

Décomposition en ondes partielles (5)

- Section efficace élastique

$$\eta_\ell = 1 + 2i T_\ell \Leftrightarrow T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2$$

- Section efficace inélastique

$$\sigma_{\text{inel}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) (1 - |\eta_\ell|^2)$$

- Section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} + \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2} (2\ell + 1) (1 - \operatorname{Re}(\eta_\ell)) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \operatorname{Im}(T_\ell)$$

expressions invariantes sous $\eta_\ell \leftrightarrow \eta_\ell^*$ et $T_\ell \leftrightarrow -T_\ell^*$

Théorème optique

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(f(0))$$

σ_{tot} = section efficace totale

$f(0)$ = amplitude de diffusion élastique vers l'avant ($\theta = 0$)

k = nombre d'onde du projectile relativement à la cible

- Validité tout à fait générale

- Démonstration (exercice):

– évaluer $f(0)$ à partir de $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_\ell Y_\ell^0(\theta)$

puis utiliser $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \operatorname{Im}(T_\ell)$

Inelasticité et déphasage

- On pose

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell)$$

ρ_ℓ = inelasticité dans l'onde ℓ ($\rho_\ell \geq 0$)
 δ_ℓ = déphasage dans l'onde ℓ ($\delta_\ell \geq 0$)

- Propriétés:

– $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} \geq 0 \Rightarrow |\eta_\ell| = \rho_\ell \leq 1$

– cas purement élastique:

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0 \Leftrightarrow \rho_\ell = 1$$

– si $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} > 0$ alors $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} > 0$

– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0$ pour $\eta_\ell = +1$

– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_\ell = -1$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_\ell = 0$

η_ℓ	$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$
+1	0	0	0
-1	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$	0	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$
0	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)$

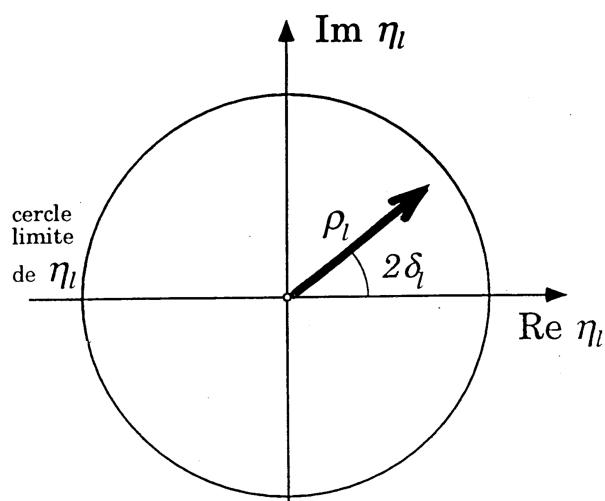
Rappel: $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)|1-\eta_\ell|^2$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-|\eta_\ell|^2)$, $\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-\text{Re}(\eta_\ell))$

OS, 11 décembre 2024

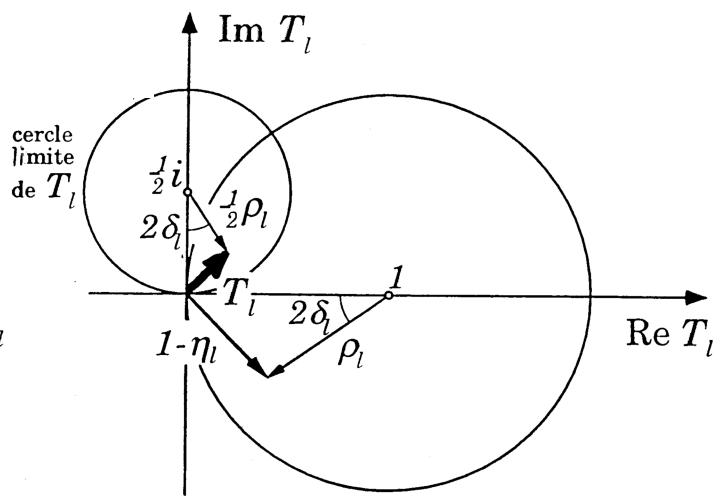
198

Diagrammes d'Argand

cercle limite \Leftrightarrow collisions purement élastiques



coefficient η_ℓ représenté dans le plan complexe



amplitude d'onde partielle T_ℓ représentée dans le plan complexe

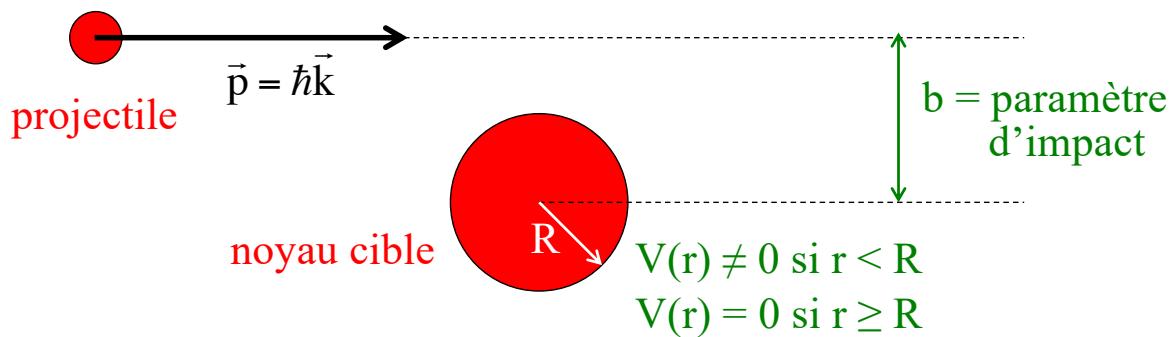
$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell)$$

$$\eta_\ell = 1 + 2iT_\ell \Leftrightarrow T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

OS, 11 décembre 2024

199

Intérêt du développement en ondes partielles (1)

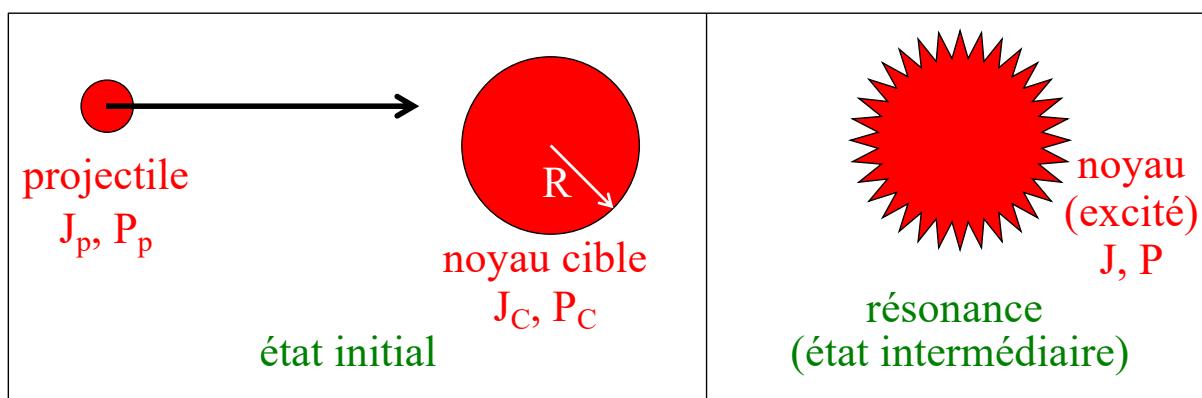


- Interaction uniquement si $b < R$,
c'est-à-dire si le moment cinétique $L = pb$ est tel que $L < pR$

- Seules les ondes partielles avec $\ell \leq \ell_{\max} = \frac{L_{\max}}{\hbar} = \frac{pR}{\hbar} = kR$ contribuent à la section efficace:

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}=kR} \sigma^{(\ell)}$$

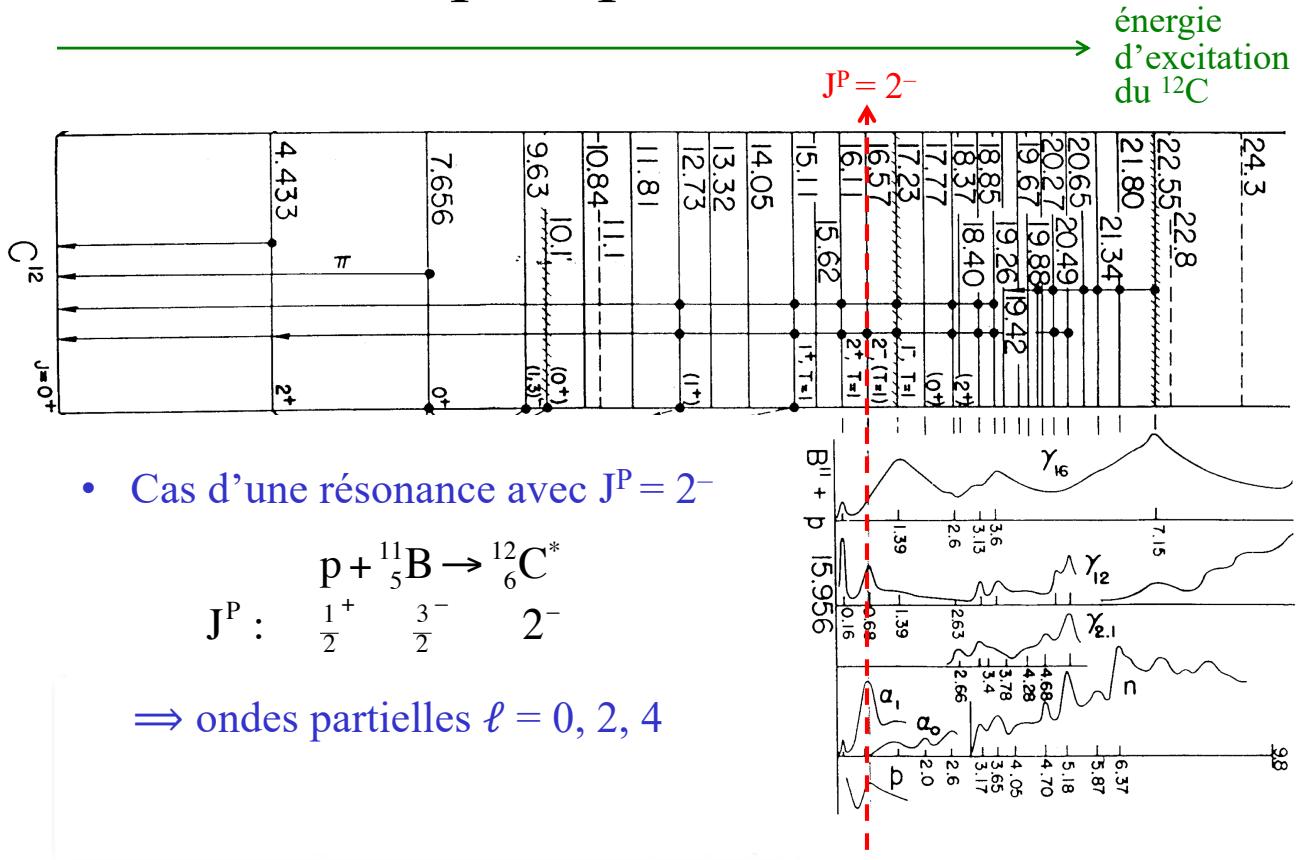
Intérêt du développement en ondes partielles (2)



- Souvent, un phénomène de résonance est observé (formation d'un état métastable composé de la cible et du projectile)
- La résonance a des nombres quantiques (spin J et parité P) définis
- Les lois de conservation restreignent les valeurs des ondes partielles ℓ contribuant à la formation de la résonance

$$\begin{aligned} \text{moment cinétique : } \vec{J} &= \vec{J}_p + \vec{J}_C + \vec{\ell} \\ \text{parité : } P &= P_p P_C (-1)^{\ell} \end{aligned}$$

Exemple: $p + {}^{11}B \rightarrow {}^{12}C^*$



Collisions purement élastiques

- Pour tout ℓ tel que $|\eta_\ell|=1$:

$$T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell) = \frac{i}{2}(1 - e^{2i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \frac{i}{2}(e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

NB: T_ℓ (donc δ_ℓ) et k dépendent de l'énergie totale E du système dans le centre de masse

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} \text{ passe par un maximum pour } \delta_\ell = \frac{\pi}{2} \text{ à une certaine énergie } E_0$$

- Développement limité autour de $E=E_0$, c'est-à-dire $\cotg \delta_\ell = 0$:

$$T_\ell = \frac{\sin \delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{1}{\cotg \delta_\ell - i} \approx \frac{1}{C(E - E_0) - i} \quad \text{où } C = \left. \frac{d(\cotg \delta_\ell(E))}{dE} \right|_{E=E_0}$$

$$|T_\ell|^2 \approx \frac{1}{C^2(E - E_0)^2 + 1} = \frac{1/C^2}{(E - E_0)^2 + 1/C^2} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

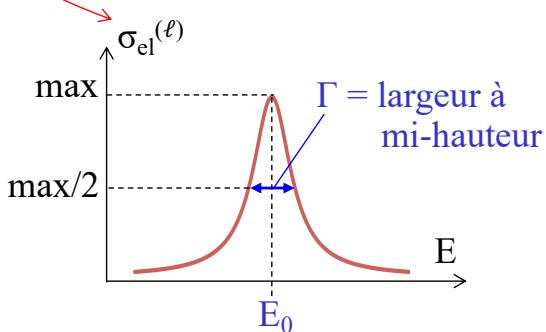
$$\text{où } \Gamma = \frac{2}{|C|}$$

Comportement au voisinage d'une résonance

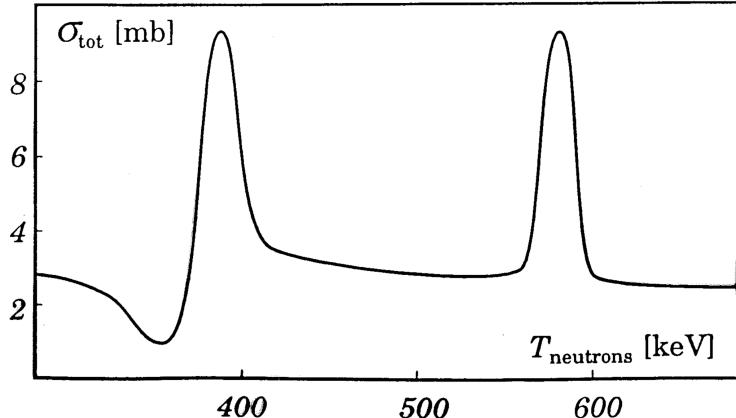
$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2 \quad \text{avec} \quad T_\ell \approx \frac{\Gamma/2}{(E - E_0) - i\Gamma/2} \quad \text{ou} \quad T_\ell \approx \frac{-\Gamma/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}}$$

courbe de Breit-Wigner



$$\tau = \hbar/\Gamma = \text{durée de vie moyenne}$$

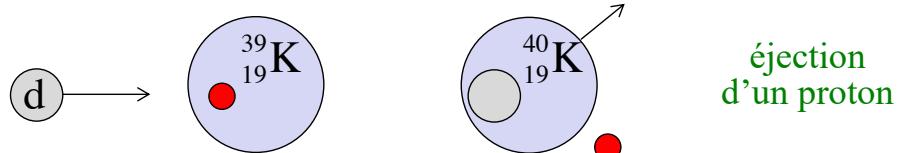


Résonances observées dans la diffusion élastique ${}^{32}\text{S}(\text{n},\text{n}){}^{32}\text{S}$

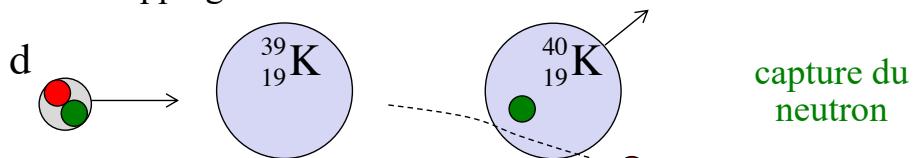
Description des réactions nucléaires

- Exemple: $\text{d} + {}^{39}\text{K} \rightarrow \text{p} + {}^{40}\text{K}$
 - que se passe-t-il au juste au cours de cette réaction ?
- Trois points de vue extrêmes:

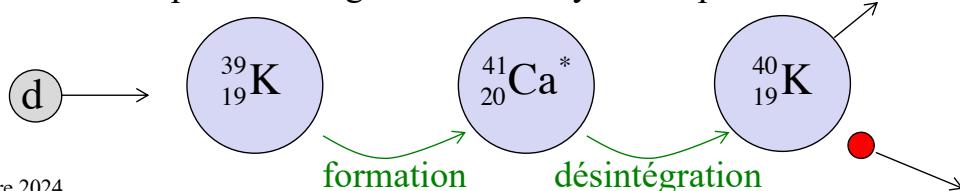
① Réaction directe de « knock-out »



② Réaction directe de « stripping »



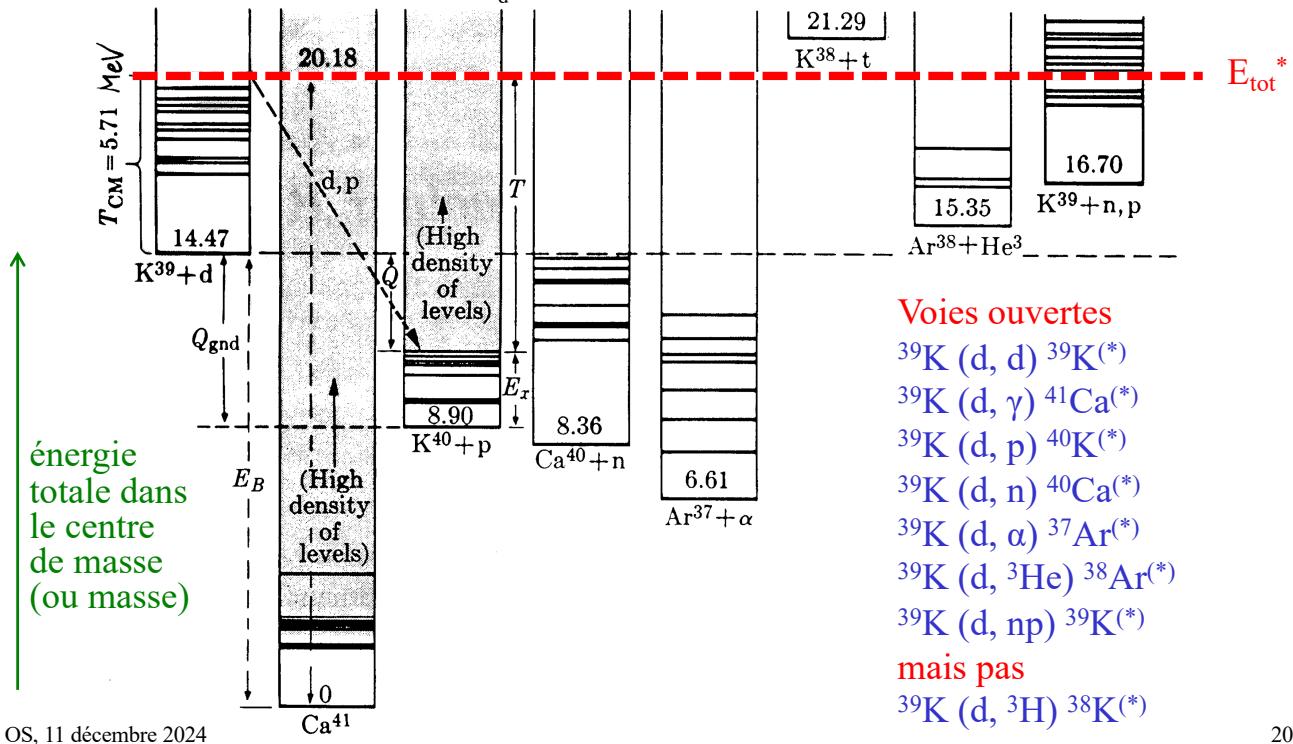
③ Formation puis désintégration d'un noyau composé



Modes de partition du $^{41}\text{Ca}^*$

formé par la réaction $\text{d} + {}^{39}\text{K} \rightarrow {}^{41}\text{Ca}^*$ avec $T_{\text{d}}=6 \text{ MeV}$

$$T_{\text{CM}} = T_{\text{d}} + T_{{}^{39}\text{K}}^* = \frac{1}{2} \mu v_{\text{d}}^2 = \frac{\mu}{m_{\text{d}}} T_{\text{d}} = 5.71 \text{ MeV}$$

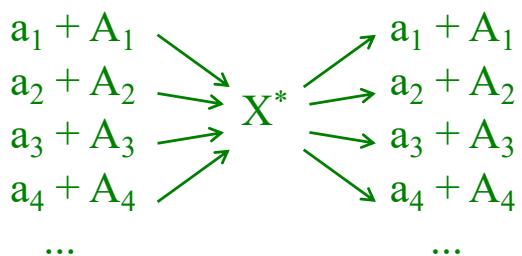


206

Modèle du noyau composé (1)

N. Bohr (1936)

- Résonance X^*
 - pouvant se former et se désintégrer dans plusieurs canaux
 - de largeur à mi-hauteur Γ



- Hypothèse du modèle: $\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma_i F_j$

$$\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma(a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j) = \text{section efficace de la réaction } a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$$

$$\sigma_i = \sigma(a_i + A_i \rightarrow X^*) = \text{section efficace de formation de } X^* \text{ par le canal } i$$

$F_j = \text{probabilité de désintégration de } X^* \text{ dans le canal } j$

$$\sum_j F_j = 1$$

- On définit la largeur partielle Γ_j dans le canal j

$$\Gamma_j = F_j \Gamma \quad \text{avec} \quad \sum_j \Gamma_j = \Gamma$$

Modèle du noyau composé (2)

- Réactions inverses l'une de l'autre
 - $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$, de section efficace $\sigma_{i \rightarrow j}$
 - k_i = nombre d'onde du projectile a_i par rapport à la cible A_i
 - $a_j + A_j \rightarrow a_i + A_i$, de section efficace $\sigma_{j \rightarrow i}$
 - k_j = nombre d'onde du projectile a_j par rapport à la cible A_j
- Théorème (démontrable en mécanique quantique)
 - pour une même énergie totale E $k_i^2 \sigma_{i \rightarrow j} = k_j^2 \sigma_{j \rightarrow i}$ relation du bilan détaillé
- On a ainsi

$$k_i^2 \sigma_i F_j = k_j^2 \sigma_j F_i \Rightarrow \frac{k_i^2 \sigma_i}{F_i} = \frac{k_j^2 \sigma_j}{F_j} = C(E) = \text{fonction de } E \text{ indépendante de } i \text{ ou } j$$

$$\sigma_{i \rightarrow j}(E) = \sigma_i(E) F_j = \frac{C(E) F_i}{k_i^2(E)} F_j = \frac{1}{k_i^2(E)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma^2} C(E)$$
 - Cas d'une résonance dans l'onde ℓ avec un seul mode de désintégration (donc d'une diffusion élastique avec $F_1=1$, $\Gamma_1=\Gamma$, $k_1=k$):
$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)}(E) = \sigma_{el}^{(\ell)}(E) = \frac{1}{k_i^2} C(E) \Rightarrow C(E) = \pi (2\ell+1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

Modèle du noyau composé (3)

- Pour une résonance formée dans l'onde ℓ

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} (2\ell+1) \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

 - valable dans le cas particulier d'une résonance de spin ℓ formée dans le canal i à l'aide d'un projectile de spin 0 sur une cible de spin 0 et se désintégrant dans le canal j
- Cas plus général tenant compte des spins

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} \frac{(2J+1)}{(2S_i+1)(2S_i+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

 - où $\vec{J} = \vec{s}_i + \vec{S}_i + \vec{\ell}$
 - \vec{J} = spin de la résonance X^*
 - \vec{s}_i = spin du projectile a_i
 - \vec{S}_i = spin de la cible A_i
 - valable dans le cas où les particules de l'état initial ne sont pas polarisées et où on ne mesure pas l'état de spin dans l'état final