

# Décomposition en ondes partielles (5)

- Section efficace élastique

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) |1 - \eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_{\ell}|^2$$

- Section efficace inélastique

$$\sigma_{\text{inel}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left(1 - |\eta_{\ell}|^2\right)$$

- Section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} + \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left(1 - \text{Re}(\eta_{\ell})\right) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \text{Im}(T_{\ell})$$

**expressions invariantes sous  $\eta_{\ell} \leftrightarrow \eta_{\ell}^*$  et  $T_{\ell} \leftrightarrow -T_{\ell}^*$**

# Théorème optique

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

$\sigma_{\text{tot}}$  = section efficace totale

$f(0)$  = amplitude de diffusion élastique vers l'avant ( $\theta = 0$ )

$k$  = nombre d'onde du projectile relativement à la cible

- **Validité tout à fait générale**
- **Démonstration (exercice):**
  - évaluer  $f(0)$  à partir de  $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_{\ell} Y_{\ell}^0(\theta)$   
puis utiliser  $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \text{Im}(T_{\ell})$

# Inelasticité et déphasage

- On pose

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell)$$

$\rho_\ell$  = inelasticité dans l'onde  $\ell$  ( $\rho_\ell \geq 0$ )  
 $\delta_\ell$  = déphasage dans l'onde  $\ell$  ( $\delta_\ell \geq 0$ )

- Propriétés:

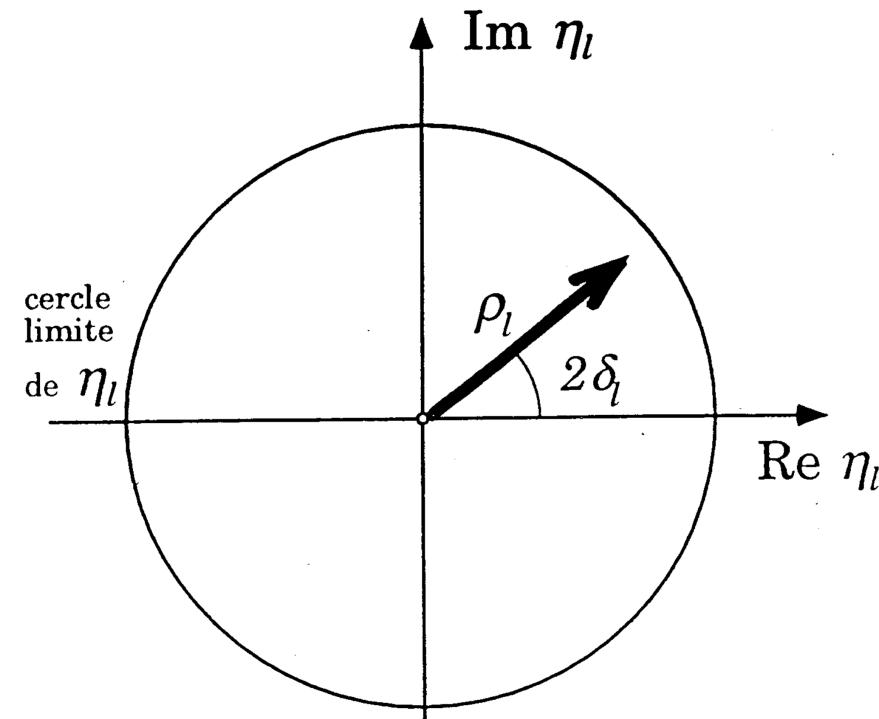
- $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} \geq 0 \Rightarrow |\eta_\ell| = \rho_\ell \leq 1$
- cas purement élastique:  
 $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0 \Leftrightarrow \rho_\ell = 1$
- si  $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} > 0$  alors  $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} > 0$
- $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0$  pour  $\eta_\ell = +1$
- $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$  maximale pour  $\eta_\ell = -1$ ,  $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$  maximale pour  $\eta_\ell = 0$

$\eta_\ell$	$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$
+1	0	0	0
-1	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$	0	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$
0	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)$

Rappel:  $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)|1-\eta_\ell|^2$ ,  $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-|\eta_\ell|^2)$ ,  $\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-\text{Re}(\eta_\ell))$

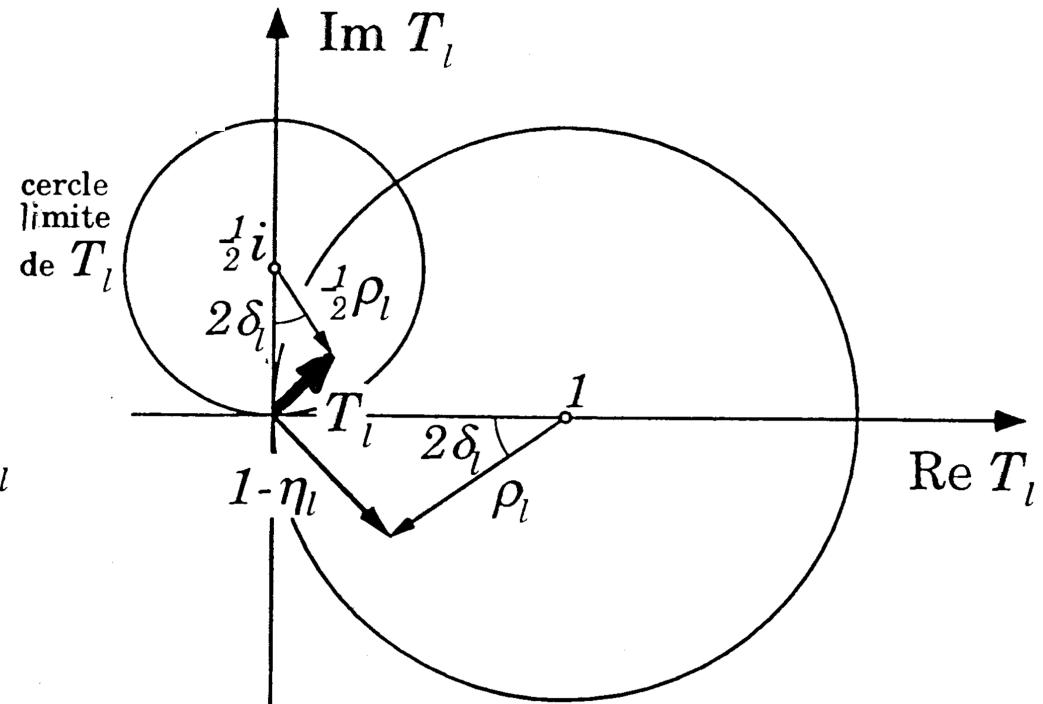
# Diagrammes d'Argand

cercle limite  $\Leftrightarrow$  collisions purement élastiques



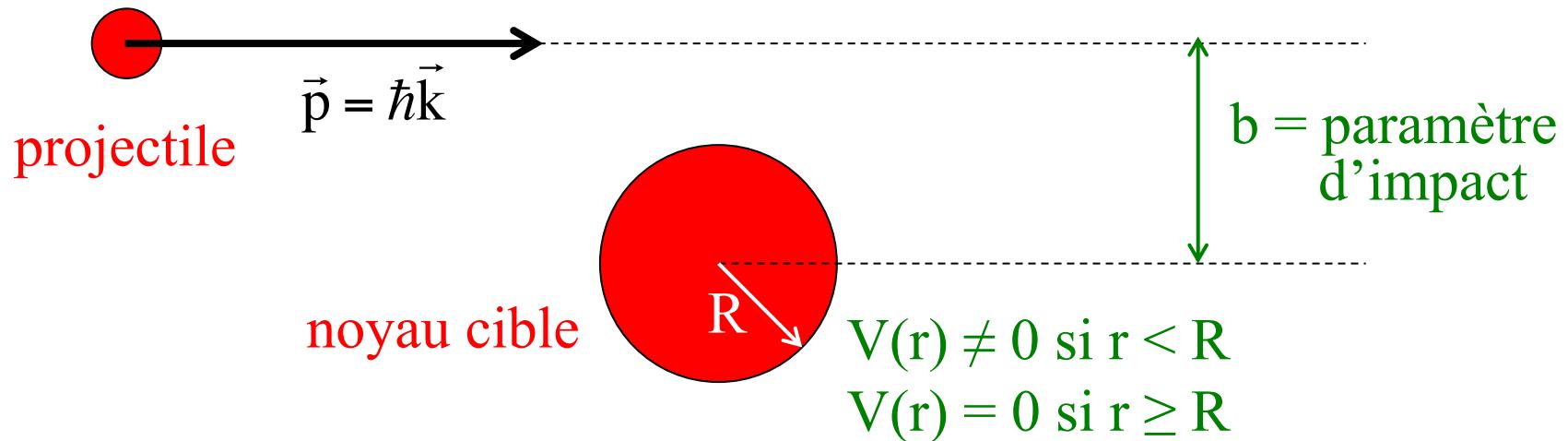
coefficient  $\eta_\ell$  représenté dans le plan complexe

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell) \quad \eta_\ell = 1 + 2i T_\ell \Leftrightarrow T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$



amplitude d'onde partielle  $T_\ell$  représentée dans le plan complexe

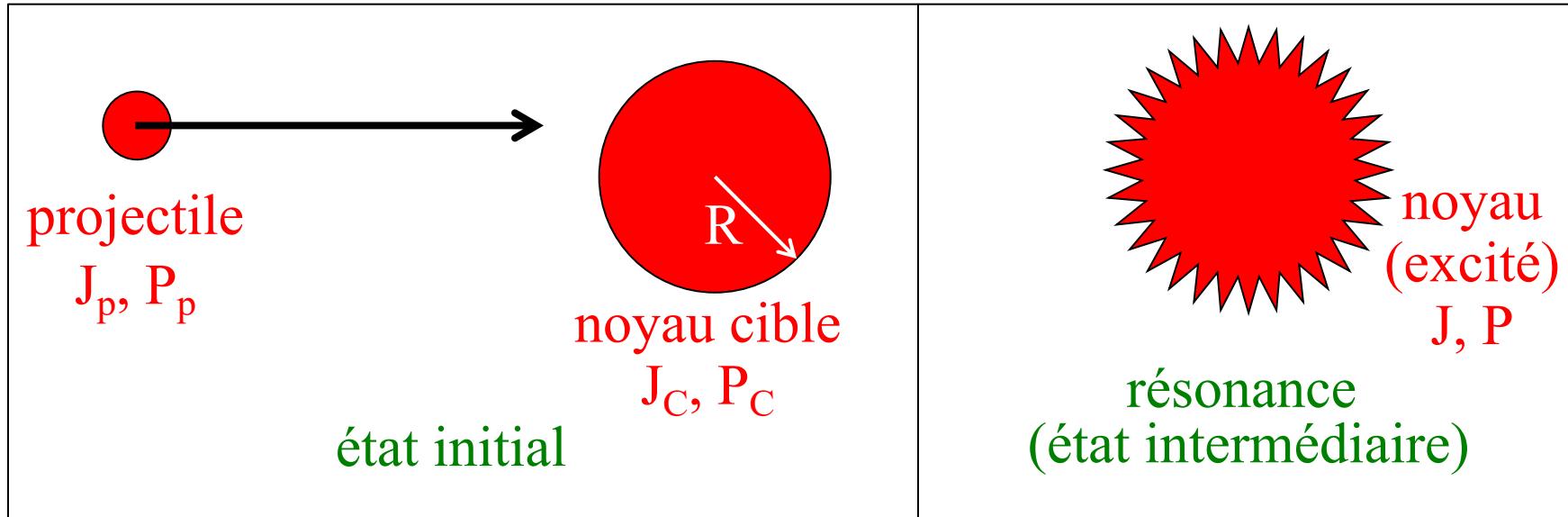
# Intérêt du développement en ondes partielles (1)



- Interaction uniquement si  $b < R$ ,  
c'est-à-dire si le moment cinétique  $L = pb$  est tel que  $L < pR$
- Seules les ondes partielles avec  $\ell \leq \ell_{\max} = \frac{L_{\max}}{\hbar} = \frac{pR}{\hbar} = kR$  contribuent à la section efficace:

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}=kR} \sigma^{(\ell)}$$

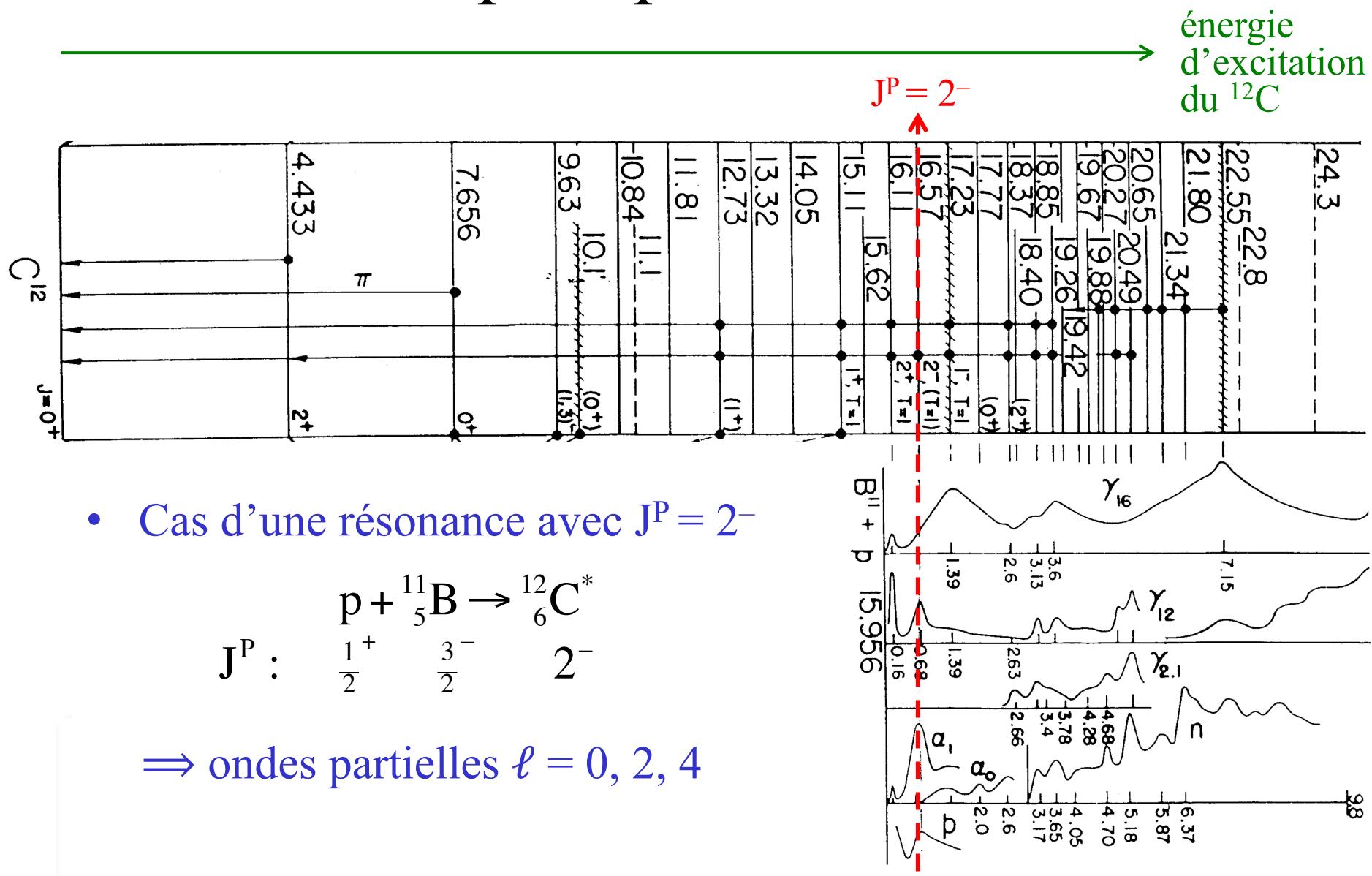
# Intérêt du développement en ondes partielles (2)



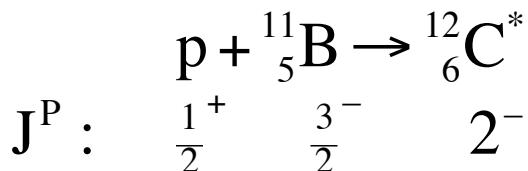
- Souvent, un phénomène de résonance est observé (formation d'un état métastable composé de la cible et du projectile)
- La résonance a des nombres quantiques (spin  $J$  et parité  $P$ ) définis
- Les lois de conservation restreignent les valeurs des ondes partielles  $\ell$  contribuant à la formation de la résonance

$$\text{moment cinétique : } \vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_C + \vec{\ell}$$
$$\text{parité : } P = P_p P_C (-1)^\ell$$

## Exemple: $p + {}^{11}B \rightarrow {}^{12}C^*$



- Cas d'une résonance avec  $J^P = 2^-$



⇒ ondes partielles  $\ell = 0, 2, 4$

# Collisions purement élastiques

- Pour tout  $\ell$  tel que  $|\eta_\ell|=1$ :

$$T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell) = \frac{i}{2}(1 - e^{2i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \frac{i}{2}(e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

NB:  $T_\ell$  (donc  $\delta_\ell$ ) et  $k$  dépendent de l'énergie totale  $E$  du système dans le centre de masse

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} \text{ passe par un maximum pour } \delta_\ell = \frac{\pi}{2} \text{ à une certaine énergie } E_0$$

- Développement limité autour de  $E=E_0$ , c'est-à-dire  $\cotg \delta_\ell=0$ :

$$T_\ell = \frac{\sin \delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{1}{\cotg \delta_\ell - i} \approx \frac{1}{C(E - E_0) - i}$$

$$\text{ où } C = \left. \frac{d(\cotg \delta_\ell(E))}{dE} \right|_{E=E_0}$$

$$|T_\ell|^2 \approx \frac{1}{C^2(E - E_0)^2 + 1} = \frac{1/C^2}{(E - E_0)^2 + 1/C^2} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

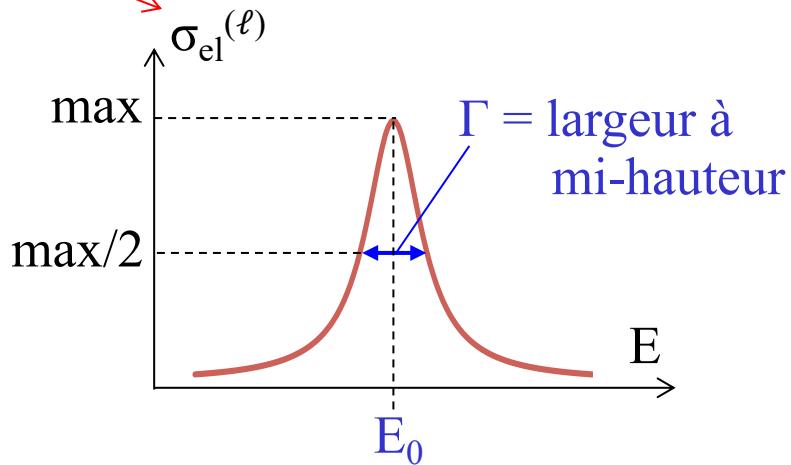
$$\text{ où } \Gamma = \frac{2}{|C|}$$

# Comportement au voisinage d'une résonance

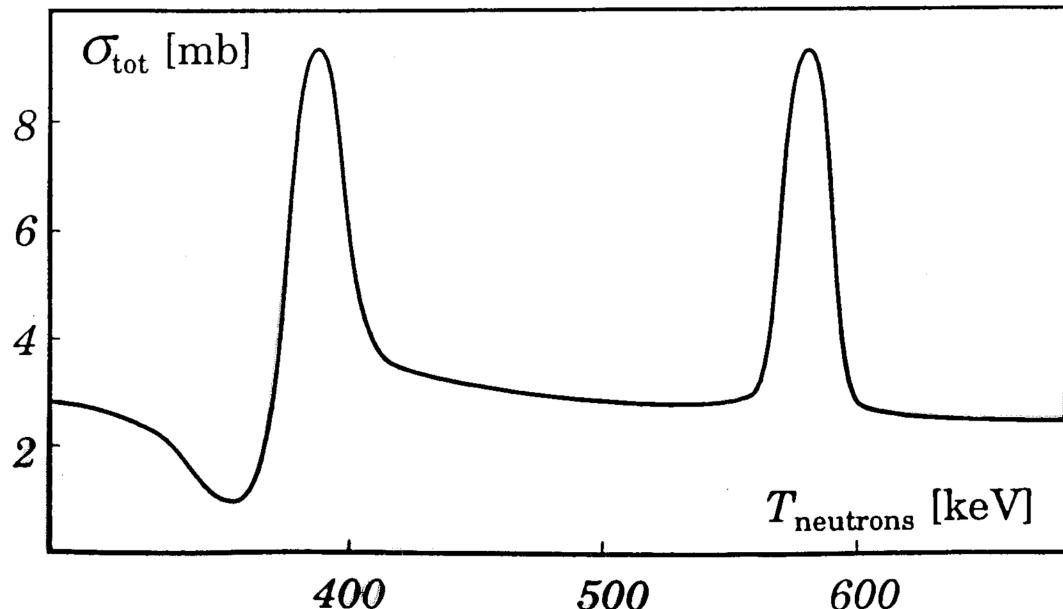
$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2 \quad \text{avec} \quad T_\ell \approx \frac{\Gamma/2}{(E - E_0) - i\Gamma/2} \quad \text{ou} \quad T_\ell \approx \frac{-\Gamma/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

courbe de Breit-Wigner



$$\tau = \hbar/\Gamma = \text{durée de vie moyenne}$$

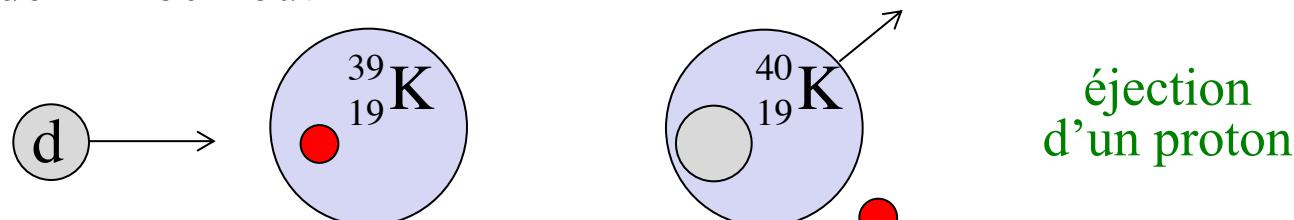


Résonances observées dans la diffusion élastique  ${}^{32}\text{S}(\text{n},\text{n}){}^{32}\text{S}$

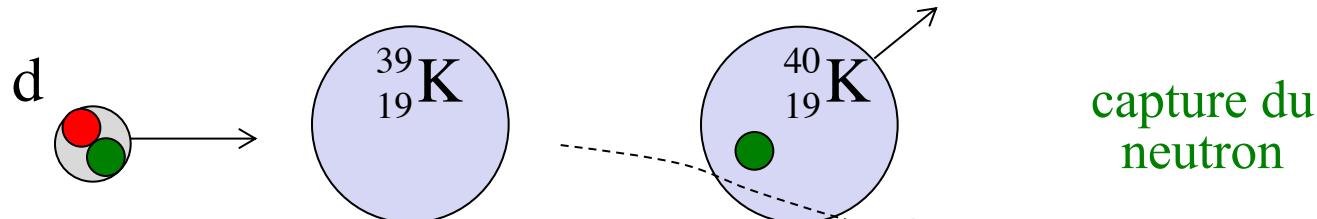
# Description des réactions nucléaires

- Exemple:  $d + {}^{39}\text{K} \rightarrow p + {}^{40}\text{K}$ 
  - que se passe-t-il au juste au cours de cette réaction ?
- Trois points de vue extrêmes:

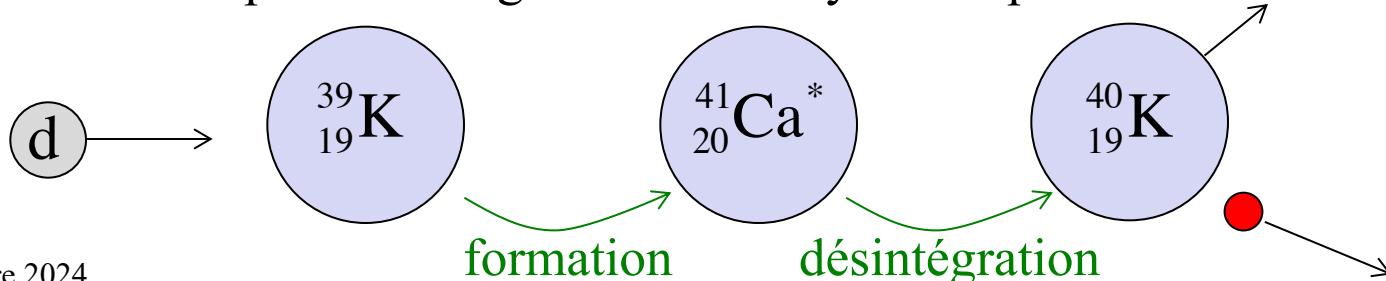
- ① Réaction directe de « knock-out »



- ② Réaction directe de « stripping »



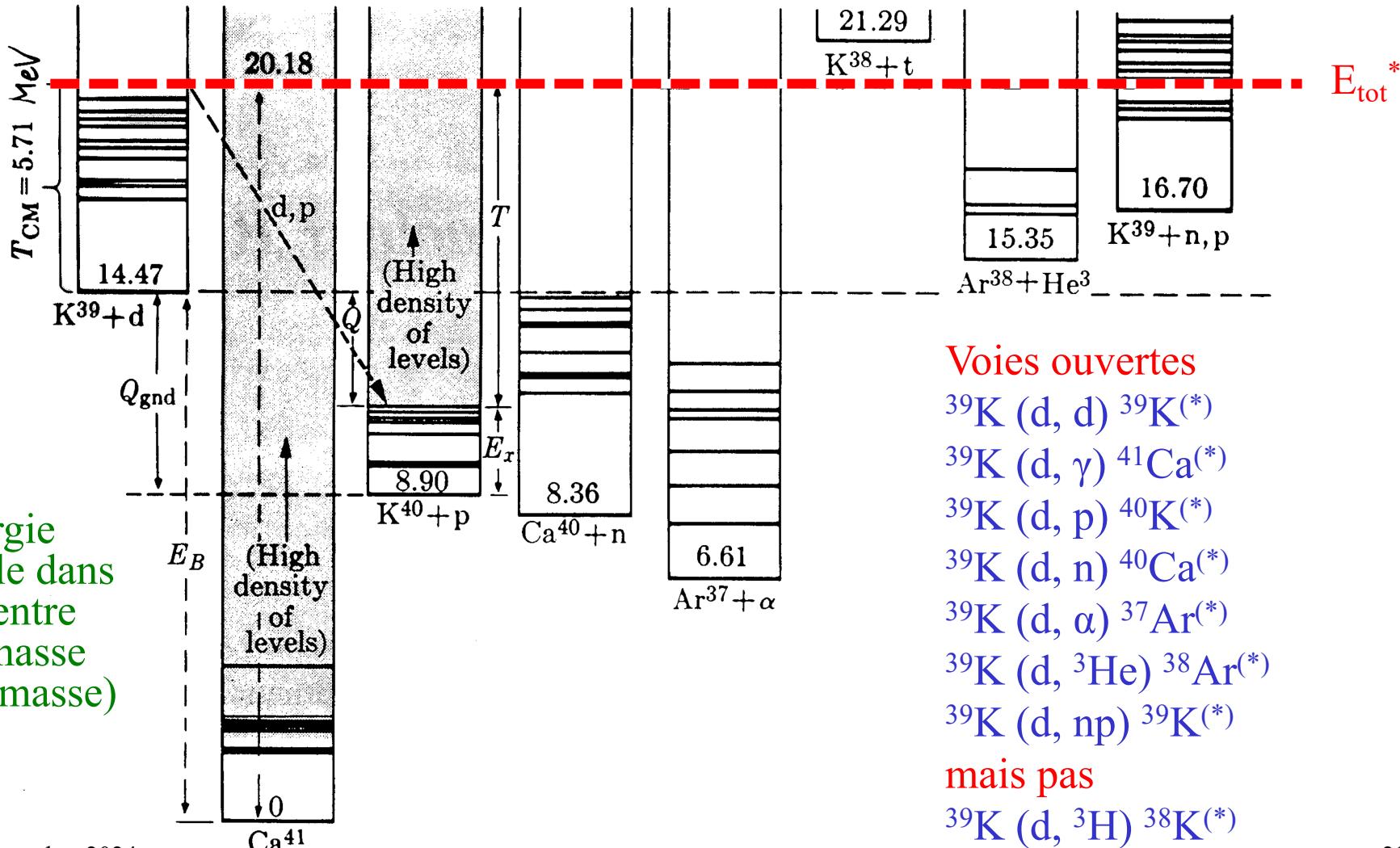
- ③ Formation puis désintégration d'un noyau composé



# Modes de partition du $^{41}\text{Ca}^*$

formé par la réaction  $\text{d} + {}^{39}\text{K} \rightarrow {}^{41}\text{Ca}^*$  avec  $T_{\text{d}}=6 \text{ MeV}$

$$T_{\text{CM}} = T_{\text{d}} + T_{{}^{39}\text{K}}^* = \frac{1}{2} \frac{\mu}{m_{\text{d}}} v_{\text{d}}^2 = 5.71 \text{ MeV}$$

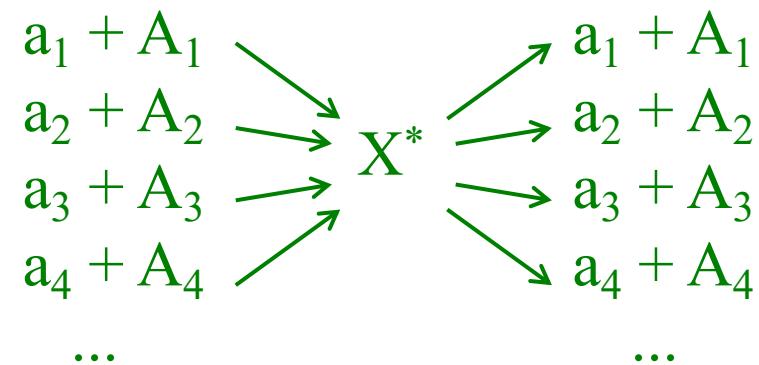


# Modèle du noyau composé (1)

N. Bohr (1936)

- Résonance  $X^*$

- pouvant se former et se désintégrer dans plusieurs canaux
- de largeur à mi-hauteur  $\Gamma$



- Hypothèse du modèle:

$$\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma_i F_j$$

$\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma(a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j) =$  section efficace de la réaction  $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$

$\sigma_i = \sigma(a_i + A_i \rightarrow X^*) =$  section efficace de formation de  $X^*$  par le canal i

$F_j =$  probabilité de désintégration de  $X^*$  dans le canal j

$$\sum_j F_j = 1$$

- On définit la largeur partielle  $\Gamma_j$  dans le canal j

$$\Gamma_j = F_j \Gamma \quad \text{avec} \quad \sum_j \Gamma_j = \Gamma$$

# Modèle du noyau composé (2)

- Réactions inverses l'une de l'autre
  - $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$ , de section efficace  $\sigma_{i \rightarrow j}$ 
    - $k_i$  = nombre d'onde du projectile  $a_i$  par rapport à la cible  $A_i$
  - $a_j + A_j \rightarrow a_i + A_i$ , de section efficace  $\sigma_{j \rightarrow i}$ 
    - $k_j$  = nombre d'onde du projectile  $a_j$  par rapport à la cible  $A_j$
- Théorème (démontrable en mécanique quantique)
  - pour une même énergie totale  $E$  dans le centre de masse:

$k_i^2 \sigma_{i \rightarrow j} = k_j^2 \sigma_{j \rightarrow i}$

 relation du bilan détaillé

- On a ainsi

$$k_i^2 \sigma_i F_j = k_j^2 \sigma_j F_i \Rightarrow \frac{k_i^2 \sigma_i}{F_i} = \frac{k_j^2 \sigma_j}{F_j} = C(E) = \text{fonction de } E \text{ indépendante de } i \text{ ou } j$$

$$\sigma_{i \rightarrow j}(E) = \sigma_i(E) F_j = \frac{C(E) F_i}{k_i^2(E)} F_j = \frac{1}{k_i^2(E)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma^2} C(E)$$

- Cas d'une résonance dans l'onde  $\ell$  avec un seul mode de désintégration (donc d'une diffusion élastique avec  $F_1=1$ ,  $\Gamma_1=\Gamma$ ,  $k_1=k$ ):

$$\sigma_{1 \rightarrow 1}^{(\ell)}(E) = \sigma_{el}^{(\ell)}(E) = \frac{1}{k^2} C(E) \Rightarrow C(E) = \pi (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

# Modèle du noyau composé (3)

- Pour une résonance formée dans l'onde  $\ell$

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



- valable dans le cas particulier d'une résonance de spin  $\ell$  formée dans le canal i à l'aide d'un projectile de spin 0 sur une cible de spin 0 et se désintégrant dans le canal j

- Cas plus général tenant compte des spins

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} \frac{(2J+1)}{(2s_i+1)(2S_i+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

où  $\vec{J} = \vec{s}_i + \vec{S}_i + \vec{\ell}$

$\vec{J}$  = spin de la résonance  $X^*$   
 $\vec{s}_i$  = spin du projectile  $a_i$   
 $\vec{S}_i$  = spin de la cible  $A_i$

- valable dans le cas où les particules de l'état initial ne sont pas polarisées et où on ne mesure pas l'état de spin dans l'état final