

## Introduction à l'Astrophysique

# Série 10: Corrigé

Laboratoire d'Astrophysique <http://lastro.epfl.ch>  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
Semestre de printemps 2025

### Exercice 1 : Masse par le viriel

---

a) L'énergie cinétique est :

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2, \quad (1)$$

où  $m_i$  est la masse des “particules” (étoiles, galaxies) dans l'objet considéré, et  $v_i$  est la norme de leur vitesse. En considérant que les vitesses sont isotropes et en prenant leur moyenne dans le temps on a

$$\langle v_i^2 \rangle = 3 \langle v_r^2 \rangle = 3 \sigma_r^2 \quad \text{et} \quad 2 \langle K \rangle = N m_i \langle v_i^2 \rangle = 3 M \sigma_r^2 \quad (2)$$

où  $v_r$  est la composante radiale de la vitesse. En utilisant l'expression pour le potentiel  $U$  calculée dans l'exercice précédant

$$\langle U \rangle = -\frac{3GM^2}{5R}, \quad (3)$$

le théorème du viriel  $2 \langle K \rangle = - \langle U \rangle$  donne alors la masse totale du système

$$M = \frac{5R\sigma_r^2}{G}. \quad (4)$$

- b) i.  $M \cong 4.0 \times 10^4 M_\odot$  pour l'amas ouvert.  
ii.  $M \cong 4.5 \times 10^6 M_\odot$  pour l'amas globulaire.  
iii.  $M \cong 1.1 \times 10^{15} M_\odot$  pour l'amas de galaxies.

### Exercice 2 : Masse de Jeans et formation des galaxies

---

a) L'énergie cinétique typique d'un gaz parfait est donnée par  $E_{cin} = \frac{3}{2} N k T$ . Cette énergie est égale à l'énergie cinétique due à l'agitation thermique  $E_{cin} = \frac{1}{2} N \bar{m} \sigma^2$ , où  $\bar{m} = \mu \times m_H$  et  $\mu$  est la masse moléculaire moyenne. On en tire que :

$$T = \frac{\mu m_H \sigma^2}{3k}, \quad (5)$$

aussi appelée température de viriel. En remplaçant par la donnée, nous trouvons  $T = 1.33 \times 10^6$  K.

- b) La masse volumique  $\rho = n\mu m_H = 1.08 \times 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}$ . Quant à la masse de Jeans, son expression est :

$$M_{Jeans} = \left( \frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} = 3.8 \times 10^{11} M_{\odot}. \quad (6)$$

- c) Le rayon de Jeans est donné par :

$$R_{Jeans} = \sqrt{\frac{15kT}{4\pi\rho G\bar{m}}} = 40 \text{ kpc}. \quad (7)$$

Cette valeur est comparable au rayon du halo Galactique (50-60 kpc).

- d) Pour une température de 10000K, on trouve en remplaçant dans l'équation ??, que  $M_{Jeans} = 2.5 \times 10^8 M_{\odot}$ .

### Exercice 3 : Gaz dans les amas de galaxies

- a) La densité de luminosité  $L_{vol}$  est le rapport entre la luminosité totale  $L_X$  et le volume à l'intérieur duquel cette énergie est émise :

$$L_{vol} = \frac{L_X}{V_{tot}} = \frac{3L_X}{4\pi R^3} = 3.6 \times 10^{-32} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \quad (8)$$

avec  $R = 1.5 \text{ Mpc} = 4.63 \times 10^{24} \text{ cm}$ . En utilisant l'équation (1) de l'énoncé, on a :

$$n_e = \left( \frac{L_{vol}}{1.42 \times 10^{-27} \sqrt{T} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3}} \right)^{1/2} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3} \quad (9)$$

Sachant que l'amas de la Vierge est rempli d'hydrogène ionisé, on trouve :

$$M_{gaz} = \frac{4}{3} \pi R^3 m_H n_e = 3.8 \times 10^{43} \text{ kg} = 1.9 \times 10^{13} M_{\odot} \quad (10)$$

avec  $m_H = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  et  $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

- b) A partir des données, on obtient simplement la masse lumineuse :

$$M_{lum} = \frac{M}{L} L_V = 3.6 \times 10^{12} M_{\odot}. \quad (11)$$

La masse sous forme lumineuse correspond à environ 20% de la masse totale du gaz à l'intérieur de l'amas.

- c) L'énergie cinétique moyenne par particule vaut  $u = 3kT/2$ . La densité d'énergie du gaz (constitué de protons et d'électrons) vaut approximativement :

$$U = 2n_e \left( \frac{3}{2} kT \right) = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg cm}^{-3} \quad (12)$$

avec  $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ . Le gaz perdra son énergie en émettant dans les rayons X en un temps valant :

$$t = \frac{U}{L_{vol}} = 4.4 \times 10^{19} \text{ s} = 1.4 \times 10^{12} \text{ ans}. \quad (13)$$

Ce temps est supérieur à l'âge estimé de l'Univers ( $t = 13 \text{ Gyr}$ ) d'environ 2 ordres de grandeur. L'émission X des amas de galaxies n'est donc pas un phénomène transitoire dans leur histoire.