Introduction à l'Astrophysique

Série 11 Corrigé

Laboratoire d'Astrophysique http://lastro.epfl.ch
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025

Exercice 1 : Rayon d'Einstein

Pour une source située à l'infini, nous pouvons considérer que $\frac{D_{ls}}{D_{os}} \sim 1$ et ainsi obtenir l'expression du rayon d'Einstein :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{1}{D_{ol}}} \tag{1}$$

En considérant les différentes valeurs numériques données, nous trouvons :

a) Pour le Soleil, $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg et $D_{ol} = 1.496 \times 10^{11}$ m. En remplaçant dans l'expression du rayon d'Einstein, on trouve alors que $\theta_E = 1.97 \times 10^{-4}$ rad $= 41.0''$. C'est-à-dire que le rayon d'Einstein du Soleil est beaucoup plus petit que son rayon angulaire ($R_\odot/D_{ol} = 0.27°$). Il est donc impossible de voir des images multiples d'un objet situé derrière le Soleil. Par contre, la déviation des rayons lumineux passant à proximité du Soleil et provenant d'étoiles d'arrière plan est mesurable et vaut $\alpha = 1.75''$.

b) Pour une galaxie de $10^{12}\ M_\odot$ située à $D_{ol} = 1250$ Mpc$= 3.85 \times 10^{25}$ m, on trouve $\theta_E = 1.24 \times 10^{-5}$ rad $= 2.55''$. Le rayon apparent d'une telle galaxie vaut $R/D_{ol} = 1.6 \times 10^{-5}$ rad $= 3.3''$, ce qui est comparable au rayon d'Einstein. Il y a donc possibilité d'observer des images multiples ou des anneaux d'Einstein.

c) Pour un amas de galaxies de $10^{15} M_\odot$ possédant un décalage vers le rouge z =0.5, on trouve θ_E =3.91$\times$10^{-4} rad = 80.7$''$. Le rayon apparent d'un tel amas vaut $R/D_{ol} = 8.0 \times 10^{-4}$ rad $= 165''$. Il y a donc possibilité d'observer des images multiples, typiquement des arcs gravitationnels.

Exercice 2 : Un amas de galaxies comme télescope naturel

a) En prenant les valeurs numériques de la donnée, le rayon d'Einstein θ_E de l'amas de galaxies vaut :

$$\theta_E = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c}\right)^2 \left(\frac{D_{ls}}{D_{os}}\right) = 1.213 \times 10^{-4} \text{ rad} = 25\text{''}.$$

b) On cherche à déterminer la surface du ciel dans laquelle $\mu(\theta) > 10$. Il faut donc résoudre l'inégalité suivante :

$$\mu(\theta) = \frac{|\theta/\theta_E|}{||\theta/\theta_E| - 1|} > 10$$

Dans le cas considéré ici $\theta/\theta_E > 0$, et la magnification $\mu(\theta) > 10$ est atteinte pour des positions θ qui vérifient $10/11 < \theta/\theta_E < 10/9$. La surface S dans laquelle cette inégalité est vérifiée vaut

$$S = \pi \left(\frac{10\theta_E}{9}\right)^2 - \pi \left(\frac{10\theta_E}{11}\right)^2 = 2.13 \times 10^{-8}\ \text{rad}^2 = 0.252\ \text{arcmin}^2.$$

Suivant l'indication de la donnée, la surface du ciel dans laquelle une source donnerait lieu à une magnification $\mu(\theta) > 10$ est dix fois plus petite, soit 0.025 arcmin^2.

c) Soit N le nombre d'amas qu'on décide d'observer. La surface totale du ciel où $\mu > 10$ est donc simplement NS (en supposant que les amas ne se recoupent pas). On sait de plus que les galaxies à $z = 8$ ont une distribution sur le ciel d'environ $n = 1$ arcmin^{-2}. La probabilité p d'observer au moins une galaxie à $z = 8$ dans la surface NS est donc approximativement :

$$p = NS\,n = N \cdot 0.025$$

Pour que la probabilité de détection p tende vers 1, il faut donc observer au moins $N = 40$ amas de galaxies.