Introduction à l'Astrophysique

Série 11: Enoncé

Laboratoire d'Astrophysique `http://lastro.epfl.ch`
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025

Exercice 1 : Rayon d'Einstein

On considère une lentille gravitationnelle dont la source d'arrière plan se situe à une distance D_{os} de l'observateur et la lentille à une distance D_{ol}. On notera D_{ls} la distance de la lentille à la source. Notons au passage qu'en général la métrique de l'Univers est telle que $D_{ls} \neq D_{os} - D_{ol}$. Si l'alignement entre l'observateur, la lentille et la source est parfait, cette dernière apparaît sous forme d'un anneau d'Einstein dont le rayon apparent (angulaire) est appelé rayon d'Einstein et vaut :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}}} \tag{1}$$

Cette quantité est très utile puisque dans le cas d'images multiples, la distance angulaire séparant les images est du même ordre de grandeur que deux fois le rayon d'Einstein.

Pour une source située à l'infini, calculez le rayon d'Einstein θ_E (en arcsec) des trois astres suivants. Pourra t'on observer des images multiples dans chacun des cas ?

a) Le Soleil de masse $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg et situé à une distance D_{ol} =1.496$\times 10^{11}$ m. Le rayon du Soleil vaut $R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m.

b) Une galaxie de masse $M = 10^{12} M_\odot$ située à un décalage vers le rouge $z = 0.5$, correspondant à une distance diamètre-angulaire $D_{ol} = 1250$ Mpc. Le rayon d'une galaxie est de l'ordre de grandeur de 20 kpc.

c) Un amas de galaxies de masse $M = 10^{15} M_\odot$ situé à un décalage vers le rouge $z = 0.5$. Le rayon typique d'un amas de galaxies vaut environ 1 Mpc.

Indication : pour un astre situé à l'infini, le rapport des distances entre la lentille et la source (D_{ls}) et l'observateur et la source (D_{os}) est proche de 1, c'est-à-dire $\frac{D_{ls}}{D_{os}} \sim 1$.

Exercice 2 : Un amas de galaxies comme télescope naturel

On considère un amas de galaxies situé à un décalage vers le rouge $z = 0.3$, correspondant à une distance diamètre-angulaire $D_{ol} = 920$ Mpc. Par l'effet de lentille gravitationnelle, cet amas peut servir de télescope naturel pour détecter des galaxies d'arrière-plan extrêmement lointaines et qui seraient autrement trop faibles pour être observées.

On peut essayer de modéliser la distribution de masse (c'est-à-dire ce qui est responsable de l'effet de lentille gravitationnelle) de l'amas par une “sphère isotherme singulière”, définie par une densité en $1/r^2$. Un tel modèle prédit une *magnification* (amplification de l'intensité lumineuse) μ en fonction de la position angulaire θ de l'image de la source

$$\mu(\theta) = \frac{|\theta/\theta_E|}{||\theta/\theta_E| - 1|} \quad \text{avec} \quad \theta_E = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c}\right)^2 \left(\frac{D_{ls}}{D_{os}}\right)$$

où θ_E est le rayon d'Einstein, ce dernier étant une grandeur définie qu'un anneau d'Einstein soit visible ou non, et où σ_v est la dispersion de vitesse à l'intérieur de l'amas. L'équation décrit donc que plus une image est proche de l'anneau d'Einstein, plus elle sera amplifiée.

Admettons qu'on souhaite découvrir la galaxie la plus lointaine jamais observée. Une telle galaxie devrait avoir un redshift d'environ $z = 8$, ce qui correspond à une distance diamètre angulaire $D_{os} = 990$ Mpc et $D_{ls} = 860$ Mpc. (Notez que $D_{os} \neq D_{ol} + D_{ls}$, ce qui est dû à la géométrie particulière de l'Univers qui n'est pas euclidienne).

Cette galaxie très lointaine aura une luminosité apparente très faible à cause de l'énorme distance qui nous sépare d'elle. Pour qu'une telle galaxie devienne observable il faut qu'elle subisse l'effet de lentille gravitationnelle pour “magnifier” sa luminosité.

a) Calculez le rayon d'Einstein θ_E (en arcsec) de l'amas de galaxies décrit ci-dessus pour une source à $z = 8$ et une dispersion de vitesse $\sigma_v = 1000$ km/s (i.e. une valeur typique).

b) En supposant qu'une magnification $\mu(\theta) > 10$ est nécessaire pour pouvoir détecter la galaxie à $z = 8$ derrière l'amas que nous considérons, quelle est la surface du ciel (en arcmin^2) dans laquelle on pourrait voir des images de telles galaxies ?

Vous venez de calculer la surface (angle solide) dans laquelle la luminosité d'une éventuelle *image* d'une galaxie de fond serait amplifiée par un facteur supérieur à 10. Comme vu au cours, le phénomène de lentille gravitationelle conserve la “brillance de surface” ; autrement dit la raison pour une amplification d'un facteur μ de la luminosité est que l'image à cet endroit donné est optiquement agrandie (en surface) de ce même facteur μ, par rapport à l'image qu'on observerait sans lentille gravitationelle. Intéressons-nous maintenant à déterminer la taille de la surface du ciel dans laquelle on devrait placer une *source* afin qu'elle soit amplifiée d'un facteur supérieur à 10 ; il s'agit donc du lieu géométrique de toutes les positions de *sources* qui donnent des *images* dans l'anneau calculé ci-dessus. A cause de la magnification, cette région du *plan source* est plus petite que la région correspondante du *plan image*. Le calcul exact de la surface dans le plan source est avancé, mais dans le cadre de cet exercice, supposons pour simplifier que la magnification vaut 10 dans tout la région considérée, et que la surface du ciel qui devra contenir la source est donc 10 fois plus petite que ce qui a été calculé au point b).

c) On décide d'observer un certain nombre N d'amas de galaxies (identiques à celui considéré précédemment) dans l'espoir de trouver au moins une galaxie à $z = 8$. On estime que la densité de surface de galaxies à $z = 8$ est de $n = 1$ arcmin^{-2}. Combien d'amas faut-il observer au minimum pour être pratiquement sûr de trouver une galaxie à $z = 8$?