Introduction à l'Astrophysique

Série 3: Corrigé

Laboratoire d'Astrophysique http://lastro.epfl.ch
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025

Exercice 1 : Contraction d'un nuage de gaz

a) Soit l'énergie gravitationnelle :

$$dU = -\frac{GM_r dm}{r} \tag{1}$$

Comme la protoétoile est sphérique, la masse et l'élément de masse s'écrivent : $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ et $dm = 4\pi\rho r^2 dr$. Nous obtenons :

$$dU = -\frac{16G}{3}\pi^2 r^4 \rho^2 dr \tag{2}$$

En première approximation, la densité de la protoétoile est constante : $\rho = \overline{\rho} = M/\frac{4}{3}\pi R^3$. On obtient :

$$dU = -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} \tag{3}$$

On intègre sur r de 0 à R et on trouve comme résultat final :

$$U = -\frac{3GM^2}{5R} \tag{4}$$

b) Le nuage commencera à se contracter si la gravitation l'emporte sur la pression, autrement dit si l'énergie cinétique n'est plus assez grande pour équilibrer l'énergie potentielle tel qu'elle le ferait dans un nuage en équilibre. On aura donc :

$$2\langle K\rangle < -\langle U\rangle, \tag{5}$$

noter que $\langle U\rangle < 0$. En combinant avec (**??**) ainsi que $K = \frac{3}{2}NkT$:

$$\frac{kT}{\mu m_H} < \frac{GM}{5R} \tag{6}$$

Il reste à exprimer R en fonction de M et ρ, puis de résoudre en M, pour trouver la masse limite M_J telle que $M > M_J$ résulte en un effondrement :

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2} \tag{7}$$

On peut faire de même pour le rayon :

$$R_J = \left(\frac{15kT}{4\pi G\mu m_H \rho}\right)^{1/2} \tag{8}$$

Un nuage de rayon plus petit que R_J ne s'effondrera donc pas.

Exercice 2 : Magnitude et module de distance

a) Du spectre de Vega, on détermine les valeurs moyennes de F_λ dans les trois filtres U, B, et V et on en déduit les flux F_U, F_B et F_V en intégrant dans les intervalles de longueur d'onde correspondants. On a approximativement :

$$\begin{aligned}
F_U(\text{Vega}) &= 3.5\times10^{-9}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.75\times10^{-6}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_B(\text{Vega}) &= 6.0\times10^{-9}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 3.00\times10^{-6}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_V(\text{Vega}) &= 3.5\times10^{-9}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.75\times10^{-6}\ \text{erg/s/cm}^2
\end{aligned}$$

D'où on déduit les points zéros suivants :

$$c_U = -2.5\log\left(F_U(\text{Vega})\right) = 14.39\ \text{mag} \tag{9}$$
$$c_B = -2.5\log\left(F_B(\text{Vega})\right) = 13.81\ \text{mag} \tag{10}$$
$$c_V = -2.5\log\left(F_V(\text{Vega})\right) = 14.39\ \text{mag} \tag{11}$$

b) De manière similaire qu'au point précédent et en se basant sur les spectres donnés, on obtient pour les deux étoiles :

$$\begin{aligned}
F_U(\text{HD 49798}) &= 7.5\times10^{-12}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 3.75\times10^{-9}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_B(\text{HD 49798}) &= 3.5\times10^{-12}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.75\times10^{-9}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_V(\text{HD 49798}) &= 1.5\times10^{-12}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 0.75\times10^{-9}\ \text{erg/s/cm}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_U(\text{LTT 1788}) &= 20.0\times10^{-15}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.00\times10^{-11}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_B(\text{LTT 1788}) &= 23.0\times10^{-15}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.15\times10^{-11}\ \text{erg/s/cm}^2\\
F_V(\text{LTT 1788}) &= 20.5\times10^{-15}\ \text{erg/s/Å/cm}^2 \times 500\ \text{Å} = 1.03\times10^{-11}\ \text{erg/s/cm}^2
\end{aligned}$$

Les magnitudes dans le système Vega sont données par l'équation :

$$m_X(\text{obj}) = -2.5\log\left(\frac{F_X(\text{obj})}{F_X(\text{Vega})}\right) = -2.5\log(F_X(\text{obj})) - c_X \tag{12}$$

avec $X = U$, B et V. On en déduit les magnitudes apparentes suivantes :

$$\begin{aligned}
m_U(\text{HD 49798}) &= 6.67\ \text{mag}, & m_U(\text{LTT 1788}) &= 13.11\ \text{mag}\\
m_B(\text{HD 49798}) &= 8.08\ \text{mag}, & m_B(\text{LTT 1788}) &= 13.54\ \text{mag}\\
m_V(\text{HD 49798}) &= 8.42\ \text{mag}, & m_V(\text{LTT 1788}) &= 13.08\ \text{mag}
\end{aligned}$$

Les indices de couleur valent donc :

$$\begin{aligned}
B - V(\text{HD 49798}) &= -0.34 \text{ mag}, \qquad & B - V(\text{LTT 1788}) &= 0.46 \text{ mag} \\
U - B(\text{HD 49798}) &= -1.41 \text{ mag}, \qquad & U - B(\text{LTT 1788}) &= -0.43 \text{ mag}
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que l'étoile HD 49798 est nettement plus bleue, donc plus chaude que LTT 1788, car $B - V(\text{HD 49798}) < B - V(\text{LTT 1788})$, et de plus $U - B(\text{HD 49798}) < U - B(\text{LTT 1788})$.

c) La distance de Vega est de $d = 7.76$ pc, et son module de distance vaut :

$$\mu_V = m_V - M_V = 5 \log (d[\text{pc}]) - 5 = -0.55 \text{ mag}. \tag{13}$$

Dans le système de magnitude de Vega, on définit $m_V(\text{Vega}) = 0$. Par conséquent la magnitude absolue M_V de Vega est :

$$M_V = m_V - \mu_V = 0.55 \text{ mag}. \tag{14}$$

d) Du point précédent, on sait que pour une étoile semblable à Vega, on a $M_V = 0.55$ mag. A l'oeil nu, on voit les étoiles jusqu'à $m_V = 6$ mag, i.e. jusqu'à une distance :

$$5 \log (d[\text{pc}]) - 5 = m_V - M_V = 5.45 \text{ mag} \qquad \Rightarrow \qquad d = 123 \text{ pc}. \tag{15}$$

Avec un télescope capable d'observer des objets jusqu'à $m_V = 15$ mag cette distance devient $d = 7.8$ kpc, c'est-à-dire approximativement la distance qui sépare le Soleil du centre galactique. Pour le Very Large Telescope, la limite se situe à $m_V = 28$ mag, c'est-à-dire $d = 3.1$ Mpc. Ce qui est comparable à la distance des galaxies les plus proches.