Introduction à l'Astrophysique

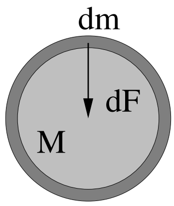
Série 3: Enonce

Laboratoire d'Astrophysique http://lastro.epfl.ch
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025

Introduction théorique

Energie potentielle gravitationelle

Lorsqu'un nuage de gaz se contracte pour former une étoile, il tire principalement son énergie du potentiel gravitationnel.



La force gravitationnelle exercée par une masse sphérique M_r sur un élément extérieur de masse dm est

$$dF = G\frac{M_r dm}{r^2}. \tag{1}$$

Cette force est dirigée vers le centre de la sphère. Nous pouvons directement calculer l'énergie potentielle gravitationnelle de l'élément de masse dm en intégrant (1) sur r, nous obtenons

$$dU = -G\frac{M_r dm}{r}. \tag{2}$$

L'énergie potentielle de toutes les couches de masse $\mathrm{d}m$ d'une étoile, du centre jusqu'à sa surface de rayon R, est donc

$$U = -G\int_0^R \frac{M_r dm}{r}. \tag{3}$$

Théorème du viriel

Si un système est constitué de plus de deux particules, ses équations du mouvement ne peuvent en général pas être résolues analytiquement. En se donnant les conditions initiales du système, nous pouvons calculer numériquement les orbites avec une précision finie, ce qui nous empêche de connaître toutes les propriétés de chaque orbite. Les seuls paramètres que nous pouvons évaluer sont les quantitées conservées comme le moment cinétique, l'impulsion et l'énergie du système. Il est toutefois possible d'extraire certains résultats de nature statistique, comme le *théorème du viriel* :

Lorsqu'un ensemble de particules liées gravitationnellement est en équilibre statistique stable, alors

$$2\langle K\rangle = -\langle U\rangle \tag{4}$$

où $\langle K\rangle$ est la moyenne temporelle de l'énergie cinétique totale des particules, et $\langle U\rangle$ est la moyenne temporelle de l'énergie potentielle du système, due à l'attraction mutuelle de ses membres.

Exercice 1 : Contraction d'un nuage de gaz

a) Calculez l'énergie gravitationnelle U d'un nuage sphérique et homogène de masse M et de rayon R.

b) On considère que le nuage est constitué d'un gaz monoatomique. Par la théorie cinétique des gaz, nous pouvons donc lier la température à l'énergie cinétique :

$$K = \frac{3}{2}NkT \tag{5}$$

tel que $N = M/\mu m_H$ où μ est le poids moléculaire moyen.

Le théorème du viriel décrit un état d'équilibre. Comment cet équilibre doit-il être rompu pour qu'un effondrement se produise (i.e. quelle relation peut-on alors écrire entre $\langle K\rangle$ et $\langle U\rangle$) ?

Déduisez-en la masse limite M_J (Masse de Jeans) au-delà de laquelle un nuage de température T et de densité ρ constantes et homogènes s'effondre. Exprimez ce même critère sous la forme d'un rayon limite (R_J, le rayon de Jeans).

Rappel théorique

Si F_X est le flux que l'on reçoit d'un astre dans une certaine plage de fréquences X délimitée par exemple par un filtre, on définit sa magnitude apparente dans la bande X par :

$$m_X = -2.5\log(F_X) - c_X \tag{6}$$

où F_X se mesure en erg s^{-1} cm^{-2}, et où c_X est une constante choisie arbitrairement. La valeur de cette constante (appelée point zéro) donne d'ailleurs lieu à l'existence de différents systèmes de magnitudes.

Le système de magnitudes Vega

Un système de magnitudes fréquemment utilisé est le système Vega. Dans ce système, l'étoile Vega est utilisée comme origine du système des magnitudes, i.e. on stipule que

Vega a la magnitude zéro dans tout filtre X. Pour ce système, les points zéros sont donc donnés par :

$$c_X = -2.5\log(F_X(\text{Vega})) \tag{7}$$

La forme générale des magnitudes “Vega” pour un objet céleste donné est ainsi :

$$m_X(\text{obj}) = -2.5\log\left(\frac{F_X(\text{obj})}{F_X(\text{Vega})}\right) = -2.5\log(F_X(\text{obj})) - c_X \tag{8}$$

Magnitude absolue et module de distance

On distingue les magnitudes apparentes m_X qui se réfèrent au rayonnement d'un astre perçu depuis la Terre, et les magnitudes absolues M_X, qui se réfèrent au rayonnement qu'on percevrait de l'objet s'il était situé à une distance de 10 parsecs. La détermination de la magnitude absolue d'un astre nécessite la connaissance de sa distance d. Si L_X est la luminosité (en erg s^{-1}) d'un astre dans la bande X, on a $F_X = L_X/4\pi d^2$ dans le cas d'un rayonnement isotrope, et donc :

$$m_X - M_X = -2.5\log\left(\frac{L_X}{4\pi d^2}\frac{4\pi\,10^2}{L_X}\right). \tag{9}$$

Ceci permet de définir le module de distance :

$$\mu_X = m_X - M_X = 5\log\left(d[\text{pc}]\right) - 5. \tag{10}$$

Une galaxie proche, comme Messier 31, dont la distance est de $d = 670$ kpc et la magnitude absolue est $M_V = -20.7$ mag a donc un module de distance $\mu_V = 24.1$ mag et une magnitude apparente $m_V = 3.4$ mag. Cette galaxie, la plus proche de la nôtre, a une magnitude apparente qui la place déjà parmi les objets difficiles à voir à l'oeil nu sous un ciel urbain.

Résolution angulaire

La résolution angulaire θ définit le pouvoir séparateur d'un télescope ou d'une antenne radio. Par conséquent, l'instrument sera capable de différencier deux objets séparés d'une distance angulaire supérieure ou égale à θ. Pour un télescope de diamètre D observant à la longueur d'onde λ, la résolution angulaire est donnée par l'expression :

$$\theta[\text{radian}] = 1.22\,\frac{\lambda[\text{m}]}{D[\text{m}]}. \tag{11}$$

On voit immédiatement que la résolution angulaire d'un télescope peut être améliorée de deux façons, soit en augmentant le diamètre du miroir, soit en diminuant la longueur d'onde d'observation. Ainsi, le télescope spatial Hubble, de 2.4 m de diamètre, a une résolution de 0.15” en infrarouge, et de 0.05” dans le visible.

Exercice 2 : Magnitude et module de distance

Dans la figure 1, on donne le spectre de l'étoile Vega. On a également representé schématiquement trois filtres dans les bandes U, B, V. On suppose que la transmission de ces filtres est de 100% dans les domaines de longueur d'onde indiqués et 0% partout ailleurs. La largeur de chacune des trois bandes est de 500 Å.

a) Déterminez les points zéros de chacun des trois filtres dans le système de magnitudes Vega. Pour y parvenir, estimez grossièrement la valeur moyenne du flux de Vega dans chacun des trois filtres. Intégrez ensuite sur la longueur d'onde pour obtenir le flux F_X (Vega) avec $X = U$, B, et V. Prenez garde à l'échelle de l'ordonnée.

b) Dans la figure 2, on donne les spectres observés des étoiles HD 49798 et LTT 1788. La première est de type spectral O, c'est-à-dire une étoile chaude de température $T \simeq 40'000$ K. La seconde est de type F, i.e. une étoile relativement froide avec $T \simeq 7'000$ K. De manière similaire qu'au point précédent, déterminez les magnitudes U, B, et V (dans le système de magnitudes Vega) de ces deux étoiles. Donnez également les indices de couleur $B - V$ et $U - B$. Laquelle des deux étoiles est-elle la plus bleue ? A nouveau, prenez garde aux échelles des ordonnées.

c) La distance de Vega est de 7.76 pc. Que vaut son module de distance μ_V ? Quelle est la magnitude absolue M_V de Vega (dans le système de magnitudes Vega).

d) Jusqu'à quelle distance est-on capable de voir une étoile semblable à Vega à l'oeil nu (i.e. $m_V < 6$ mag dans le système de magnitudes Vega) ? Et si vous utilisez un télescope capable d'observer des objets jusqu'à la magnitude apparente $m_V = 15$ mag, quelle sera cette distance ? Même question pour un télescope comme le Very Large Telescope de 8 m de diamètre, dont la magnitude "limite" est $m_V = 28$ mag. Comparer ces distances à la taille de la Voie Lactée (son rayon vaut environ 20 kpc) et à la distance aux galaxies les plus proches (~ 1 Mpc).

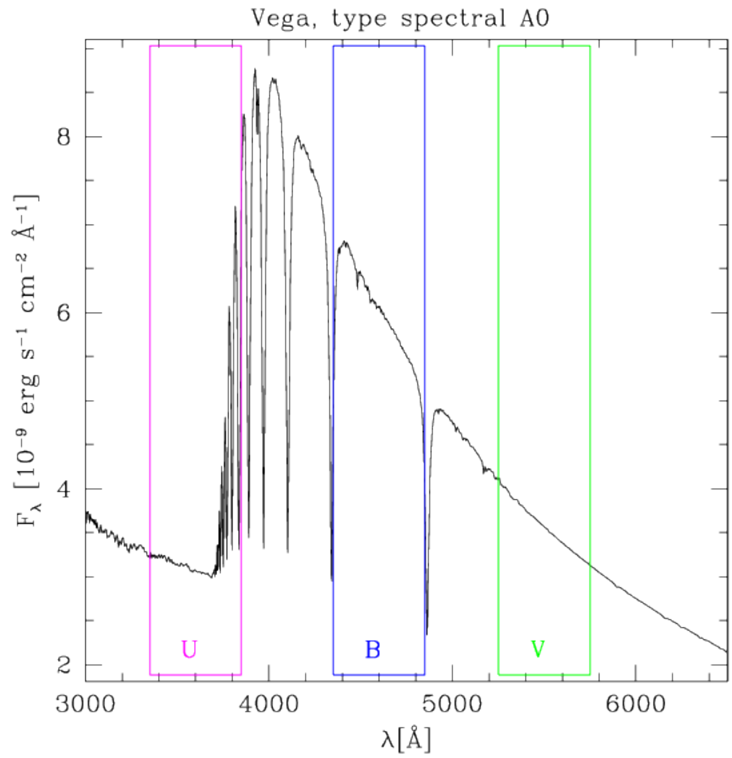


FIGURE 1 – Spectre de l'étoile Vega.

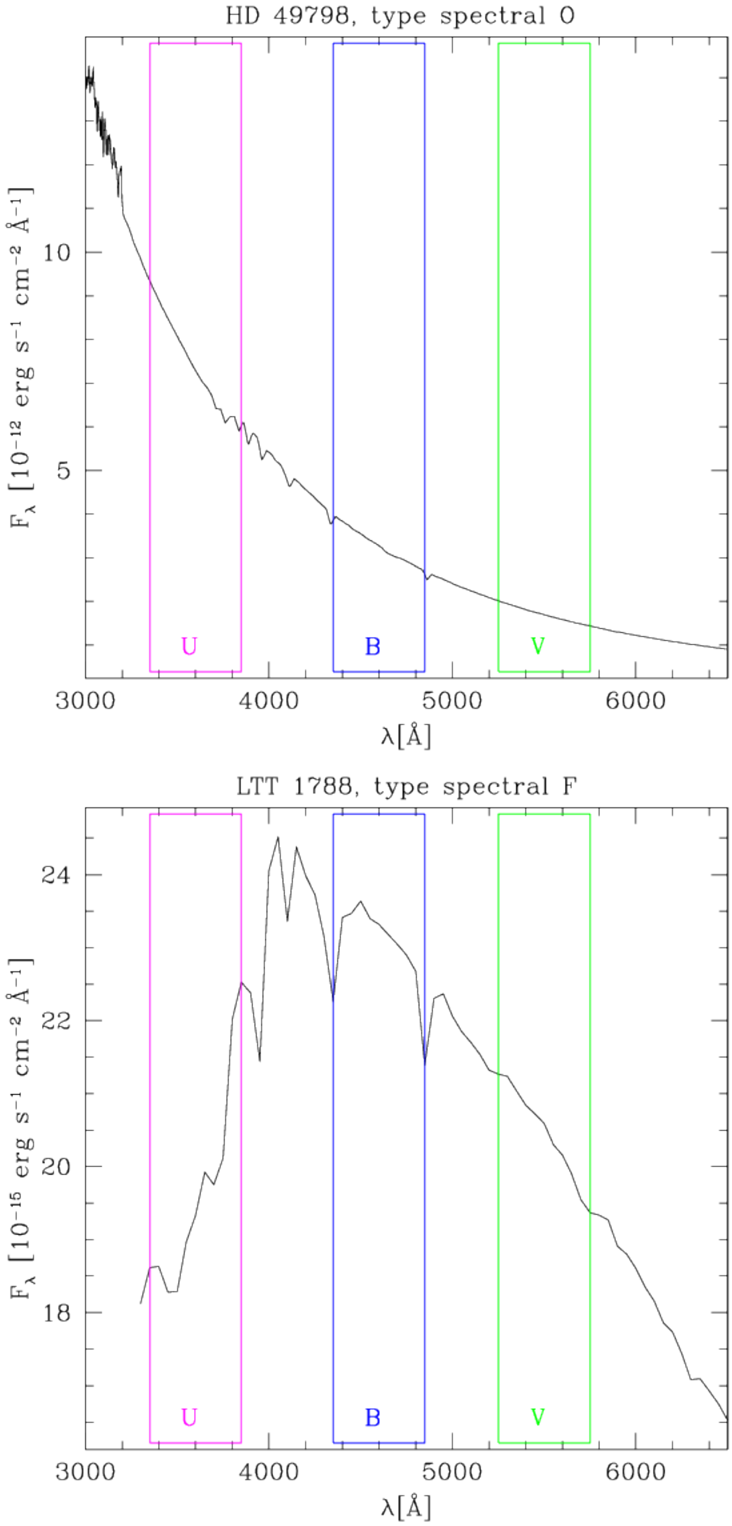


FIGURE 2 – *Haut :* Spectre de l'étoile chaude HD 49798 ($T \simeq 40'000$ K). *Bas :* Spectre de l'étoile froide LTT 1788 ($T \simeq 7'000$ K).