Introduction à l'Astrophysique

Série 2: Corrigé

Laboratoire d'Astrophysique http://lastro.epfl.ch
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025

Exercice 1 : Ellipse et lois de Kepler

a) Il est parfois plus pratique de caractériser une orbite en coordonnées polaires, telles que r la distance depuis le foyer principal F et l'angle θ sous-tendu entre r et le demi-axe principal a. Partant du théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 \sin^2\theta + (2ae + r\cos\theta)^2 && (1) \\ &= r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta && (2) \end{aligned}$$

En combinant avec la définition de l'ellipse, $r' = 2a - r$, qui donne donc $r'^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar$, on obtient :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\,. \tag{3}$$

b) En général, on peut traiter un problème à deux corps comme un problème à un corps avec une masse réduite μ en mouvement autour d'une masse fixe M à la distance r. Le moment cinétique devient :

$$\vec{L} = \mu\vec{r}\times\vec{v}. \tag{4}$$

Comme nous avons à faire avec un mouvement central $\vec{L} =$ cste et alors l'aire balayée par unité de temps (vitesse aréolaire) est constante. C'est la Seconde Loi de Kepler :

$$\frac{dA}{dt} = \left\|\frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right\| = \frac{\|\vec{L}\|}{2\mu} = \text{cst}\,. \tag{5}$$

La vitesse s'exprime par une composante radiale le long de $\vec{r}$ et une autre perpendiculaire à $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\theta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}. \tag{6}$$

En combinant les deux équations ci-dessus ($\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,r\,r\dot{\theta} = \frac{L}{2\mu}$), nous obtenons :

$$v_\theta = \frac{L}{r\mu}. \tag{7}$$

Il suffit maintenant d'exprimer L en fonction de P, e, a et μ. Nous intégrons l'équation (**??**) sur une période complète P, alors :

$$A = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}P \longrightarrow L = 2A\frac{\mu}{P}. \tag{8}$$

Comme l'aire d'une ellipse est $A = \pi ab$ et que $b = a\sqrt{1-e^2}$, le moment cinétique devient :

$$L = 2\mu\pi a^2\sqrt{1-e^2}/P. \tag{9}$$

On obtient la composante angulaire de la vitesse en combinant les équations (**??**), (**??**) et (**??**) :

$$v_\theta = \frac{2\pi a(1+e\cos\theta)}{\sqrt{1-e^2}P}. \tag{10}$$

A partir de l'équation (**??**), la vitesse radiale est :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}e\sin\theta\dot{\theta}\,, \tag{11}$$

où $\dot{\theta}$ pourra être exprimé a partir de v_θ. Après simplification nous obtenons :

$$v_r = \frac{2\pi ae\sin\theta}{P\sqrt{1-e^2}}. \tag{12}$$

c) L'équation provient de $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$, de l'équation (**??**) et de la troisième loi de Kepler :

$$P^2 = \frac{4\pi^2a^3}{G(m_1+m_2)}\,. \tag{13}$$

Le détail du calcul est :

$$\begin{aligned}
v^2 &= v_\theta^2 + v_r^2 && (14)\\
&= \frac{4\pi^2a^2(1+e\cos\theta)^2}{P^2(1-e^2)} + \frac{4\pi^2a^2e^2\sin^2\theta}{P^2(1-e^2)} && (15)\\
&= \frac{4\pi^2a^2(1+e^2+2e\cos\theta)}{P^2(1-e^2)} && (16)\\
&= G(m_1+m_2)\left[\frac{2(1+e\cos\theta)}{a(1-e^2)} - \frac{1-e^2}{a(1-e^2)}\right] && (17)\\
&= G(m_1+m_2)\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]\,. && (18)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Orbite de la comète de Halley

Pour résoudre ce problème, il nous faut reprendre des équations de l'enoncé de l'exercice sur les ellipses et lois de Kepler :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{19}$$

$$v^2 = G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{20}$$

a) La troisième loi de Kepler exprimée dans les unités usuelles est :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}\,, \tag{21}$$

avec la période P en secondes, le demi-grand axe a en mètres et la masse m en kilogrammes. Si nous remplaçons les kilogrammes par des masses solaires ($1M_\odot = 1.989\times10^{30}$ kg), les secondes par des années sidérales (1 a.s. = 365.256 jours solaires moyens, soit 3.1558×10^7 s) et les mètres par des unités astronomiques (1 AU = 1.496×10^{11} m.), alors $G=4\pi^2$. L'équation (**??**) devient :

$$P^2 = \frac{a^3}{m_1+m_2}\,. \tag{22}$$

La masse de l'ensemble des planètes du système solaire ne représente que $1/745$ de $M_\odot$. Autrement dit, la masse d'une planète est négligeable devant celle du Soleil. La troisième loi de Kepler propre au système solaire est par conséquent :

$$P^2 = a^3. \tag{23}$$

b) Pour calculer le demi-grand axe de la comète de Halley, nous utilisons l'équation (**??**) avec une période $P=76$ ans. Nous obtenons :

$$a = P^{2/3} = 17.94\,\text{AU} = 2.68\times10^{12}\,\text{m}. \tag{24}$$

c) Avec la troisième loi de Kepler (**??**), nous obtenons directement la masse du Soleil (la masse de la comète est négligeable devant celle du Soleil) :

$$M_\odot = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} \tag{25}$$

$$= \frac{4\pi^2}{6.673\times10^{-11}}\,\frac{(2.68\times10^{12})^3}{(76\times3.1558\times10^7)^2}\,\text{kg} \tag{26}$$

$$= 1.979\times10^{30}\,\text{kg}. \tag{27}$$

d) Pour calculer le périhélie et l'aphélie de la comète de Halley, nous utilisons l'équation (**??**). Les angles θ au périhélie et à l'aphélie sont respectivement $\theta=0°$ et $180°$. Nous obtenons :

$$r_\text{p} = a\frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e) = 0.59\,\text{AU} = 8.78\times10^{10}\,\text{m} \tag{28}$$

$$r_\text{a} = a\frac{1-e^2}{1-e} = a(1+e) = 35.29\,\text{AU} = 5.28\times10^{12}\,\text{m}\,. \tag{29}$$

e) La vitesse orbitale en ces positions s'obtient en insérant ces distances r dans (**??**) :

$$v_\mathrm{p} \quad = \quad \left(GM_\odot \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}\right]\right)^{1/2} = 5.46 \times 10^4\,\mathrm{m/s} \tag{30}$$

$$v_\mathrm{a} \quad = \quad \left(GM_\odot \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}\right]\right)^{1/2} = 9.07 \times 10^2\,\mathrm{m/s}. \tag{31}$$

Enfin, le rapport des énergies cinétiques ne fait intervenir que les vitesses orbitales au carré. Nous avons :

$$E_\mathrm{p}^\mathrm{cin}/E_\mathrm{a}^\mathrm{cin} = \left(\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}}\right)^2 = 3.62 \times 10^3. \tag{32}$$