gamma = 0$. Dans ce cas, elle admet pour forme réduite la matrice :

$$\alpha I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si l'un des réels β ou γ est nul et que l'autre est non nul, alors f n'est pas diagonalisable et admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Enfin, supposons que $\beta\gamma < 0$, si bien que f ne possède aucune valeur propre réelle. En écrivant son polynôme caractéristique sous la forme :

$$\chi_f(X) = (X - \alpha)^2 - \beta\gamma = (X - \alpha)^2 + (\sqrt{-\beta\gamma})^2$$

on voit que f admet alors pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\sqrt{-\beta\gamma} \\ \sqrt{-\beta\gamma} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Donner un contre-exemple à chacun des énoncés suivants. Pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ...

a. ... si A et B sont diagonalisables alors AB l'est aussi.
b. ... si AB est diagonalisable alors A ou B l'est aussi.
c. ... si A et B sont diagonalisables alors $A + B$ l'est aussi.

Indication : commencer par écrire une liste de matrices diagonalisables et une liste de matrices non-diagonalisables.

Solution: Pour produire des contre-exemples à ces énoncés, il faut avoir en tête des exemples de matrices diagonalisables, comme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-4\\\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}}_{\text{matrices de projection}},\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}}_{\text{matrices de symétrie}},\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}}_{\text{2 valeurs propres distinctes}}\cdots$$

et aussi des exemples de matrices non diagonalisables, comme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}}_{\text{matrices de rotation}},\qquad \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-4\\1&5\end{pmatrix}}_{\text{une seule valeur propre, non proportionnelle à } I_2}\qquad\cdots$$

A partir de là on peut tenter notre chance, c'est-à-dire piocher dans ces listes et tester par un calcul direct si l'énoncé est vérifié ou non. On peut aussi essayer d'exploiter une idée géométrique.

a. Prenons par exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonale (et donc a fortiori diagonalisable). La matrice B est aussi diagonalisable, car elle admet deux valeurs propres distinctes -1 et 1 (c'est une matrice de symétrie). Calculons alors le produit :

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de trace 0 et de déterminant 1. Son polynôme caractéristique vaut donc :

$$\chi_{AB}(X)=X^2+1,$$

qui n'admet aucune racine. Elle n'est donc pas diagonalisable (c'est la matrice de rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$). On a donc trouvé un contre-exemple à l'énoncé proposé, puisque A et B sont diagonalisables, mais pas leur produit AB.

Remarque : l'idée géométrique derrière ce contre-exemple est que la composée de deux réflexions (qui sont des applications diagonalisables) est une rotation (qui n'est généralement pas diagonalisable).

b. Prenons par exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B ne sont pas diagonalisables (elles ont toutes les deux pour unique valeur propre 1 et ne sont pas égales à I_2). Par ailleurs, leur produit :

$$AB=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale (et donc a fortiori diagonalisable). On a donc trouvé un contre-exemple à l'énoncé proposé, puisque AB est diagonalisable mais ni A ni B ne l'est.

c. Prenons par exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont diagonalisables car ce sont des matrices de projection : en effet, elles sont de rang 1 et de trace 1. Par ailleurs, leur somme :

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable, comme on l'a déjà dit au b. On a donc trouvé un contre-exemple à l'énoncé proposé, puisque A et B sont diagonalisables, mais pas leur somme $A+B$.

Exercice 7. Etant donné $\alpha\in\mathbb{R}$, on considère les applications linéaires f et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$f:(x,y)\to((5-5\alpha)x+(3-5\alpha)y,(4\alpha-3)x+(3\alpha-1)y)\quad\text{et}\quad g:(x,y)\to((2-3\alpha)x+\alpha y,-5\alpha x+(2+\alpha)y).$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α ces applications ont-elles la même forme réduite ? Justifier votre réponse.

Solution: Les matrices de f et g dans la base canonique sont :

$$A = \begin{pmatrix} 5-5\alpha & 3-5\alpha \\ 4\alpha-3 & 3\alpha-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2-3\alpha & \alpha \\ -5\alpha & 2+\alpha \end{pmatrix}.$$

Si les applications linéaires f et g ont la même forme réduite, alors les matrices A et B ont la même trace et le même déterminant. Un calcul direct montre qu'elles ont en fait toujours la même trace :

$$\operatorname{tr}(A) = (5-5\alpha) + (3\alpha-1) = 4-2\alpha \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(B) = (2-3\alpha) + (2+\alpha) = 4-2\alpha.$$

Afin d'essayer de localiser α, on est donc amené à calculer les déterminants de A et B. On trouve :

$$\det(A) = (5-5\alpha)(3\alpha-1) + (5\alpha-3)(4\alpha-3) = (-15\alpha^2+20\alpha-5) + (20\alpha^2-27\alpha+9) = 5\alpha^2-7\alpha+4$$

d'une part et :

$$\det(B) = (2-3\alpha)(2+\alpha) + 5\alpha^2 = (-3\alpha^2-4\alpha+4) + 5\alpha^2 = 2\alpha^2-4\alpha+4$$

d'autre part. En égalisant les expressions trouvées, on obtient :

$$5\alpha^2-7\alpha+4 = 2\alpha^2-4\alpha+4 \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha^2-3\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } 1.$$

Par conséquent, f et g ne peuvent avoir la même forme réduite que si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Il reste maintenant à examiner ces deux cas. Tout d'abord, supposons que $\alpha = 0$. Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

partagent le même polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = \chi_g(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

Cependant, comme f n'est pas égale à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, elle a pour forme réduite :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tandis que g a pour forme réduite :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la valeur $\alpha = 0$ ne conduit pas à une solution. Supposons finalement que $\alpha = 1$. Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

partagent à nouveau le même polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = \chi_g(X) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1^2.$$

Les applications linéaires f et g admettent donc la même forme réduite dans ce cas, à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, les applications linéaires f et g ont la même forme réduite si et seulement si $\alpha = 1$.