

Chapitre 2

Gravitation et mouvements

Les 3 lois de Kepler

Les lois de Kepler (1571-1630)

1 - Les planètes décrivent des orbites elliptiques, planes, dont le Soleil occupe l'un des foyers.

En fait, toutes les coniques sont possibles (les comètes ont souvent des orbites très elliptiques, voire paraboliques ou hyperboliques).

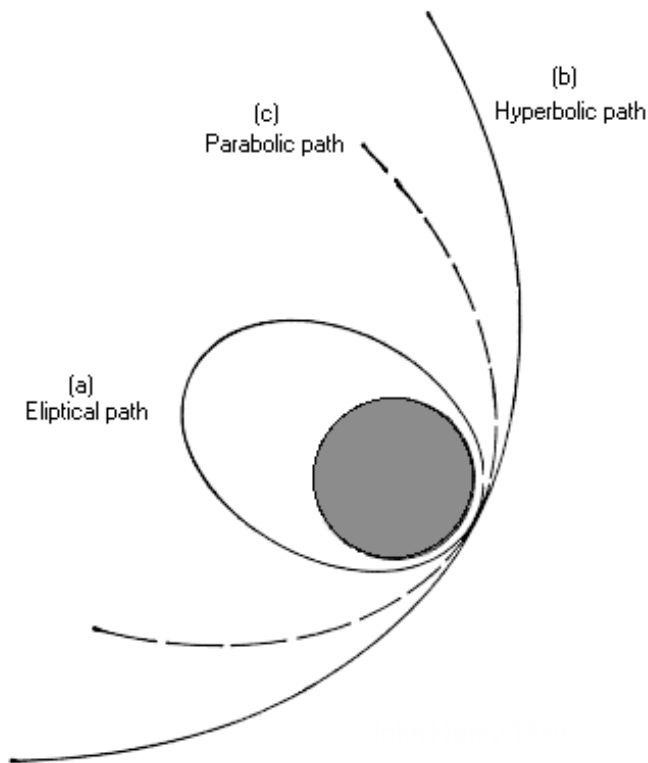
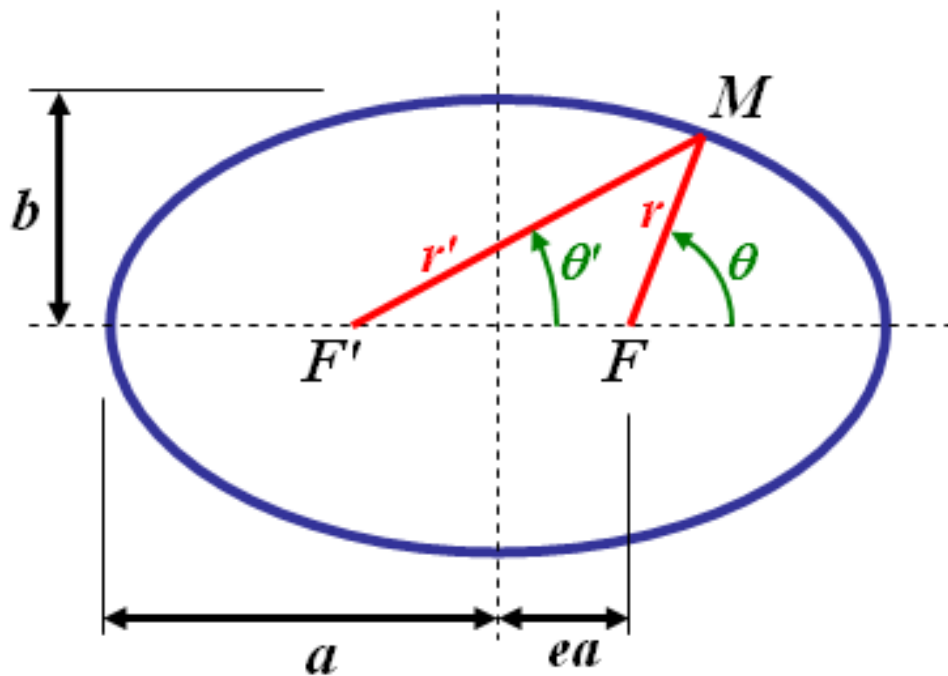


Fig-1: Types of paths



Les lois de Kepler (1571-1630)

Définition de l'ellipse: $r + r' = 2a$



En coordonnées polaires

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

En coordonnées cartésiennes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Excentricité de l'ellipse

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

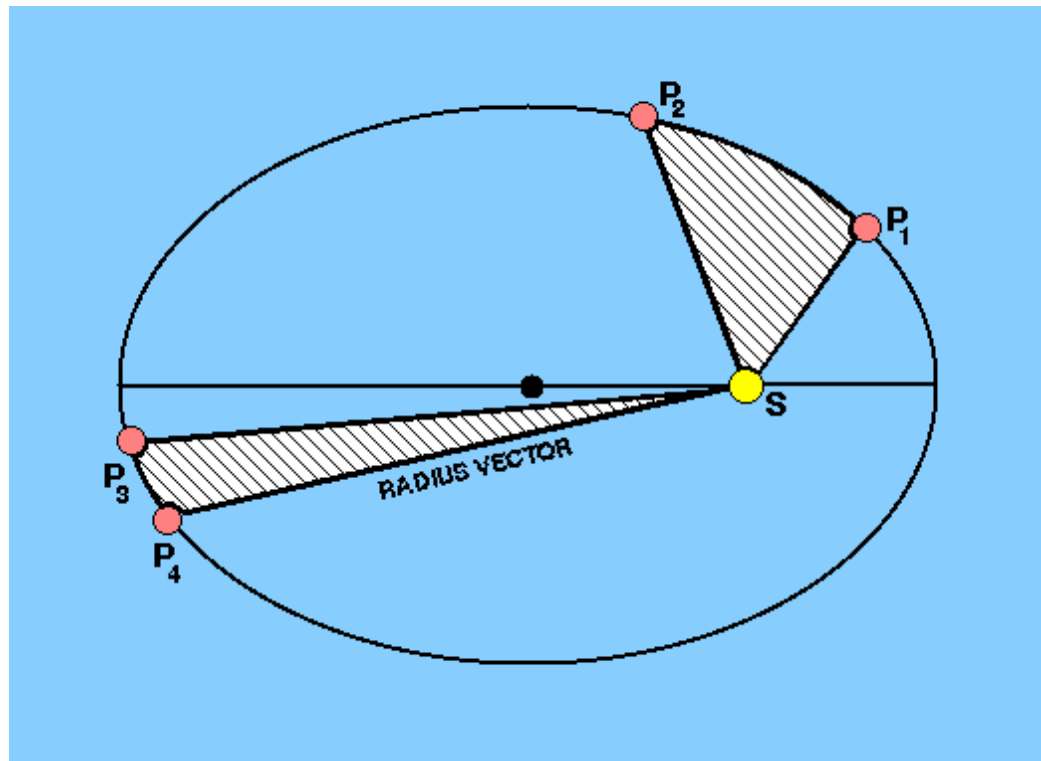
Surface de l'ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

Les lois de Kepler (1571-1630)

2- Loi des aires: les aires balayées par les rayons vecteurs en des temps égaux, sont égales.

Les planètes ont donc tendance à ralentir lorsqu'elles s'éloignent du Soleil



Les lois de Kepler (1571-1630)

3-le carré de la période orbitale, P , est proportionnel au cube de la distance moyenne au Soleil

$$\frac{P^2}{a^3} = K$$

Cas de la Terre: $P=1$ année, $a=1$ UA (unité astronomique) \Rightarrow donc $K=1$

Pour un système de deux masses telles que $M = m_1 + m_2$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

ou encore, comme $\omega=2\pi/P$:

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$$

Pour une orbite circulaire:

$$\omega = \frac{V}{R}$$

Les lois de Kepler (1571-1630)

Le carré de la période orbitale, P , est proportionnel au cube de la distance moyenne au Soleil

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \qquad \omega^2 = \frac{GM}{a^3} \qquad \text{avec } \omega = 2\pi/P$$

Conséquence directe: les planètes orbitant plus loin de leur étoile ont une période de révolution plus grande.

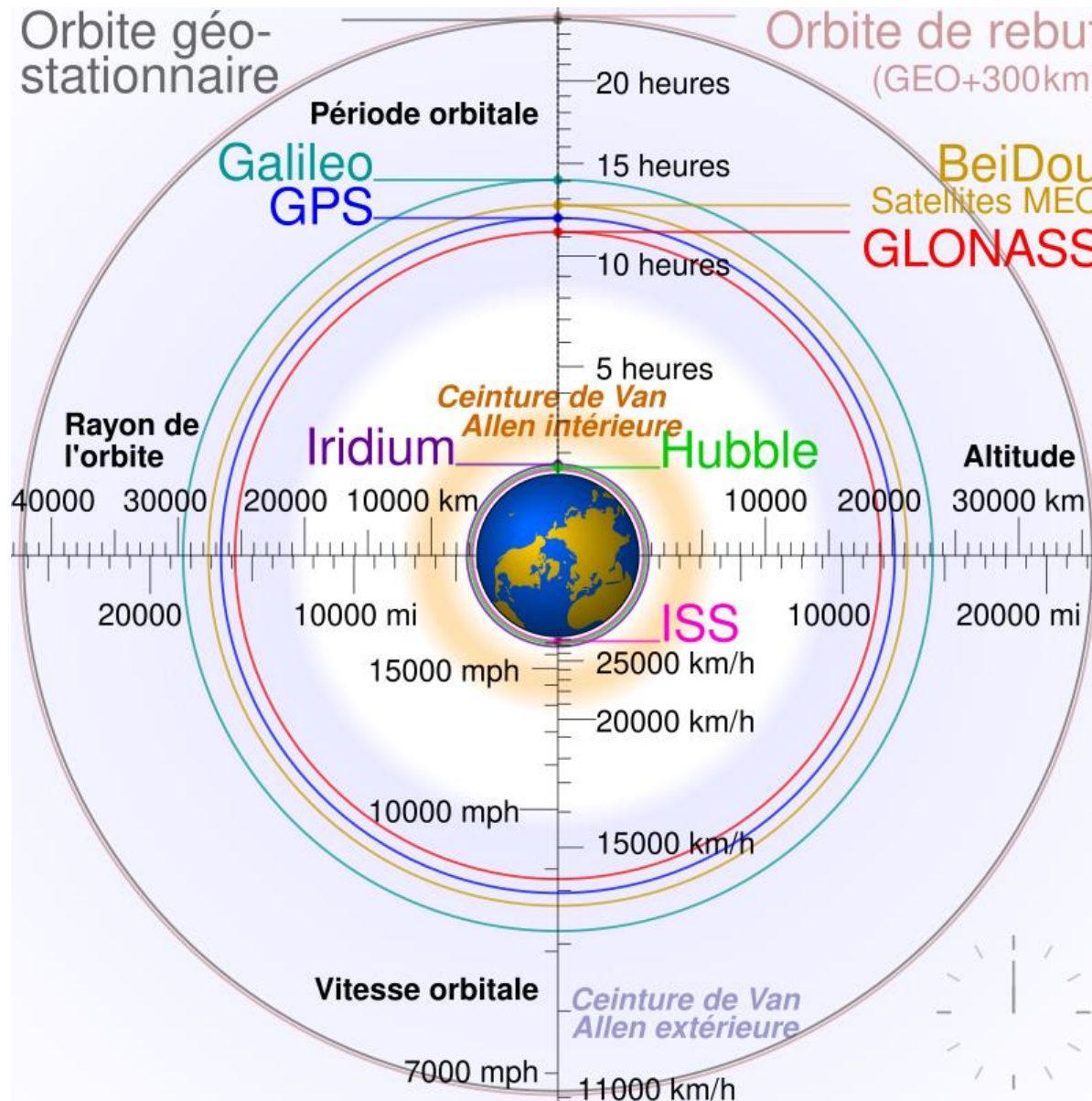
- Explique les queues de comète « courbées »
- Orbites des Satellites terrestres
- Attention lors des sorties extra-véhiculaires !



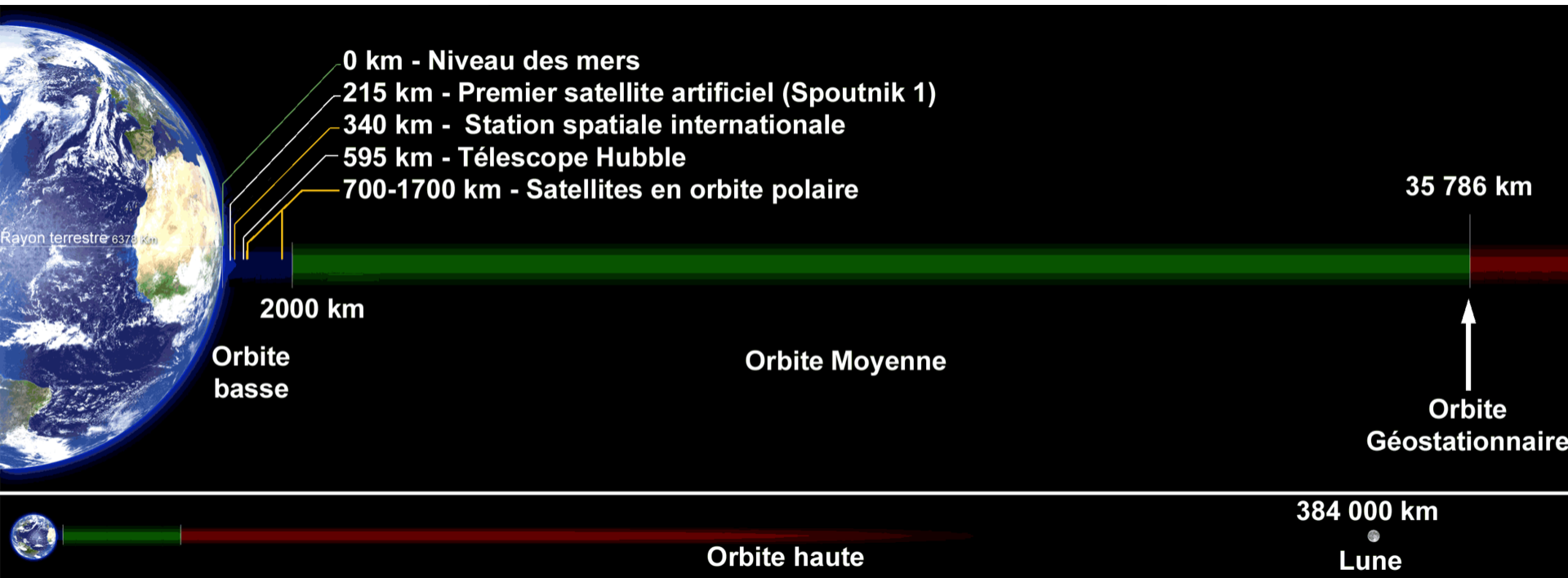
Comète « Lulin » en 2015



Différentes orbites des satellites terrestres



Différentes orbites des satellites terrestres

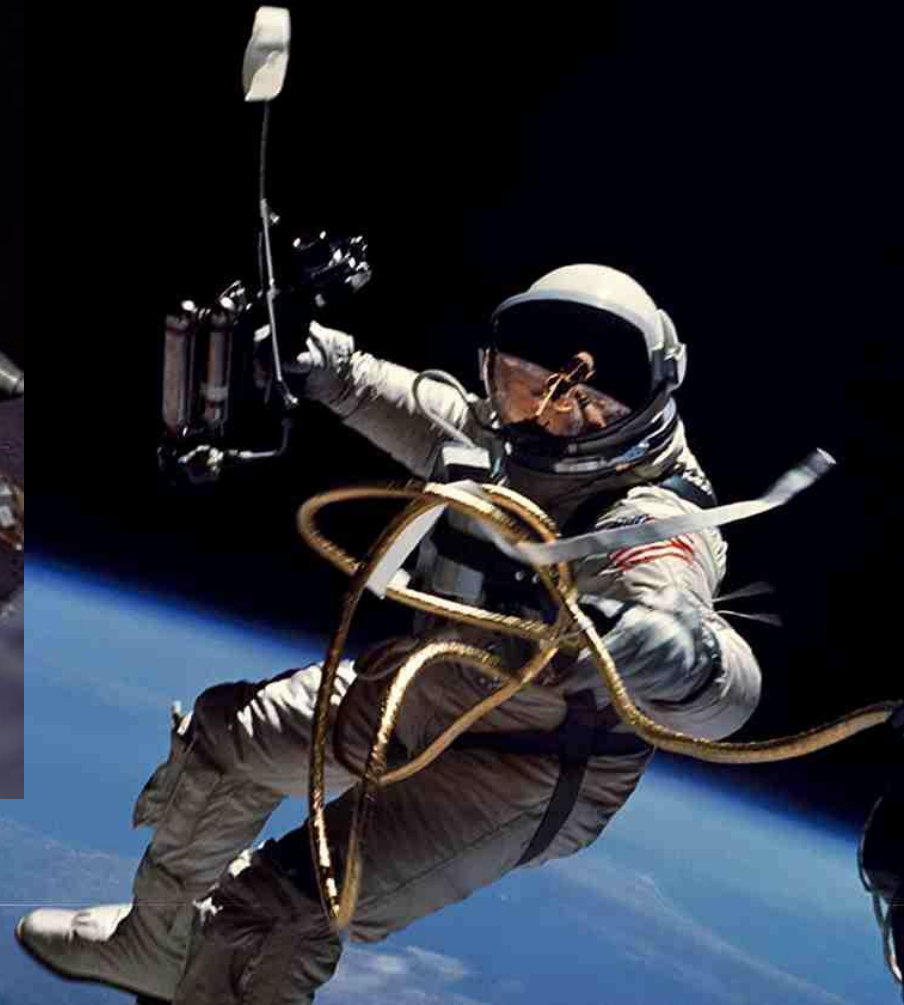


Les sorties Extra-Véhiculaires

1965: *Gemini 4*



1967-1968: premières missions Apollo



Théorème du Viriel et systèmes autogravitants

Théorème du Viriel

Les énergies cinétiques E_{cin} et potentielles E_{pot} d'un système isolé de masses ponctuelles, moyennées dans le temps, suivent la relation

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{\text{pot}} \rangle$$

Fondamental en astrophysique, où de nombreux systèmes peuvent être considérés comme isolés

Les crochets symbolisent la **moyenne temporelle**

Plusieurs démonstrations possibles.

Toutes supposent que les forces internes sont centrales, c'est-à-dire qu'elles dérivent d'un potentiel.

Théorème du Viriel

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

Plusieurs démonstrations possibles.

L'une d'elles utilise le fait que la moyenne dans le temps de la quantité **S** suivante est constante (système isolé):

$$S = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \cdot \vec{r}_k,$$

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \cdot \vec{r}_k \right\rangle = 0$$

Moyenne dans le temps

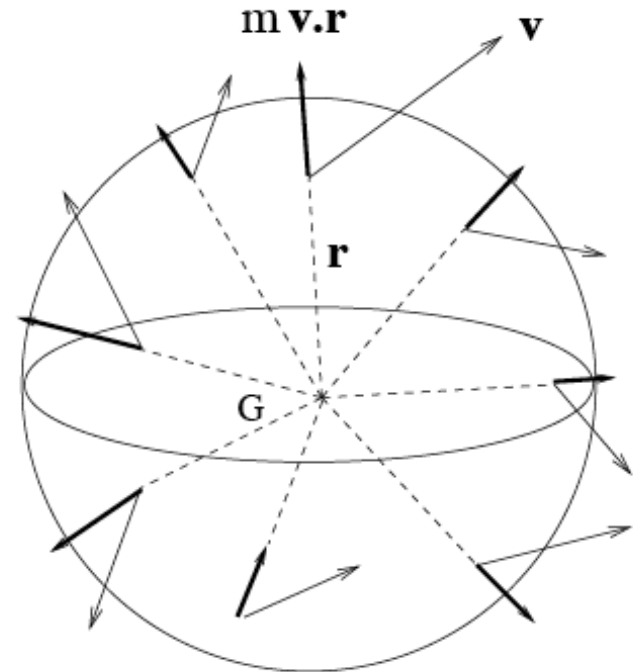


Illustration « géométrique »

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

Théorème du Viriel

$$\frac{dS}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} \cdot \vec{r}_k + \sum \vec{p}_k \cdot \vec{v}_k$$

$2E_{cin}$

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum \vec{F}_k \cdot \vec{r}_k \rangle$$

On se place dans le cas d'une force qui **dérive d'un potentiel**,
ce qui revient à dire que

$$\phi(r) = \alpha r^{n+1}$$

$$\vec{F}_k = -m_k \frac{d\phi(r_k)}{dr} \frac{\vec{r}_k}{r_k}$$

Théorème du Viriel

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

$$\langle \sum \vec{F}_k \cdot \vec{r}_k \rangle = -(n+1) \langle \sum m_k \phi(r_k) \rangle = -(n+1) \langle E_{pot} \rangle$$

Dans le cas de la force de gravitation $n=-2$

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

Théorème du Viriel

Dans le « jargon astrophysique » on dit que le système est « Virialisé » ou « relaxé » si l'on a attendu « assez de temps » pour que le théorème du Viriel puisse s'appliquer.

C'est le cas, entre autres, des:

- Galaxies
- Amas de galaxies (partie centrale)
- Amas d'étoiles

Les interactions gravitationnelles entre les différents objets où **les chocs** rendent parfois inapplicable le théorème du Viriel.

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

Théorème du Viriel

Exemple d'amas d'étoiles
Virialisé

Ici l'amas globulaire
47 Tucanae, visible dans
l'hémisphère sud.

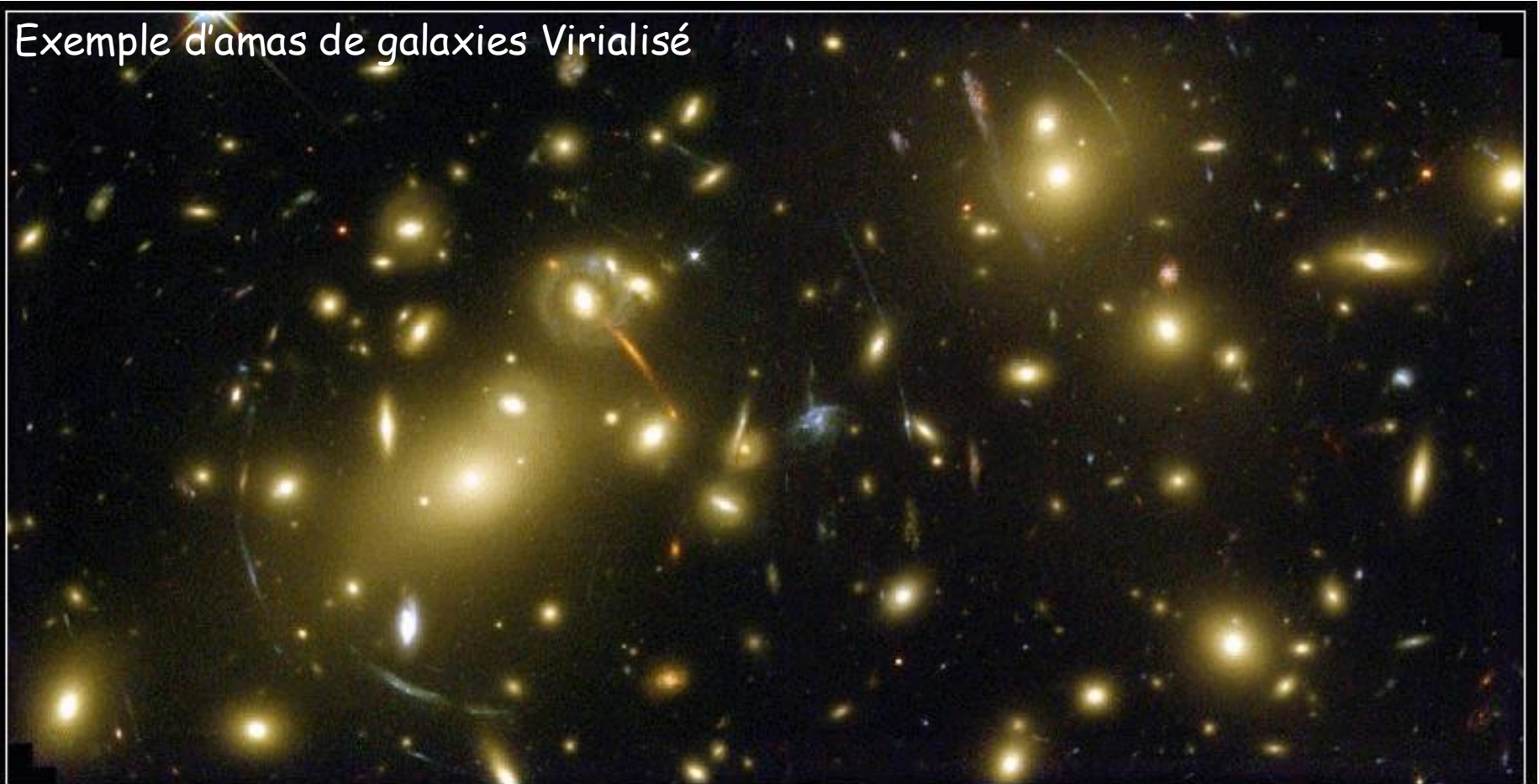
$D = 5,5 \text{ kpc}$
Taille apparente $\sim 30'$



Théorème du Viriel

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

Exemple d'amas de galaxies Virialisé



Galaxy Cluster Abell 2218

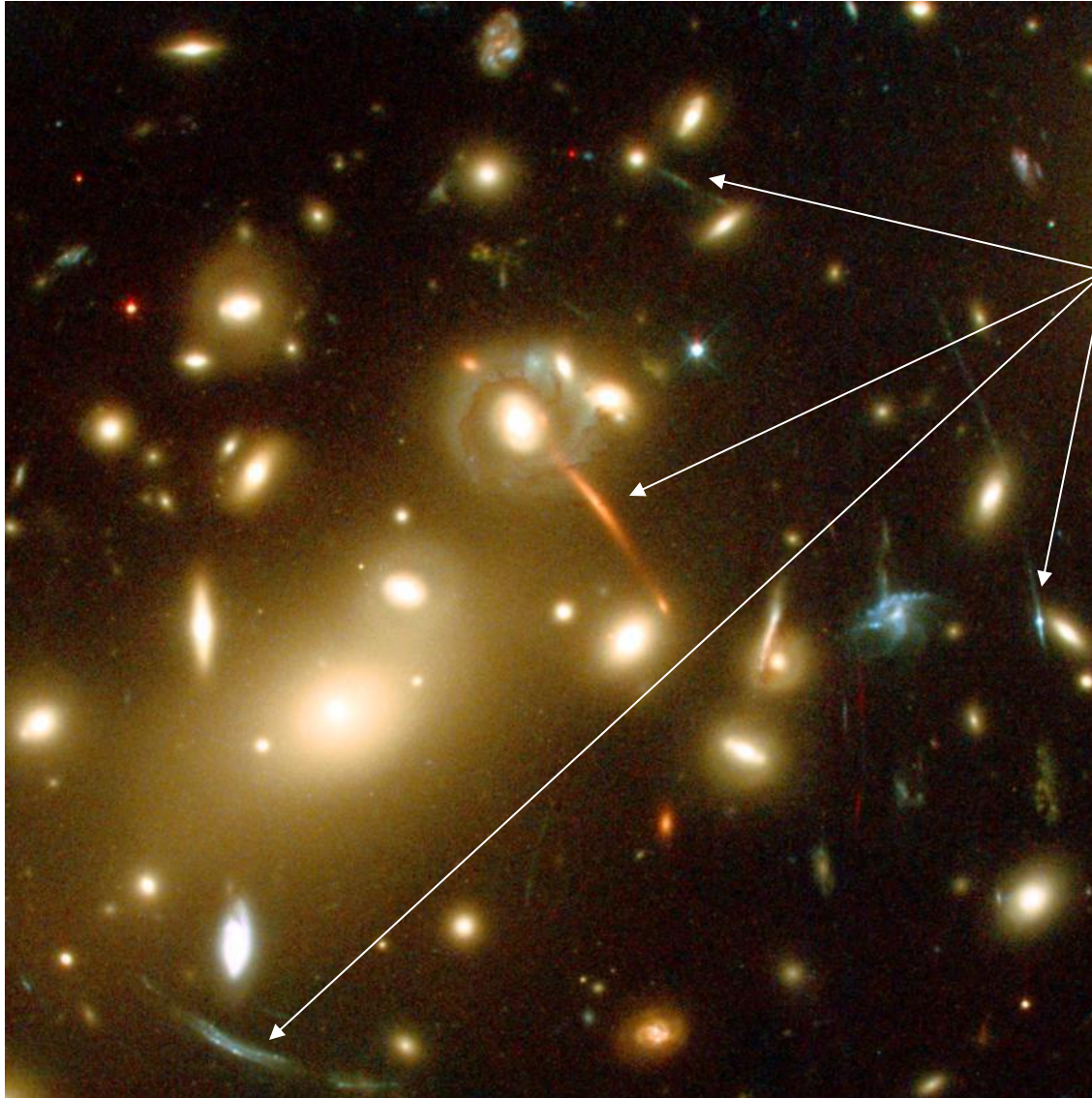
HST • WFPC2

NASA, A. Fruchter and the ERO Team (STScI, ST-ECF) • STScI-PRC00-08

Amas de galaxies Abell 2218 situé à $z=0.171$ ($4,1 \times 10^9$ pc)

Théorème du Viriel

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$



Arcs gravitationnels

Théorème du Viriel

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

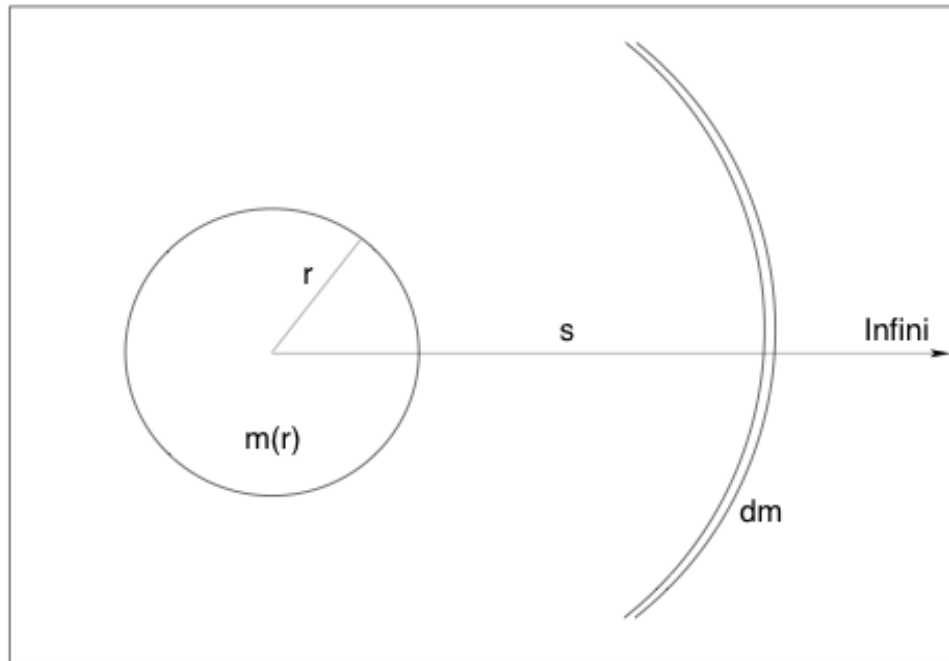


Choc entre galaxies: système **non-virialisé** car la durée du choc est très inférieure au temps nécessaire pour que $\langle dS/dt \rangle \sim 0$

Energie potentielle de gravitation

Energie potentielle de gravitation

La façon la plus efficace de stocker de l'énergie



Pour calculer l'énergie potentielle d'une masse M de rayon R , on calcule le travail de la force de gravité pour amener une couche de masse « dm » depuis l'infini jusqu'au rayon « r », puis on intègre sur la sphère (« s » est une variable muette).

Energie potentielle de gravitation

Variation d'énergie potentielle due au travail de la force de gravitation

$$\begin{aligned} dE_{pot} &= W_{\infty \rightarrow r} \\ &= \int_0^r \frac{G m(r) dm}{s^2} ds \\ &= - \frac{G m(r) dm}{r} \end{aligned}$$

En supposant que la densité de matière est constante dans la masse M

$$E_{pot} = \int_0^R dE_{pot} = - \int_0^R \frac{G m(r)}{r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr$$

$$E_{pot} = - \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

$$\text{avec } m(r) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$$

Energie cinétique

Calcul en termes de
vitesse circulaire

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

Calcul en termes de
thermodynamique

$$E_{cin} = \frac{1}{2} kT$$

Energie par degré de liberté

k: constante de Boltzmann

Application du Viriel à une sphère autogravitante

Pour N particules et trois dimensions spatiales

$$E_{cin} = \frac{3}{2} NkT$$

Le théorème du Viriel (système isolé virialisé) s'écrit alors pour un système de rayon R

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 3NkT$$

Ou encore, si ρ est la densité de matière (constante) du système

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

$$R_{Jeans} = \sqrt{\frac{15 kNT}{4\rho rGM}}$$

Application du Viriel à une sphère autogravitante

On définit ainsi le **rayon de Jeans** d'une masse M

$$R_{Jeans} = \sqrt{\frac{15 kNT}{4\rho rGM}}$$

Rayon que l'on exprime souvent en fonction de la masse moyenne $m = M/N$ des particules

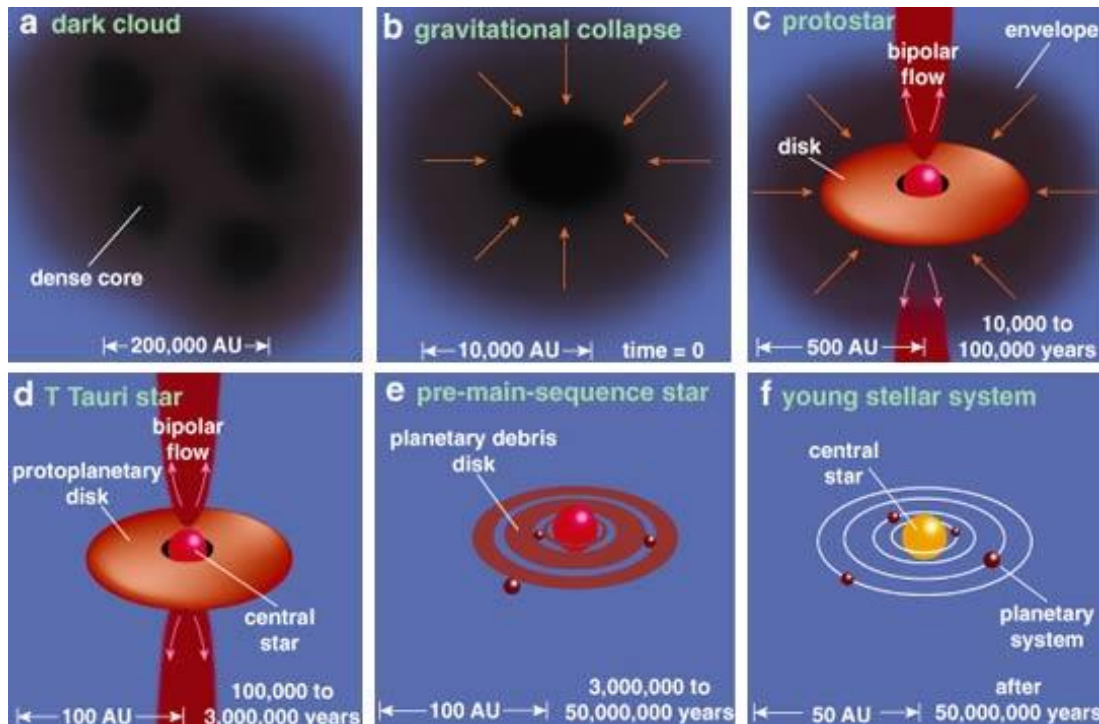
$$R_{Jeans} = \sqrt{\frac{15 kT}{4\rho rGm}}$$

- 1- Pour une masse M fixe un nuage de particules a son énergie totale négative si $R > R_{jeans}$ et le nuage s'effondre sur lui-même
- 2- Pour un rayon R fixe, le nuage s'effondre si sa masse (et donc sa densité) est $M > M_{jeans}$ ce qui définit la **masse de Jeans**

Application du Viriel à une sphère autogravitante

Jeans Mass:
$$M_J = \left(\frac{5kT}{Gm} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

if $M_{\text{cloud}} > M_J \rightarrow \text{collapse!}$



Temps caractéristique d'effondrement

Si aucune force ne s'oppose à la force interne de gravitation, le système s'effondre sur lui-même en un temps caractéristique appelé le temps de « chute libre » (free-fall).

Pour un système de **masse volumique constante**, ρ , ce temps s'écrit

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\rho}{32rG}}$$

Si la dimension caractéristique du système (p.ex. le rayon) est R , alors t_{ff} est le temps mis par une particule test pour effectuer un trajet égal à la moitié d'une orbite de demi grand axe $R/2$.

Le temps de chute libre ne dépend **que de la densité** du système

Il se calcule facilement en utilisant la 3^{ème} loi de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\rho^2}{GM} a^3$$

Temps caractéristique d'effondrement

Attention ! Ne pas confondre avec le **temps dynamique** qui est le temps nécessaire pour parcourir la **moitié du système**. Les ordres de grandeurs restent comparables.

$$t_{ff} = \frac{t_{dyn}}{\sqrt{2}}$$

TAB. 2.1 – Ordres de grandeurs pour le temps de chute libre.

Objet	ρ (kg m ⁻³)	t_{ff}
Univers	10^{-27}	10^{11} ans
Galaxie	10^{-21}	10^8 ans
Milieu interstellaire	$10^{-21} / 10^{-17}$	$10^5 / 10^8$ ans
Système solaire	10^{-12}	10^3 ans
Soleil	1400	1800 s

Cas extrême des trous noirs

Effet gravitationnel extrême: les trous noirs

Lorsqu'une vitesse suffisante est atteinte, un corps de masse m peut échapper à l'attraction gravitationnelle d'un autre, de masse M . Cette vitesse s'appelle la **vitesse d'échappement**. Quand elle est franchie, le système a une énergie totale positive, c'est-à-dire qu'il n'est plus lié.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_{echap} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Si $v_{echap} = c$, on obtient un rayon limite en dessous duquel même les photons ne peuvent échapper à l'attraction gravitationnelle. Il s'agit de **rayon de Schwarzschild**.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Masse
proportionnelle
au rayon !

Effet gravitationnel extrême: les trous noirs

Quand le rayon physique d'un corps de masse M est plus petit que son rayon de Schwarzschild, la lumière est retenue dans son champ gravitationnel

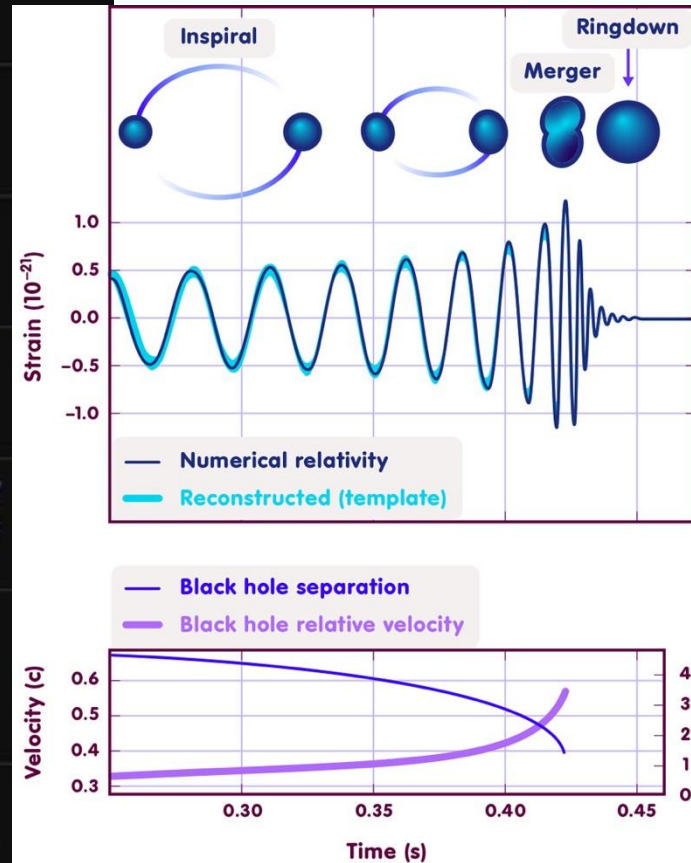
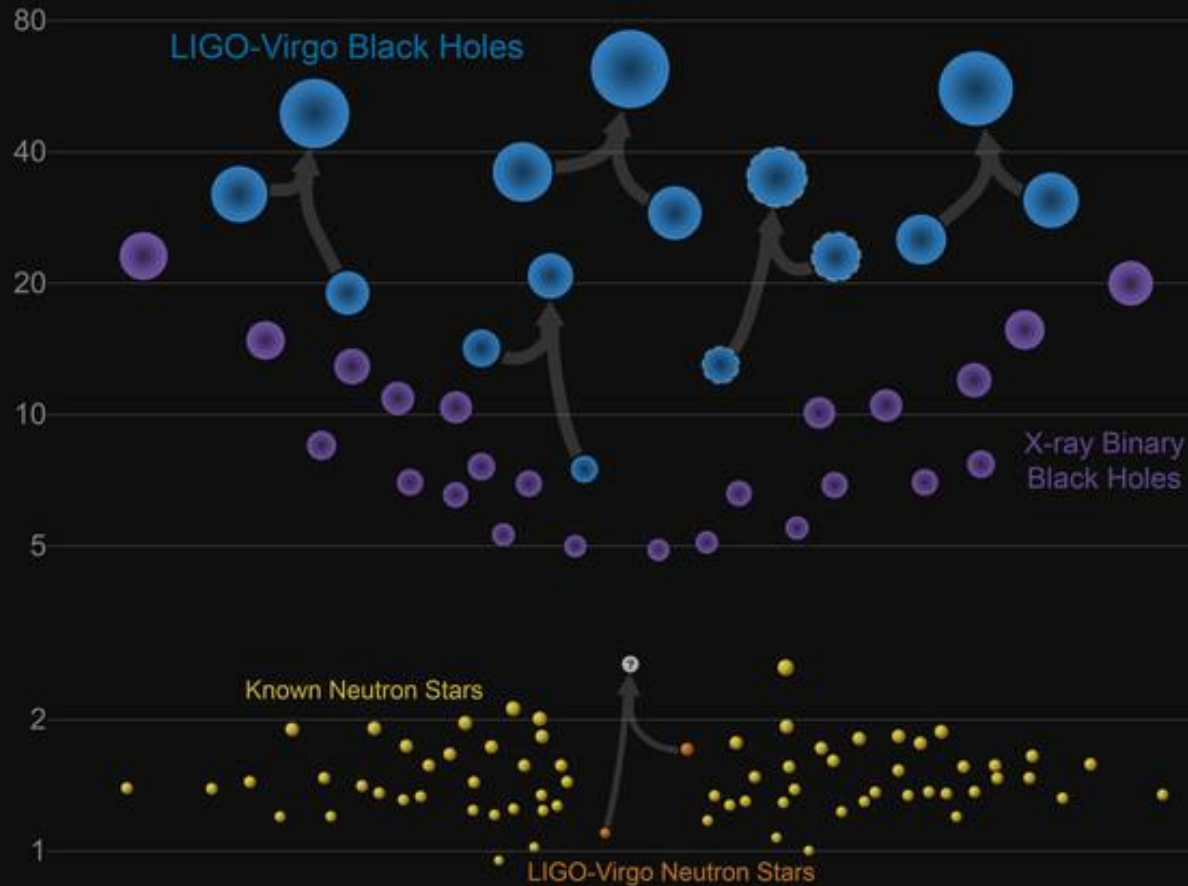
$$r < r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Il existe deux grandes classes de trous noirs:

- 1- les trous noirs stellaires ou **étoiles à neutron** (de quelques à quelques dizaines de masses solaires)
- 2- les **trous noirs supermassifs** au centre des galaxies (quelques dizaines de millions de masses solaires)

trous noirs « stellaires » et étoiles à neutron

Masses in the Stellar Graveyard *in Solar Masses*



trous noirs supermassifs

