

Modèle du noyau composé (4)

- Pour une réaction $a+A$ donnant un état final quelconque ayant passé par une résonance dans l'onde ℓ

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

en remplaçant
 $(2\ell+1)$ par le
facteur de spin
donné à la page
précédente

Γ_a = largeur partielle de la résonance dans le canal $a+A$

Γ = largeur totale de la résonance

E_0 = énergie centrale de la résonance

E = énergie totale de la collision dans le centre de masse

k = $k(E) =$ nombre d'onde du projectile a par rapport à la cible A

$\Gamma = \hbar/\tau$, où τ est
la durée de vie
moyenne de la
résonance

Diagramme d'Argand (1)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

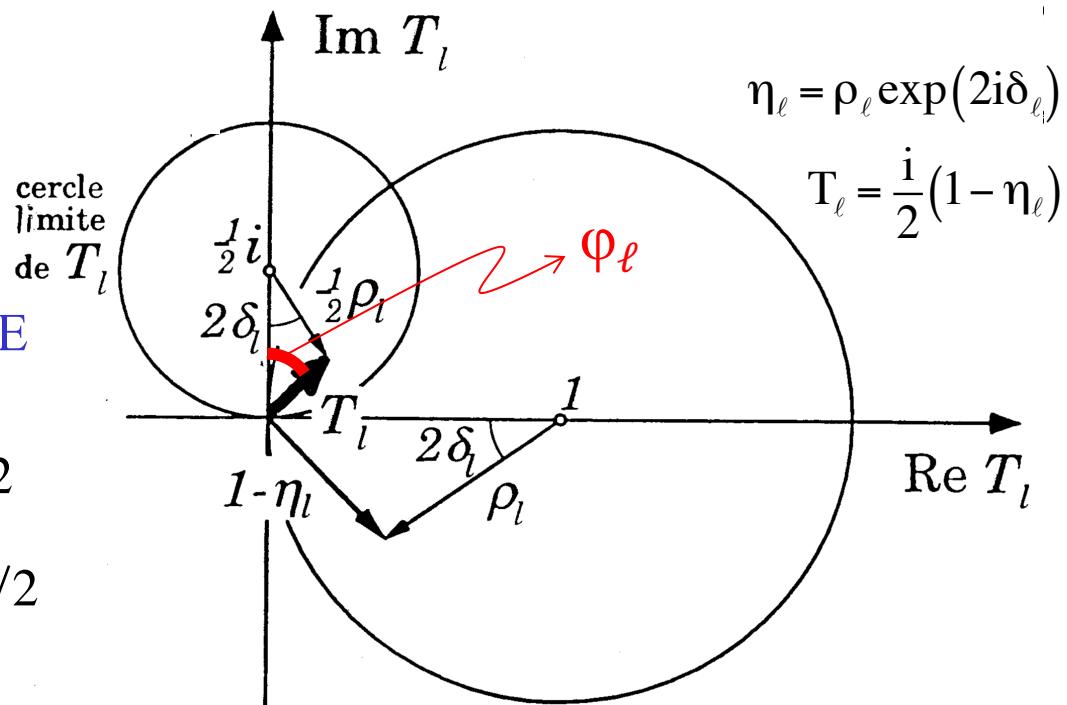
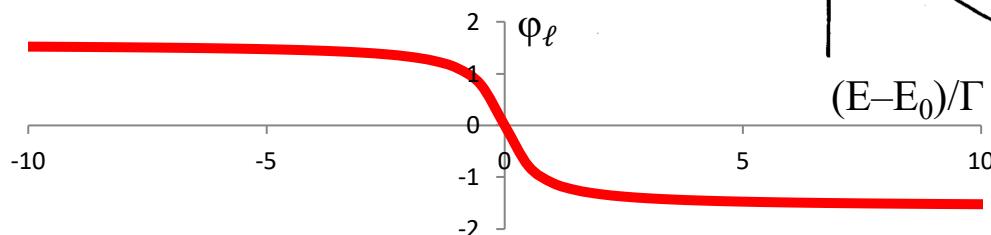
de sorte que

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\phi_\ell = -\arctan\left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)$$

- Evolution de ϕ_ℓ en fonction de E au voisinage de la résonance:

$$\begin{aligned} E \ll E_0 - \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \approx \pi/2 \\ E = E_0 &\Rightarrow \phi_\ell = 0 \\ E \gg E_0 + \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \approx -\pi/2 \end{aligned}$$



$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_{\ell,i})$$

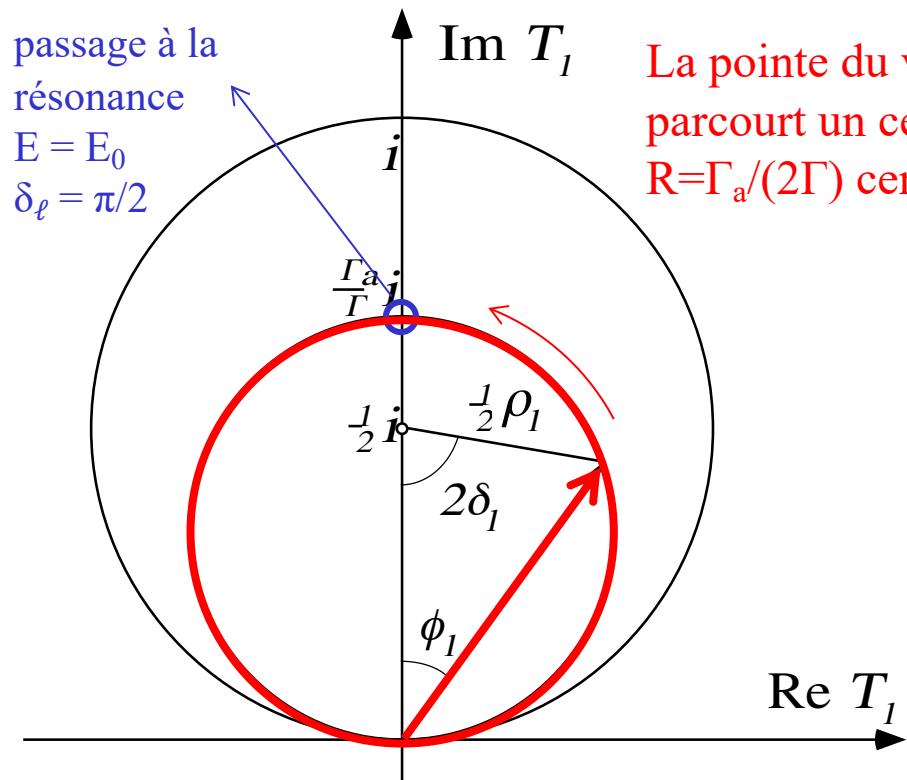
$$T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

Diagramme d'Argand (2)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

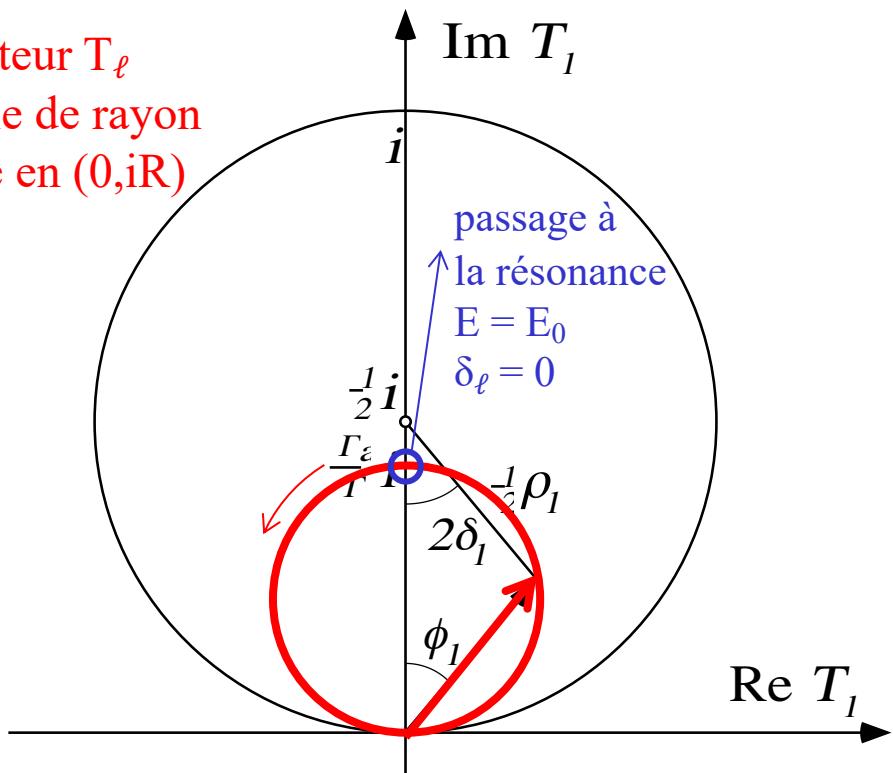
de sorte que

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



cas avec peu d'inélasticité

La pointe du vecteur T_ℓ parcourt un cercle de rayon $R = \Gamma_a/(2\Gamma)$ centré en $(0, iR)$



cas avec beaucoup d'inélasticité

Description d'une résonance selon Wigner (1)

- Comportement asymptotique de la fonction d'onde dans le cas d'une résonance dans l'onde $\ell=0$

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} \left[\eta_\ell \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) - \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) \right] Y_\ell^0(\theta) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{ikr} [\eta_0 \exp(ikr) - \exp(-ikr)] Y_0^0(\theta) \quad \text{avec } \eta_0 = \eta = \rho \exp(2i\delta)\end{aligned}$$

- Potentiel de portée finie a : $\begin{cases} V(r) \neq 0 & \text{si } r < a \\ V(r) = 0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$

- la fonction d'onde radiale $R(r) = u(r)/r$ doit être continue et dérivable en $r=a$
- dérivée logarithmique en $r=a$

$$\begin{cases} u(r) = \text{sol. de l'éq. de Schrödinger} & \text{si } r < a \\ u(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{ik} [\eta \exp(ikr) - \exp(-ikr)] Y_0^0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

$$f = \left[r \frac{d}{dr} \log_e u(r) \right]_{r=a} = \left[\frac{r}{u(r)} \frac{du(r)}{dr} \right]_{r=a} \rightarrow \eta = \frac{f + ika}{f - ika} \exp(-2ika)$$

Description d'une résonance selon Wigner (2)

- Section efficace élastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta|^2 = \frac{\pi}{k^2} |A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}|^2$$

$$A_{\text{pot}} = \exp(2ika) - 1$$
$$A_{\text{res}} = \frac{-2ika}{f - ika}$$

amplitude potentielle
amplitude résonante

- cas particulier:

- diffusion à basse énergie ($ka \ll 1$)
sur une petite sphère « dure »
(ou « parfaitement réfléchissante »)

$$V(r) = \infty \text{ pour } r < a$$
$$u(r) = 0 \text{ pour } r < a$$
$$\Rightarrow f = \infty$$
$$\Rightarrow A_{\text{res}} = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(0)} = 4\pi a^2$$

- Section efficace inélastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta|^2) = \frac{\pi}{k^2} (1 - |1 - A_{\text{res}}|^2) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4ka \operatorname{Im} f}{|f - ika|^2} \quad \text{avec } \operatorname{Im} f \leq 0$$

$$\operatorname{Im} f = 0 \quad (f \text{ réel}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\text{inel}}^{(0)} = 0 \quad (\text{cas purement élastique})$$

Réaction quasi-purement inélastique ($\ell=0$)

- Pour un neutron incident, on peut supposer un puits de potentiel rectangulaire de profondeur V_0

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = T = \text{énergie cinétique du projectile loin du noyau}$$

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} = T + V_0 = \text{énergie cinétique du projectile dans le noyau}$$

- Si on admet que tout projectile en $r=a$ est absorbé, la fonction d'onde radiale dans le noyau est une onde sphérique entrante uniquement

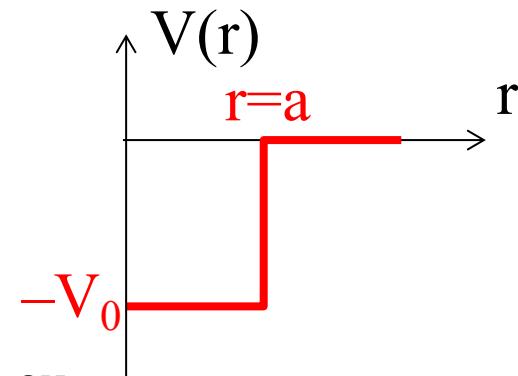
$$R(r) \propto \frac{\exp(-ikr)}{r} \text{ pour } r \leq a \Rightarrow f = -ika$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} = \frac{4\pi K}{k(k+K)^2}$$

monotone décroissante avec T

- pour un projectile très lent,
 $T \ll V_0$ et $k \ll K$:

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\text{vitesse du projectile}}$$



Réaction purement élastique ($\ell=0$)

- Si on admet que tout projectile arrivant en $r=a$ pénètre dans le noyau puis en ressort sans perdre d'énergie (diffusion élastique), la fonction d'onde radiale dans le noyau est

$$R(r) \propto \frac{\exp(i(Kr + 2\xi))}{r} - \frac{\exp(-iKr)}{r}$$

2ξ = déphasage de l'onde sortante par rapport à l'onde entrante

- La dérivée logarithmique f s'annule pour certaines valeurs de E

$$f = K a \cot(Ka + \xi) \text{ réel}$$

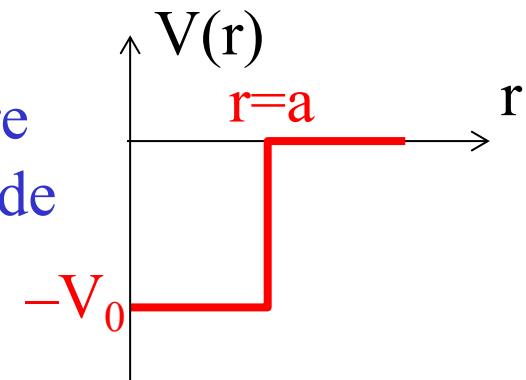
$$f(E_0) = 0 \Leftrightarrow \text{passage à la résonance d'énergie } E_0$$

car, si f est réel, $|A_{\text{res}}|^2$ est max. quand $f=0$

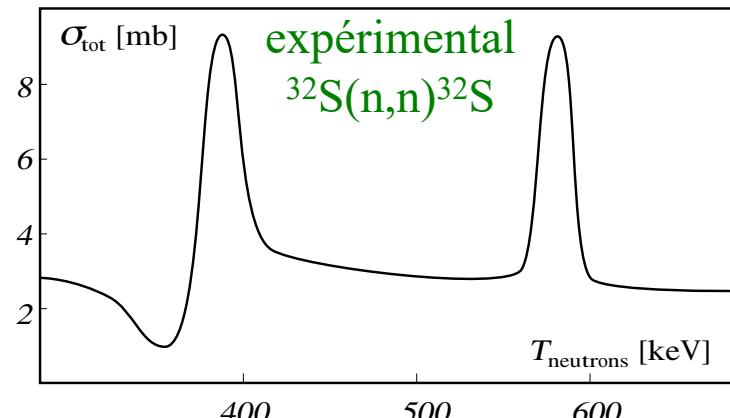
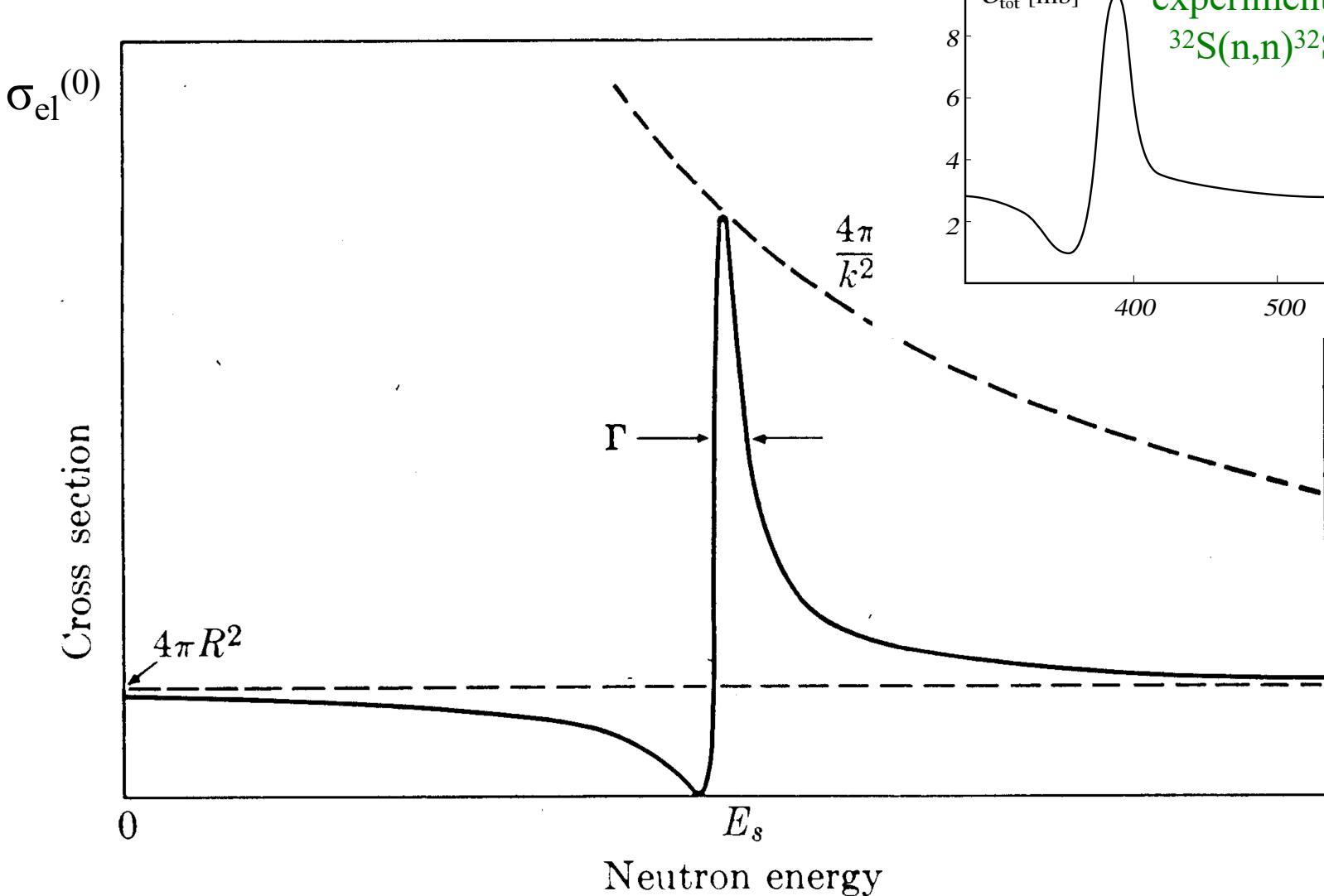
- Au voisinage de la résonance

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \left| \exp(2ika) - 1 + \frac{i\Gamma_{\text{el}}}{E - E_0 + i\Gamma/2} \right|^2$$

$$A_{\text{pot}} \quad A_{\text{res}}$$



Section efficace de diffusion élastique de neutrons au voisinage d'une résonance dans l'onde $\ell=0$



Diffusion élastique dans l'onde $\ell=0$ (diag. d'Argand)

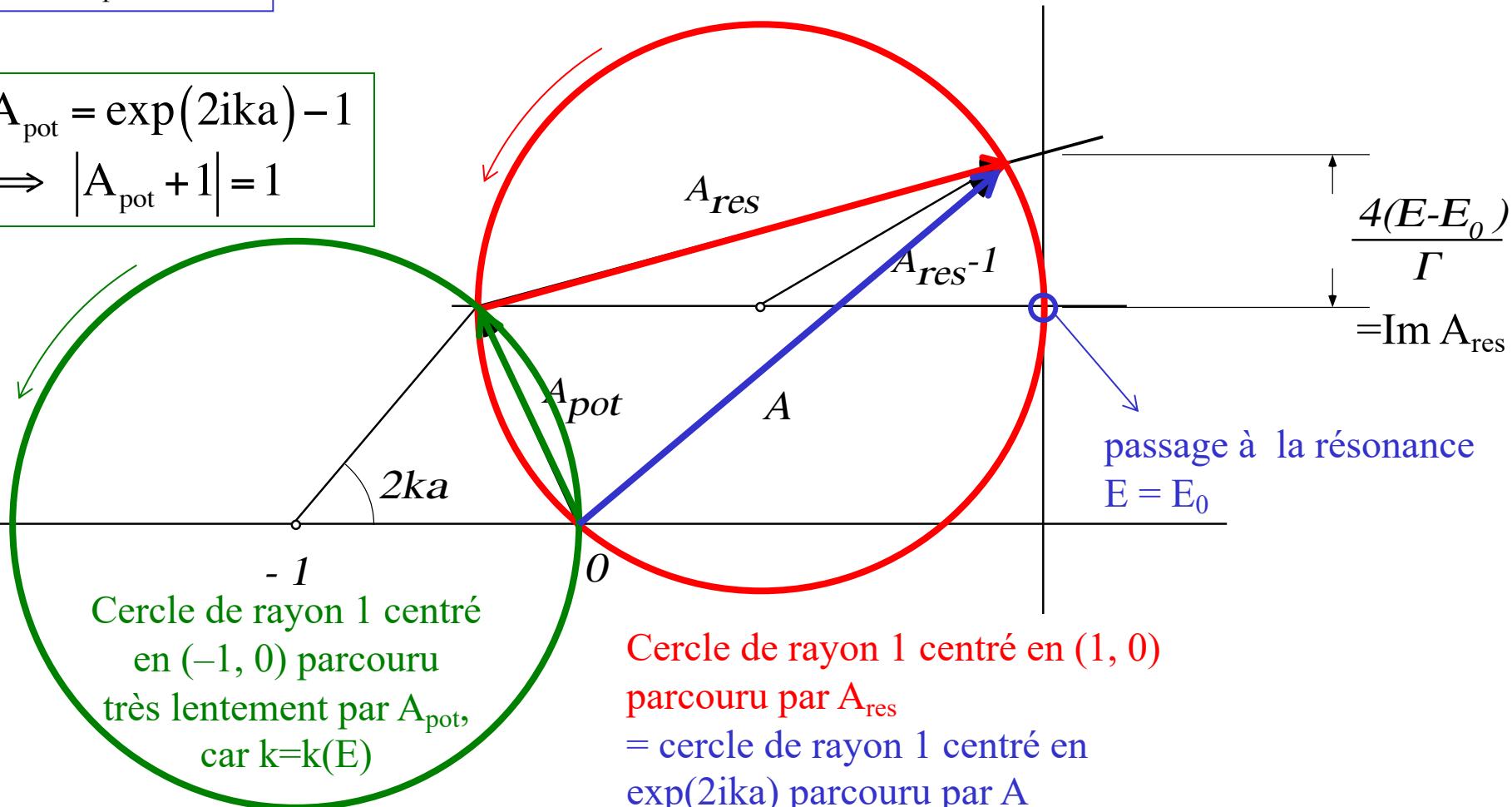
$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |A|^2$$

$$A = A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}$$

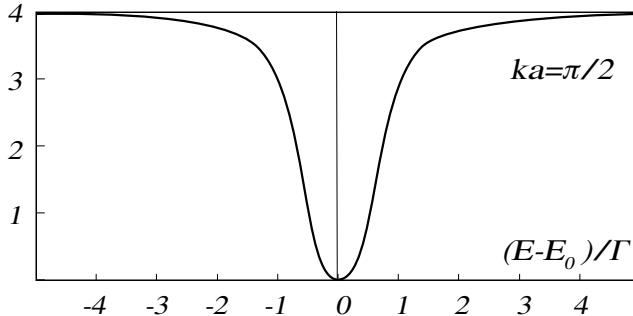
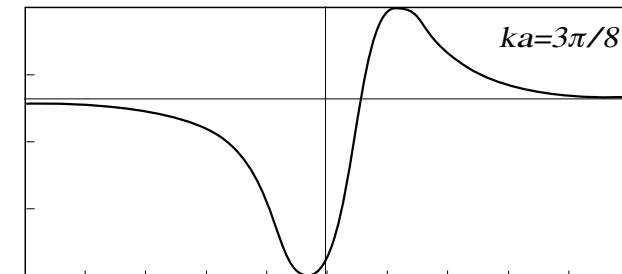
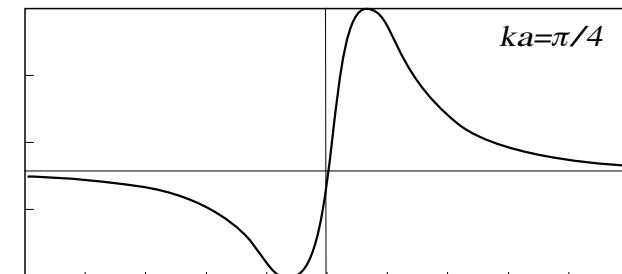
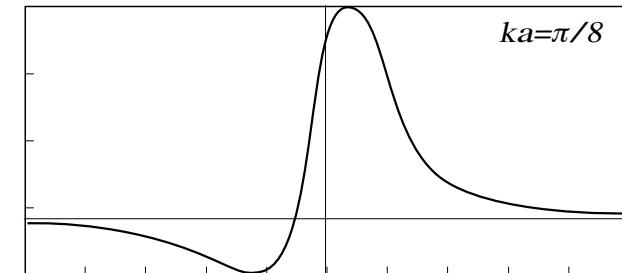
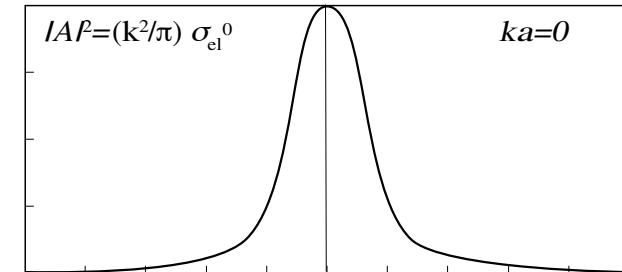
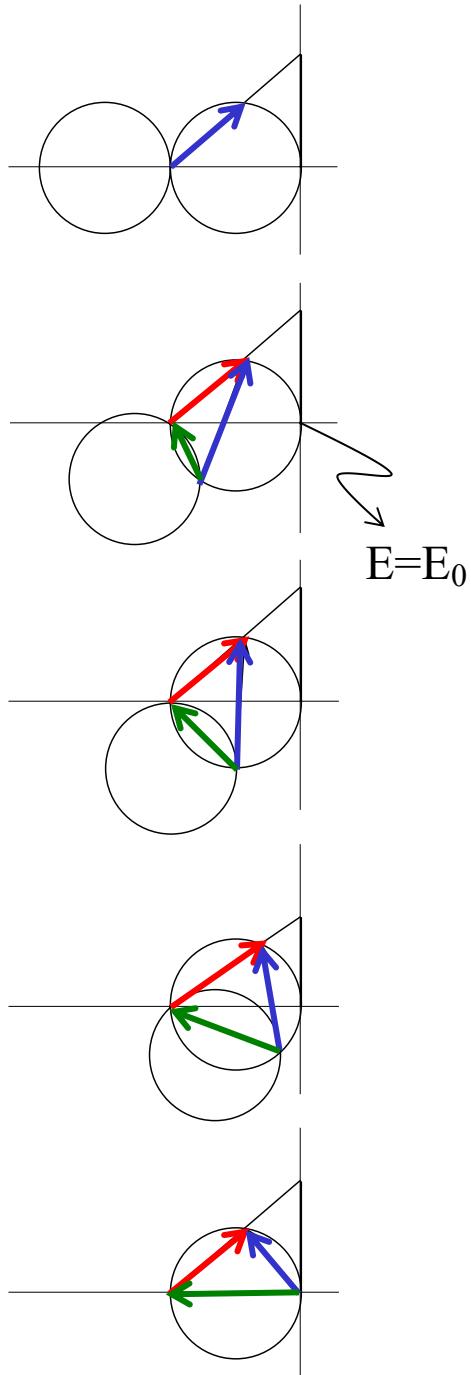
$$A_{\text{res}} = \frac{i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2} \Rightarrow |A_{\text{res}} - 1| = 1$$

$$A_{\text{pot}} = \exp(2ika) - 1$$

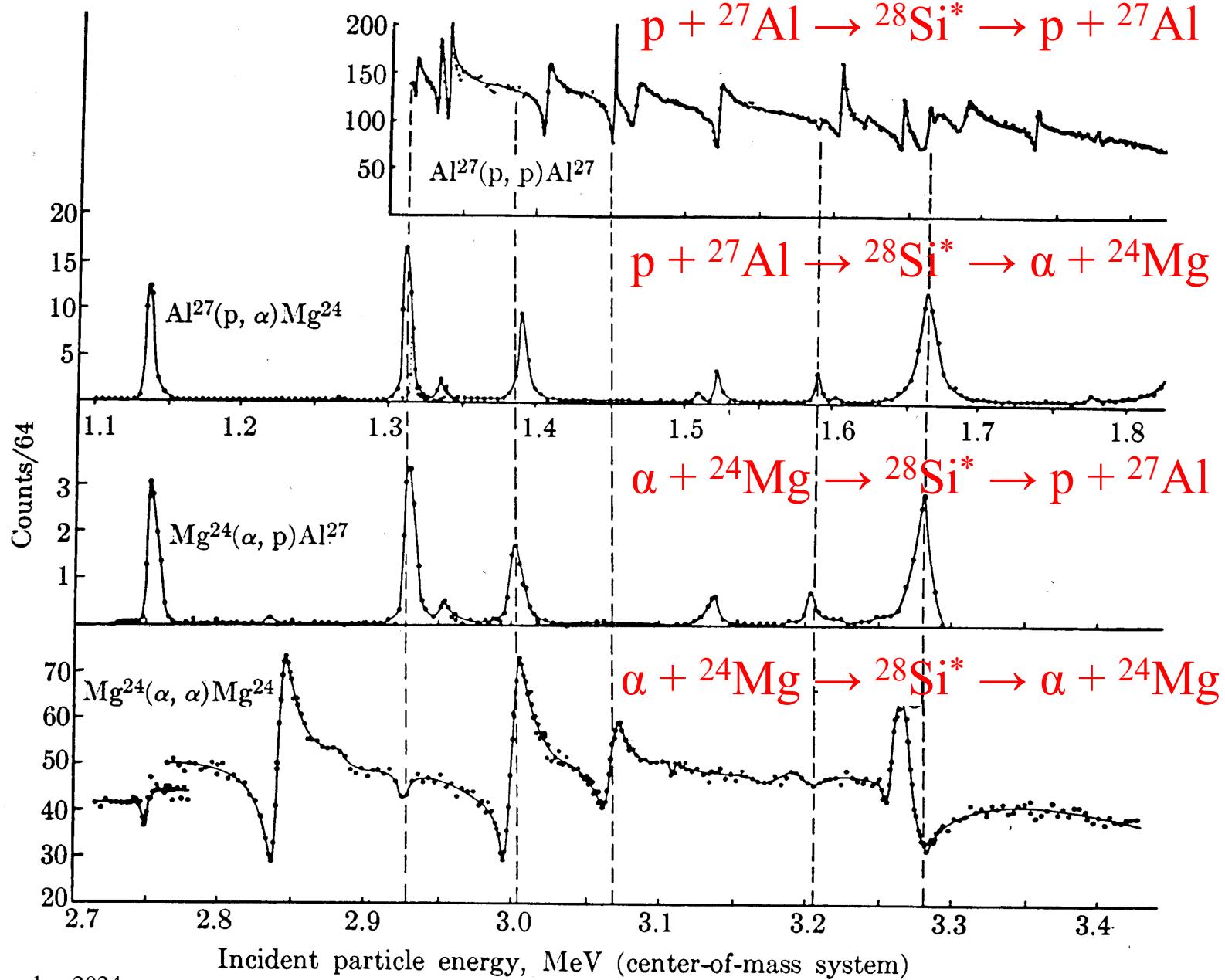
$$\Rightarrow |A_{\text{pot}} + 1| = 1$$



$$A = A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}$$



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si

