Série 10

Exercice 1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire en justifiant si elle est vraie ou fausse, sachant que :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + y, 2x).$$

a. 0 est valeur propre de f b. $(1, 1)$ est vecteur propre de f c. f est diagonalisable.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique.

a. C'est faux. Pour le voir, calculons par exemple le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 2.$$

On voit donc que 0 n'est pas racine, ou, autrement dit, que 0 n'est pas valeur propre de f. Une autre manière de raisonner est de constater simplement que la matrice :

$$A - 0I_2 = A$$

est inversible (ses deux colonnes ne sont pas proportionnelles). Or un réel ω est valeur propre de f si et seulement si la matrice $A - \omega I_2$ est non inversible.

b. C'est vrai. En effet, on a :

$$f(1, 1) = (1 + 1, 2 \cdot 1) = (2, 2) = 2(1, 1).$$

On peut donc bien conclure que $(1, 1)$ est vecteur propre pour f, de valeur propre 2.

c. C'est vrai. D'après le résultat trouvé au b., on sait déjà que 2 est valeur propre. Le polynôme caractéristique de f se fatorise donc par $X - 2$. En procédant à la factorisation on trouve :

$$\chi_f(X) = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

Il y a donc deux valeurs propres distinctes (à savoir 2 et -1) : on peut conclure que f est diagonalisable.

Exercice 2. L'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

a. $f : (x, y) \to (-3x, 2y)$ b. $f : (x, y) \to (3x - y, x + 5y)$ c. $f : (x, y) \to (2x - y, 5x - 2y)$.

On ne demande pas de déterminer une base propre.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(et est donc diagonale). On peut en conclure que f est diagonalisable. La base canonique est une base propre pour f.

b. La matrice de f dans la base canonique vaut ici :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculons alors le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 8X + 16 = (X - 4)^2.$$

L'application linéaire f possède une unique valeur propre, à savoir 4. Comme elle n'est pas égale à $4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ on voit qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

c. La matrice de f dans la base canonique vaut ici :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculons alors le polynôme caractéristique de f :
$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + 1.$$
On voit que f ne possède aucune valeur propre : elle n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x - 2y, -x + 2y).$$

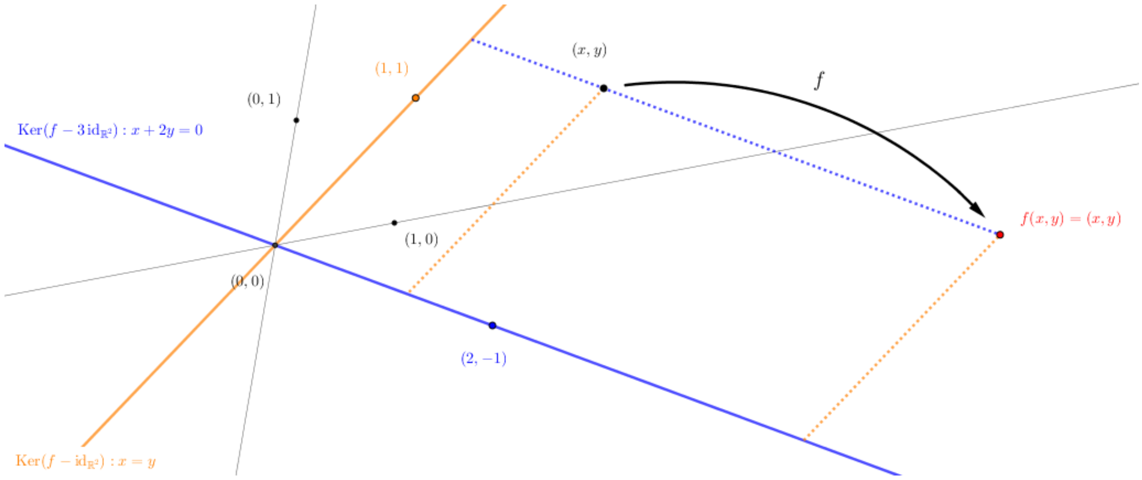
a. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire ses valeurs propres.
b. f est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base propre pour f.
c. Représenter sur un croquis les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y) et son image $f(x, y)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a donc :
$$\operatorname{tr}(A) = 3 + 2 = 5 \quad \text{et} \quad \det(A) = 6 - 2 = 4,$$
si bien que le polynôme caractéristique de f vaut :
$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4).$$
Par conséquent f possède deux valeurs propres, à savoir 1 et 4.

b. D'après le a. on peut déjà affirmer que f est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :
$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On en déduit alors :
$$\underbrace{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = y}_{\operatorname{Vect}((1,1))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) : x + 2y = 0}_{\operatorname{Vect}((2,-1))}.$$
On voit donc que la famille suivante :
$$\mathcal{B} = (1, 1), (2, -1)$$
est une base de $\mathbb{R}^2$ qui est formée de vecteurs propres pour f : c'est donc une base propre pour f. On a alors :
$$\begin{cases} f(1, 1) = (3 - 2, -1 + 2) = (1, 1) \\ f(2, -1) = (6 + 2, -2 - 2) = (8, -4) = 4(2, -1) \end{cases}$$
si bien que :
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Remarque : pour la détermination des vecteurs propres, rappelons qu'il n'est pas nécessaire de calculer les deux matrices :
$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$
mais que l'une seule d'entre elles suffit. Par exemple, dans la décomposition colonne-ligne de $A - I_2$, la colonne fournit directement la base $(2, -1)$ de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{id}_{\mathbb{R}^2})$ et la ligne donne l'équation $x - y = 0$ de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2})$.

c. Voici une figure représentant les éléments demandés :



Une fois (x, y) décomposé selon les deux axes colorés, on "passe" à $f(x, y)$ de la façon suivante : la "coordonnée orange" est préservée (elle est multipliée par 1) et la "coordonnée bleue" est quant à elle multipliée par 4.

Exercice 4. En discutant selon la valeur du réel α, dire si l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to ((1+\alpha)x + \alpha y, -\alpha x + (1-\alpha)y)$$

est diagonalisable. Justifier votre réponse.

Solution: La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que :

$$\mathrm{tr}(A) = (1+\alpha) + (1-\alpha) = 2 \quad \text{et} \quad \det(A) = (1+\alpha)(1-\alpha) - \alpha(-\alpha) = 1$$

si bien que le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

On en déduit que f ne possède qu'une seule valeur propre, à savoir 1. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est égale à l'application identité, autrement dit si et seulement si $A = I_2$, ce qui ne se produit que pour $\alpha = 0$.

Exercice 5. En discutant selon la valeur des réels α et β, déterminer si l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha y, \beta x)$$

est diagonalisable et, le cas échéant, donner une base propre pour f.

Solution: La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que :

$$\mathrm{tr}(A) = 0 \quad \text{et} \quad \det(A) = -\alpha\beta$$

si bien que le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - \alpha\beta.$$

Discutons alors selon le signe du produit $\alpha\beta$. Si :

$$\alpha\beta < 0,$$

on voit que f ne possède aucune valeur propre, et qu'elle n'est donc pas diagonalisable. Supposons maintenant que :

$$\alpha\beta = 0,$$

c'est-à-dire que l'un des deux réels (au moins) est nul. Dans ce cas, f possède comme unique valeur propre 0, et elle est donc diagonalisable si et seulement si c'est l'application nulle, autrement dit si et seulement si $\alpha = \beta = 0$. Dans ce cas, toute base de $\mathbb{R}^2$ est une base propre pour f. Enfin, plaçons-nous dans le cas où :

$$\alpha\beta > 0.$$

Dans ce cas, f possède deux valeurs propres distinctes, à savoir :

$$\underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_{\omega} \text{ et } \underbrace{-\sqrt{\alpha\beta}}_{-\omega}.$$

Calculons alors la matrice $A - \omega I_2$ et décomposons-la sous forme d'un produit colonne-ligne :

$$A - \omega I_2 = \begin{pmatrix} -\omega & \alpha \\ \beta & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{car } \alpha \neq 0 \text{ et } \tfrac{\omega^2}{\alpha} = \beta).$$

De cette décomposition on peut déduire directement que :

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(f - \omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : -\tfrac{\omega}{\alpha}x + y = 0}_{\operatorname{Vect}((\alpha,\omega))} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(f + \omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((\alpha, -\omega)).$$

On voit donc que la base $\mathcal{B} = (\alpha, \omega), (\alpha, -\omega)$ de $\mathbb{R}^2$ est propre pour f. Dans cette base, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \omega & -\omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \omega & -\omega \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(\alpha, \omega) = (\alpha\omega, \beta\alpha) = (\alpha\omega, \omega^2) = \omega(\alpha, \omega) \\ f(\alpha, -\omega) = (-\alpha\omega, \beta\alpha) = (-\alpha\omega, \omega^2) = -\omega(\alpha, -\omega). \end{cases}$$

Exercice 6. On donne une application linéaire dont la matrice est *symétrique* :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \beta x + \gamma y).$$

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose que $f \neq \alpha\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Montrer que si l'on visualise $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormé du plan alors f possède comme sous-espaces propres 2 droites vectorielles orthogonales. *Indication : discuter selon que $\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$.*

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que :

$$\operatorname{tr}(A) = \alpha + \gamma \quad \text{et} \quad \det(A) = \alpha\gamma - \beta^2$$

si bien que le polynôme caractéristique de f vaut :

$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (\alpha + \gamma)X + \alpha\gamma - \beta^2.$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut :

$$\Delta = (\alpha + \gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2) = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2.$$

Si $\alpha = \gamma$ et $\beta = 0$, alors ce discriminant est nul. Dans ce cas la matrice A est égale à αI_2 et est donc diagonale. Par conséquent f est bien diagonalisable. Sinon le discriminant Δ est strictement positif, ce qui implique que f est aussi diagonalisable.

b. Si $f \neq \alpha\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, alors on a vu en a. que le discriminant du polynôme caractéristique est strictement positif, ce qui implique que f possède deux valeurs propres distinctes ω et ξ. On sait alors d'après le cours que les sous-espaces propres :

$$\operatorname{Ker}(f - \omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \text{ et } \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$$

de f sont des droites vectorielles. Il nous reste donc à montrer qu'elles sont orthogonales, lorsqu'on visualise $\mathbb{R}^2$ via un repère orthonormé du plan. Si $\beta = 0$, alors la matrice de f dans la base canonique est diagonale : les sous-espaces propres de f se visualisent comme les axes de coordonnées, qui sont par hypothèse orthogonaux. Supposons dorénavant que $\beta \neq 0$ et observons la matrice :

$$A - \omega I_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \omega & \beta \\ \beta & \gamma - \omega \end{pmatrix}.$$

On sait par avance qu'elle est de rang 1. A cause de la présence de β en haut à droite, on peut remarquer que la première ligne de $A - \omega I_2$ est non nulle, et donne donc une équation du sous-espace propre pour la valeur propre ω :

$$\operatorname{Ker}(f - \omega \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) : (\alpha - \omega)x + \beta y = 0.$$

Par ailleurs, à cause de la présence de β en bas à gauche, on peut remarquer que la première colonne de $A - \omega I_2$ est non nulle, et donne donc une base du sous-espace propre :

$$\operatorname{Ker}(f - \xi \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((\alpha - \omega, \beta)).$$

Le résultat recherché provient donc simplement du fait que, si le repère employé est orthonormé, la droite d'équation cartésienne $ax + by = 0$ forme un angle droit avec la droite passant par $(0, 0)$ et (a, b) (qui est donc dirigée par le vecteur de $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$).

Exercice 7. On donne une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité suivante :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Ce résultat porte le nom de *théorème de Cayley-Hamilton*.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \operatorname{tr}(A) = \alpha + \delta \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & (\alpha + \delta)\beta \\ (\alpha + \delta)\gamma & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

si bien que :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma - (\alpha + \delta)\alpha + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 1 & (\alpha + \delta)\beta - (\alpha + \delta)\beta + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 0 \\ (\alpha + \delta)\gamma - (\alpha + \delta)\gamma + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 0 & (\delta^2 + \beta\gamma) - (\alpha + \delta)\delta + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$