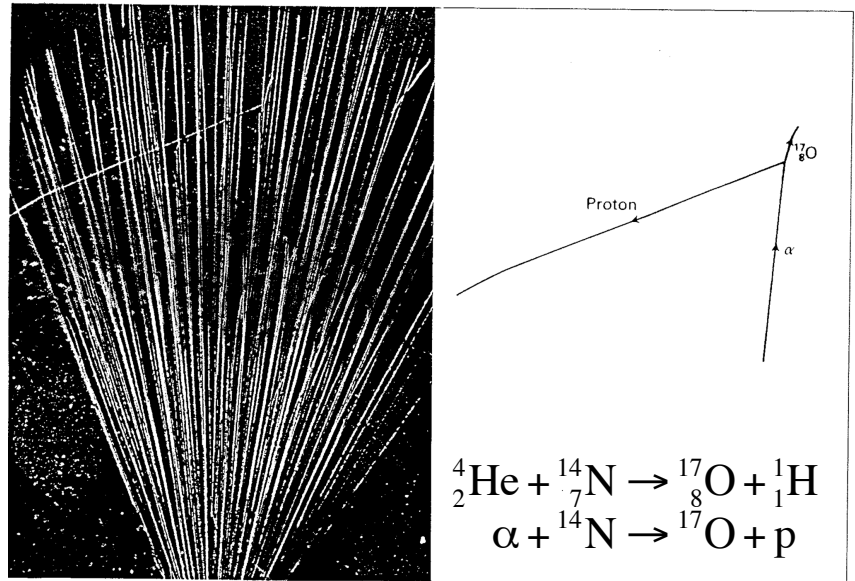


# Dernier chapitre : réactions nucléaires

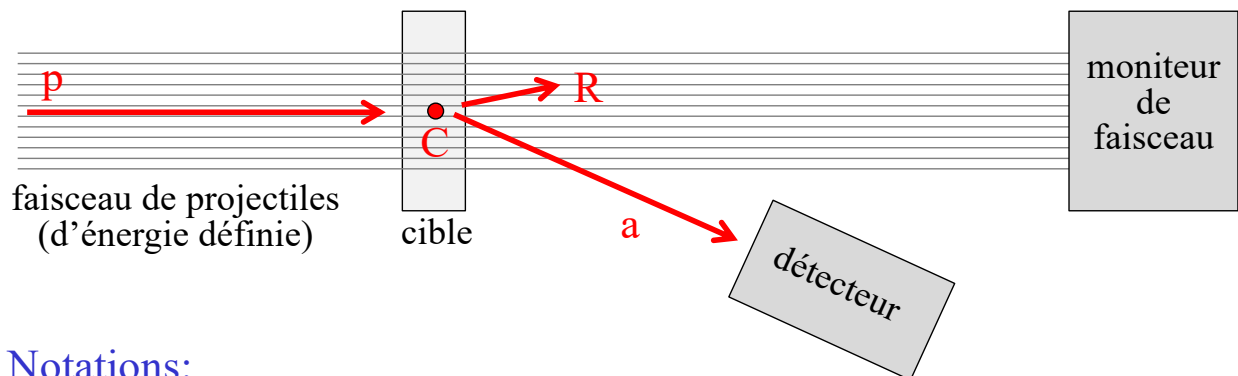
- Sommaire

- Introduction
- Cinématique non-relativiste
- Description quantique de la diffusion
- Résonances
- Modèle du noyau composé de Bohr



Première réaction nucléaire observée en 1919 par Rutherford (et photographiée en 1925 par Blackett avec une chambre à brouillard)

## Réactions nucléaires



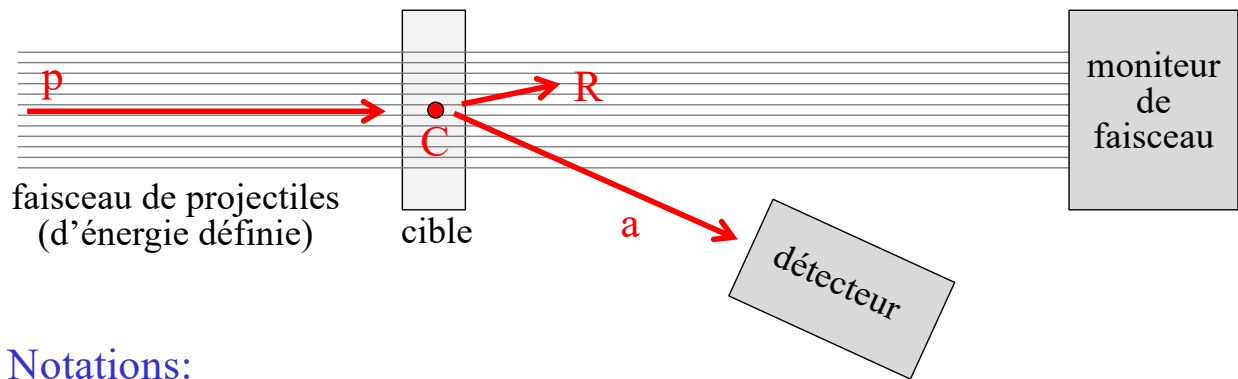
- Notations:



p = projectile (noyau, pion, électron, ...),  $E > 1 \text{ MeV}$  si chargé positivement  
 C = cible (noyau au repos)  
 a = particule détectée  
 R = noyau de recul

- exemple:  $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$

# Réactions nucléaires



## • Notations:



p = projectile (noyau, pion, électron, ...),  $E > 1 \text{ MeV}$  si chargé positivement

C = cible (noyau au repos)

a = particule détectée

R = noyau de recul

- exemples:  $^{14}_7\text{N}(\alpha, p)^{17}_8\text{O}$   
 $^9_4\text{Be}(\alpha, n)^{12}_6\text{C}$

## Réactions nucléaires: définitions

### • Energie libérée

dans une réaction:

$$Q = (m_p + m_C - m_a - m_R)c^2 = T_a + T_R - T_p$$

### • Réaction exoergique $\Leftrightarrow Q > 0$

### • Réaction endoergique $\Leftrightarrow Q < 0$

– seuil

d'une réaction:

$$T_p > T_{\text{seuil}} = -Q \left( 1 + \frac{m_p}{m_C} \right)$$

### • Diffusion:

– réaction où on retrouve le projectile dans l'état final

par ex.  $^7\text{Li}(p, pT)^4\text{He}$

### • Diffusion élastique ( $\Rightarrow Q = 0$ )

– réaction où les particules finales sont les mêmes que les particules initiales (et dans le même état d'énergie interne)

par ex.  $^{12}\text{C}(n, n)^{12}\text{C}$

### • Diffusion inélastique

par ex.  $^{12}\text{C}(n, n)^{12}\text{C}^*$

### • Réaction nucléaire (sans diffusion)

par ex.  $^9\text{Be}(\alpha, n)^{12}\text{C}$

# Qu'apprend-on en étudiant les réactions nucléaires ?

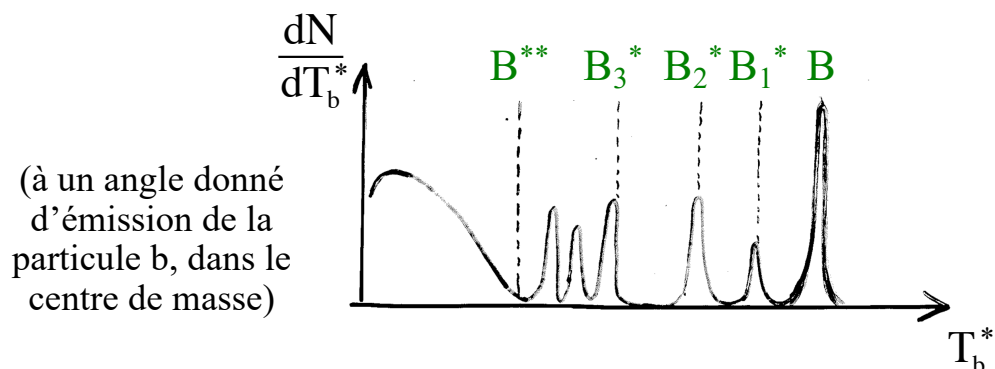
- **Masses, niveaux d'énergie, spins et parités, ... des noyaux**
  - mesure des valeurs de  $Q$
  - spectroscopie nucléaire
- **Taille et structure des noyaux**
  - découverte du noyau (Rutherford)
  - diffusion de neutrons (ou d'électrons)
    - distribution de matière (ou de charge) dans les noyaux
- **Nucléosynthèse en astrophysique et cosmologie**
  - abondance naturelle des isotopes
  - « fonctionnement » des étoiles
- **Production d'énergie et d'isotopes artificiels**
  - centrales nucléaires
  - isotopes pour applications industrielles ou médicales

OS, 4 décembre 2024

186

## Spectroscopie nucléaire

- Réaction
$$a + A \rightarrow b + B (+ Q) \quad \text{à } T_a \text{ fixée}$$
- Le noyau  $B$  peut aussi être produit dans un état excité  $B_i^*$  ou  $B^{**}$ 
$$a + A \rightarrow b + B_i^* (+ Q_i) \quad \text{avec } B_i^* \rightarrow B^{(*)}\gamma, \quad i=1, 2, 3, \dots$$
$$a + A \rightarrow b + B^{**} (+ Q^{**}) \quad \text{avec } B^{**} \text{ se désintégrant en plusieurs corps (disparition de } B)$$



OS, 4 décembre 2024

187

# Description quantique de la diffusion (1)

- Diffusion élastique  $\mathbf{a} + \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{A}$
- Equation de Schrödinger stationnaire

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_a} \vec{\nabla}_a^2 - \frac{\hbar^2}{2m_A} \vec{\nabla}_A^2 + V(\vec{r}_a - \vec{r}_A) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A)$$

- changement de coordonnées  $(\vec{r}_a, \vec{r}_A) \rightarrow (\vec{r}, \vec{R})$ 

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_A & \text{coordonnées relatives} \\ \vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_A \vec{r}_A}{m_a + m_A} & \text{coordonnées du centre de masse} \end{cases}$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 + V(\vec{r}) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R})$$

- avec  $\begin{cases} \mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} & \text{masse réduite} \\ M = m_a + m_A & \text{masse totale} \end{cases}$

# Description quantique de la diffusion (2)

- Séparation des variables  $\psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = \psi(\vec{r}) \psi_{\text{CM}}(\vec{R})$
- L'équation de Schrödinger devient, après division par  $\psi_{\text{tot}}$

$$\underbrace{\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r})}_{= \text{constante} = T} + \underbrace{\frac{1}{\psi_{\text{CM}}(\vec{R})} \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R})}_{= \text{constante} = T_{\text{CM}}} = T_{\text{tot}}$$

- On obtient deux équations:

- mouvement de la particule relative dans un potentiel  $V(\vec{r})$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = T \psi(\vec{r})$$

- mouvement du centre de masse (« particule » libre)

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R}) = T_{\text{CM}} \psi_{\text{CM}}(\vec{R})$$

# Description quantique de la diffusion (3)

- Etats stationnaires asymptotiques, pour  $r$  grand tel que  $V(\vec{r})=0$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r})$$

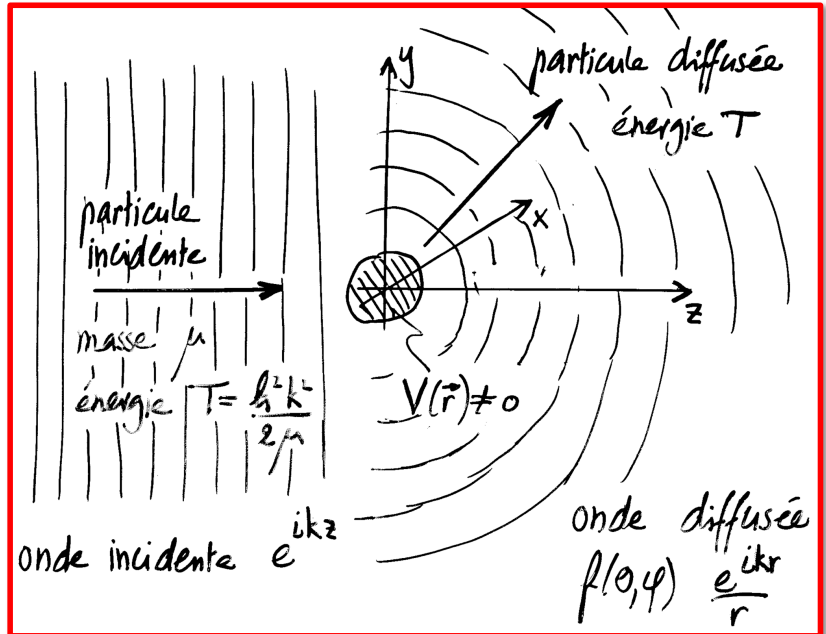
- Solutions physiques

- particule incidente
  - onde plane se propageant selon Oz

$$\psi_{\text{inc}}(\vec{r}) \rightarrow \exp(ikz)$$

- particule diffusée
  - onde sphérique sortante

$$\psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \rightarrow \underbrace{f(\theta, \varphi)}_{\text{amplitude de diffusion}} \frac{\exp(ikr)}{r}$$



OS, 4 décembre 2024

190

# Description quantique de la diffusion (4)

- Onde totale

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) + \psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikz) + f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

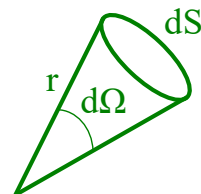
- Calcul section efficace élastique

- flux incident:  $F_{\text{inc}} = C |\psi_{\text{inc}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu}$

- flux diffusé:  $F_{\text{diff}} = C |\psi_{\text{diff}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}$

- nombre  $dn$  de particules diffusées élastiquement

dans  $d\Omega$  par unité de temps:  $dn = F_{\text{diff}} dS = F_{\text{diff}} r^2 d\Omega \Rightarrow d\sigma_{\text{el}} = \frac{dn}{F_{\text{inc}}} = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$



- Section efficace élastique différentielle

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Hypothèse pour la suite:  
projectile et cible  
non polarisés  
 $\Rightarrow f(\theta, \varphi) = f(\theta)$

OS, 4 décembre 2024

191

# Décomposition en ondes partielles (1)

- Equation de Schrödinger stationnaire d'une particule libre

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) \Leftrightarrow [\vec{\nabla}^2 + k^2] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = 0, \quad T = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

- les solutions de moment cinétique orbital  $\ell$  défini

$$\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad \begin{array}{l} \mathbf{k} = \text{« nombre quantique radial » (continu)} \\ Y_{\ell}^m = \text{harmonique sphérique} \end{array}$$

forment une base des fonctions d'onde stationnaires

- Décomposition de l'onde plane incidente sur cette base

$$\exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{k\ell m} \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} \psi_{k\ell 0}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^0(\theta)$$

car  $\exp(ikz)$  est une fonction propre de  $L_z$  pour la valeur propre  $m = 0$ :

$$L_z \exp(ikz) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp(ikr \cos \theta) = 0$$

# Décomposition en ondes partielles (2)

- Comportement asymptotique de l'onde incidente:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^0(\theta) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{ik} \left[ \underbrace{\frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r}}_{\text{onde sphérique sortante}} - \underbrace{\frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r}}_{\text{onde sphérique entrante}} \right] Y_{\ell}^0(\theta) \end{aligned}$$

- Le potentiel ne peut affecter que les ondes sphériques sortantes  
→ comportement asymptotique de l'onde totale:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{ik} \left[ \eta_{\ell} \frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} - \frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} \right] Y_{\ell}^0(\theta)$$

coefficients complexes décrivant l'action du potentiel, c'est-à-dire l'interaction entre le projectile et la cible

## Décomposition en ondes partielles (3)

- Comportement asymptotique de l'onde diffusée:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{diff}}(\vec{r}) &= \psi(\vec{r}) - \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} (\eta_\ell - 1) \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) Y_\ell^0(\theta) \\ &= \frac{\exp(ikr)}{r} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i}{k} (1 - \eta_\ell) Y_\ell^0(\theta)}_{= \text{amplitude de diffusion} = f(\theta)}\end{aligned}$$

- On définit l'amplitude d'onde partielle:  $T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$

- Amplitude de diffusion:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_\ell Y_\ell^0(\theta)$$

## Décomposition en ondes partielles (4)

- Section efficace différentielle élastique:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sqrt{2\ell+1} \sqrt{2\ell'+1} (1 - \eta_\ell)(1 - \eta_{\ell'}^*) Y_\ell^0(\theta) Y_{\ell'}^{0*}(\theta)$$

- Section efficace élastique:

$$\sigma_{\text{el}} = \int \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |T_\ell|^2$$

ou bien

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_\ell|^2$$

section efficace partielle dans l'onde  $\ell$