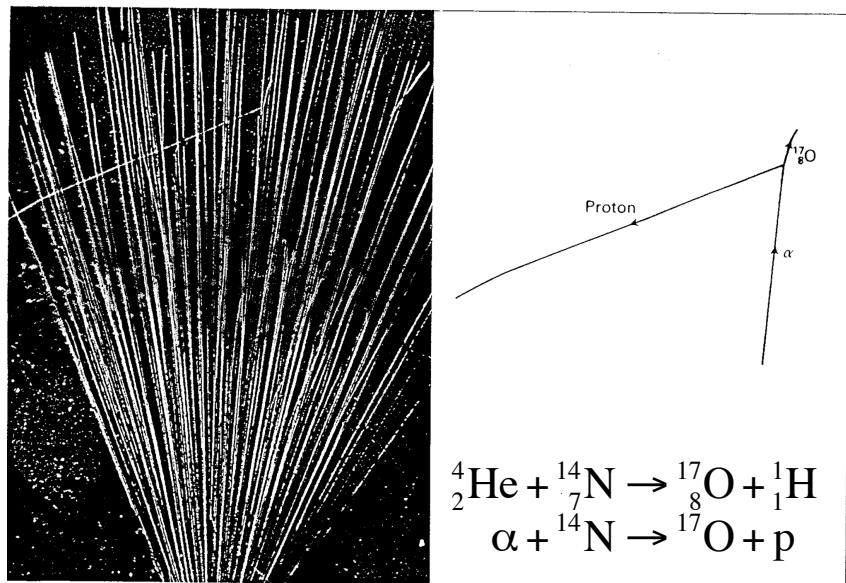


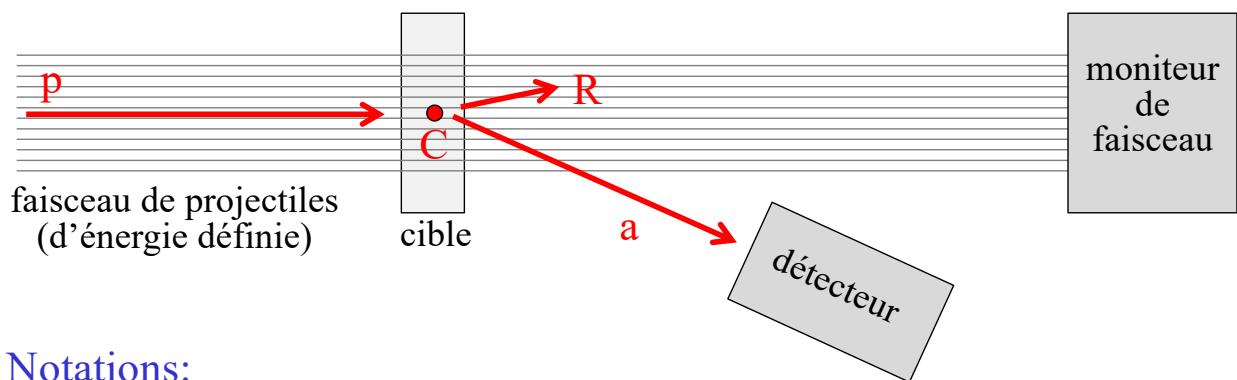
Dernier chapitre : réactions nucléaires

- Sommaire
 - Introduction
 - Cinématique non-relativiste
 - Description quantique de la diffusion
 - Résonances
 - Modèle du noyau composé de Bohr



Première réaction nucléaire
observée en 1919 par Rutherford
(et photographiée en 1925 par Blackett
avec une chambre à brouillard)

Réactions nucléaires



- Notations:

$$\boxed{\mathbf{p} + \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{R}} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\mathbf{C(p,a)R}}$$

\mathbf{p} = projectile (noyau, pion, électron, ...), $E > 1$ MeV si chargé positivement

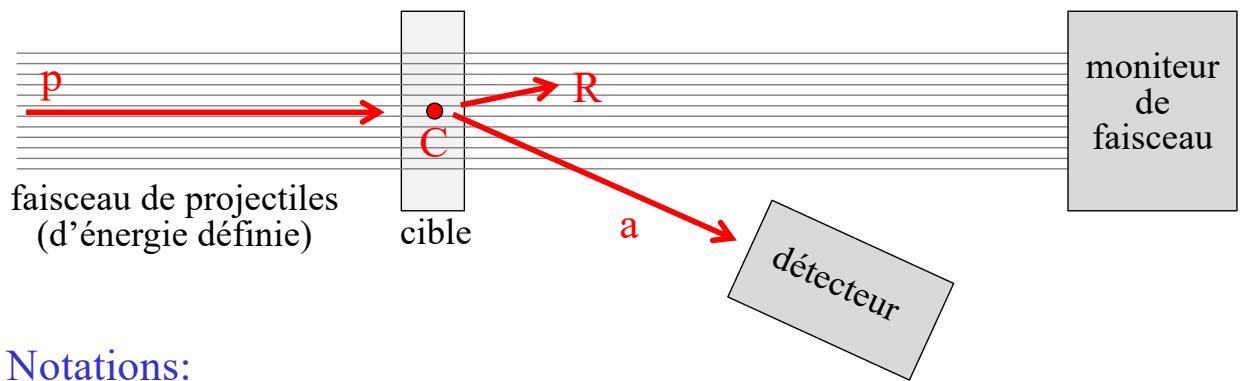
\mathbf{C} = cible (noyau au repos)

\mathbf{a} = particule détectée

\mathbf{R} = noyau de recul

- exemple: ${}^{14}\text{N}(\alpha, p){}^{17}\text{O}$

Réactions nucléaires



- Notations:



p = projectile (noyau, pion, électron, ...), $E > 1$ MeV si chargé positivement

C = cible (noyau au repos)

a = particule détectée

R = noyau de recul

– exemples: $^{14}_7N(\alpha, p)^{17}_8O$

$^{9}_4Be(\alpha, n)^{12}_6C$

Réactions nucléaires: définitions

- Energie libérée dans une réaction:

$$Q = (m_p + m_C - m_a - m_R)c^2 = T_a + T_R - T_p$$

- Réaction exoergique $\Leftrightarrow Q > 0$

- Réaction endoergique $\Leftrightarrow Q < 0$

- seuil d'une réaction:

$$T_p > T_{\text{seuil}} = -Q \left(1 + \frac{m_p}{m_C} \right)$$

- Diffusion:

- réaction où on retrouve le projectile dans l'état final par ex. $^{7}Li(p, pT)^{4}He$

- Diffusion élastique ($\Rightarrow Q = 0$)

- réaction où les particules finales sont les mêmes que les particules initiales (et dans le même état d'énergie interne)

par ex. $^{12}C(n, n)^{12}C$

- Diffusion inélastique

par ex. $^{12}C(n, n)^{12}C^*$

- Réaction nucléaire (sans diffusion)

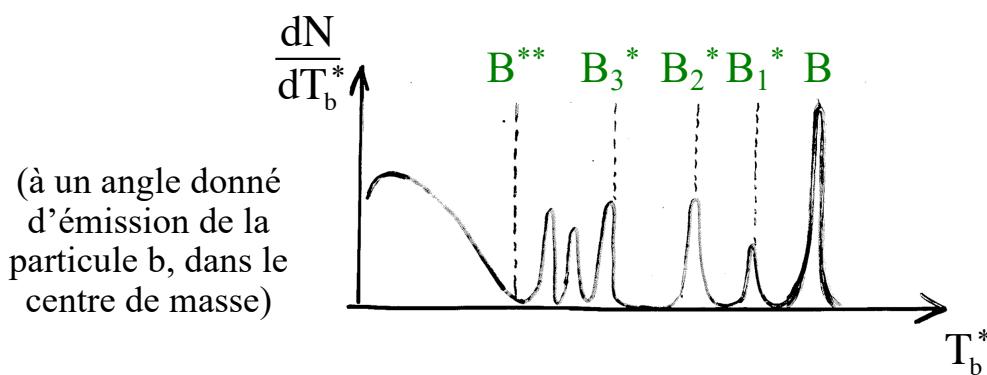
par ex. $^{9}Be(\alpha, n)^{12}C$

Qu'apprend-on en étudiant les réactions nucléaires ?

- Masses, niveaux d'énergie, spins et parités, ... des noyaux
 - mesure des valeurs de Q
 - spectroscopie nucléaire
- Taille et structure des noyaux
 - découverte du noyau (Rutherford)
 - diffusion de neutrons (ou d'électrons)
→ distribution de matière (ou de charge) dans les noyaux
- Nucléosynthèse en astrophysique et cosmologie
 - abondance naturelle des isotopes
 - « fonctionnement » des étoiles
- Production d'énergie et d'isotopes artificiels
 - centrales nucléaires
 - isotopes pour applications industrielles ou médicales

Spectroscopie nucléaire

- Réaction
$$a + A \rightarrow b + B (+ Q) \quad \text{à } T_a \text{ fixée}$$
- Le noyau B peut aussi être produit dans un état excité B_i^* ou B^{**}
$$a + A \rightarrow b + B_i^* (+ Q_i) \quad \text{avec } B_i^* \rightarrow B^{(*)}\gamma, i=1, 2, 3, \dots$$
$$a + A \rightarrow b + B^{**} (+ Q^{**}) \quad \text{avec } B^{**} \text{ se désintégrant en plusieurs corps (disparition de B)}$$



Description quantique de la diffusion (1)

- Diffusion élastique $a + A \rightarrow a + A$
- Equation de Schrödinger stationnaire

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_a} \vec{\nabla}_a^2 - \frac{\hbar^2}{2m_A} \vec{\nabla}_A^2 + V(\vec{r}_a - \vec{r}_A) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A)$$

– changement de coordonnées $(\vec{r}_a, \vec{r}_A) \rightarrow (\vec{r}, \vec{R})$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_A & \text{coordonnées relatives} \\ \vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_A \vec{r}_A}{m_a + m_A} & \text{coordonnées du centre de masse} \end{cases}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 + V(\vec{r}) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R})$$

– avec

$$\begin{cases} \mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} & \text{masse réduite} \\ M = m_a + m_A & \text{masse totale} \end{cases}$$

Description quantique de la diffusion (2)

- Séparation des variables $\psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = \psi(\vec{r}) \psi_{\text{CM}}(\vec{R})$
- L'équation de Schrödinger devient, après division par ψ_{tot}

$$\underbrace{\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r})}_{= \text{constante} = T} + \underbrace{\frac{1}{\psi_{\text{CM}}(\vec{R})} \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R})}_{= \text{constante} = T_{\text{CM}}} = T_{\text{tot}}$$

- On obtient deux équations:

- mouvement de la particule relative dans un potentiel $V(\vec{r})$
- mouvement du centre de masse (« particule » libre)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = T \psi(\vec{r})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R}) = T_{\text{CM}} \psi_{\text{CM}}(\vec{R})$$

Description quantique de la diffusion (3)

- Etats stationnaires asymptotiques, pour r grand tel que $V(\vec{r})=0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r})$$

- Solutions physiques

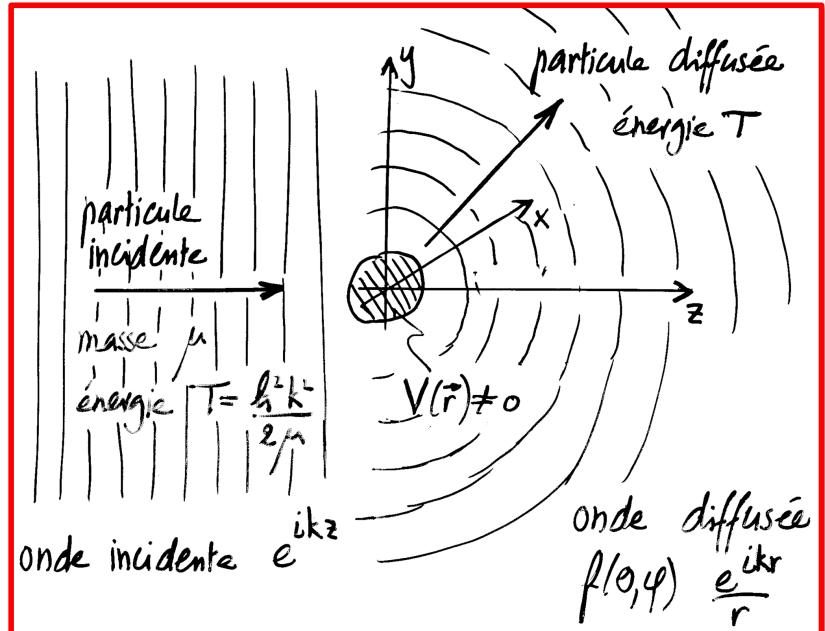
- particule incidente
 - onde plane se propageant selon Oz

$$\psi_{\text{inc}}(\vec{r}) \rightarrow \exp(i k z)$$

- particule diffusée
 - onde sphérique sortante

$$\psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \rightarrow f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

amplitude de diffusion



Description quantique de la diffusion (4)

- Onde totale

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) + \psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikz) + f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

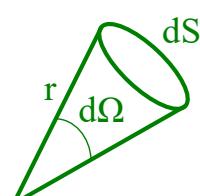
- Calcul section efficace élastique

flux incident: $F_{\text{inc}} = C |\psi_{\text{inc}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu}$

flux diffusé: $F_{\text{diff}} = C |\psi_{\text{diff}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}$

- nombre dN de particules diffusées élastiquement

dans $d\Omega$ par unité de temps: $dN = F_{\text{diff}} dS = F_{\text{diff}} r^2 d\Omega \Rightarrow d\sigma_{\text{el}} = \frac{dN}{F_{\text{inc}}} = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$



- Section efficace élastique différentielle

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Hypothèse pour la suite:
projectile et cible
non polarisés
 $\Rightarrow f(\theta, \varphi) = f(\theta)$

Décomposition en ondes partielles (1)

- Equation de Schrödinger stationnaire d'une particule libre

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) \Leftrightarrow \left[\vec{\nabla}^2 + k^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = 0, \quad T = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

- les solutions de moment cinétique orbital ℓ défini

$$\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad k = \text{« nombre quantique radial » (continu)} \\ Y_\ell^m = \text{harmonique sphérique}$$

forment une base des fonctions d'onde stationnaires

- Décomposition de l'onde plane incidente sur cette base

$$\exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{k\ell m} \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} \psi_{k\ell 0}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_\ell^0(\theta)$$

car $\exp(ikz)$ est une fonction propre
de L_z pour la valeur propre $m = 0$:

$$L_z \exp(ikz) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp(ikr \cos \theta) = 0$$

Décomposition en ondes partielles (2)

- Comportement asymptotique de l'onde incidente:

$$\psi_{\text{inc}}(\vec{r}) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_\ell^0(\theta)$$

$$\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ik} \left[\frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} - \frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} \right] Y_\ell^0(\theta)$$

onde sphérique sortante onde sphérique entrante

- Le potentiel ne peut affecter que les ondes sphériques sortantes
→ comportement asymptotique de l'onde totale:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ik} \left[\eta_\ell \frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} - \frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} \right] Y_\ell^0(\theta)$$

coefficients complexes décrivant l'action du potentiel,
c'est-à-dire l'interaction entre le projectile et la cible

Décomposition en ondes partielles (3)

- Comportement asymptotique de l'onde diffusée:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{diff}}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} (\eta_\ell - 1) \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) Y_\ell^0(\theta) \\ &= \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i}{k} (1 - \eta_\ell)}_{\text{amplitude de diffusion} = f(\theta)} Y_\ell^0(\theta)\end{aligned}$$

- On définit l'amplitude d'onde partielle: $T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$

- Amplitude de diffusion: $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_\ell Y_\ell^0(\theta)$

Décomposition en ondes partielles (4)

- Section efficace différentielle élastique:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sqrt{2\ell+1} \sqrt{2\ell'+1} (1 - \eta_\ell) (1 - \eta_{\ell'}^*) Y_\ell^0(\theta) Y_{\ell'}^{0*}(\theta)$$

- Section efficace élastique:

$$\sigma_{\text{el}} = \int \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |T_\ell|^2$$

ou bien

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2$$

section efficace partielle dans l'onde ℓ