

# Moment magnétique dipolaire d'un noyau

- $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle$  dépend des valeurs de  $m$  des nucléons célibataires, donc de leur somme  $M$
- On définit « le » moment magnétique  $\mu$  d'un noyau de spin  $J$ :

$$\mu = \langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle \Big|_{M=J} = \langle J, M = J, \dots | \mu_z^{\text{noyau}} | J, M = J, \dots \rangle$$

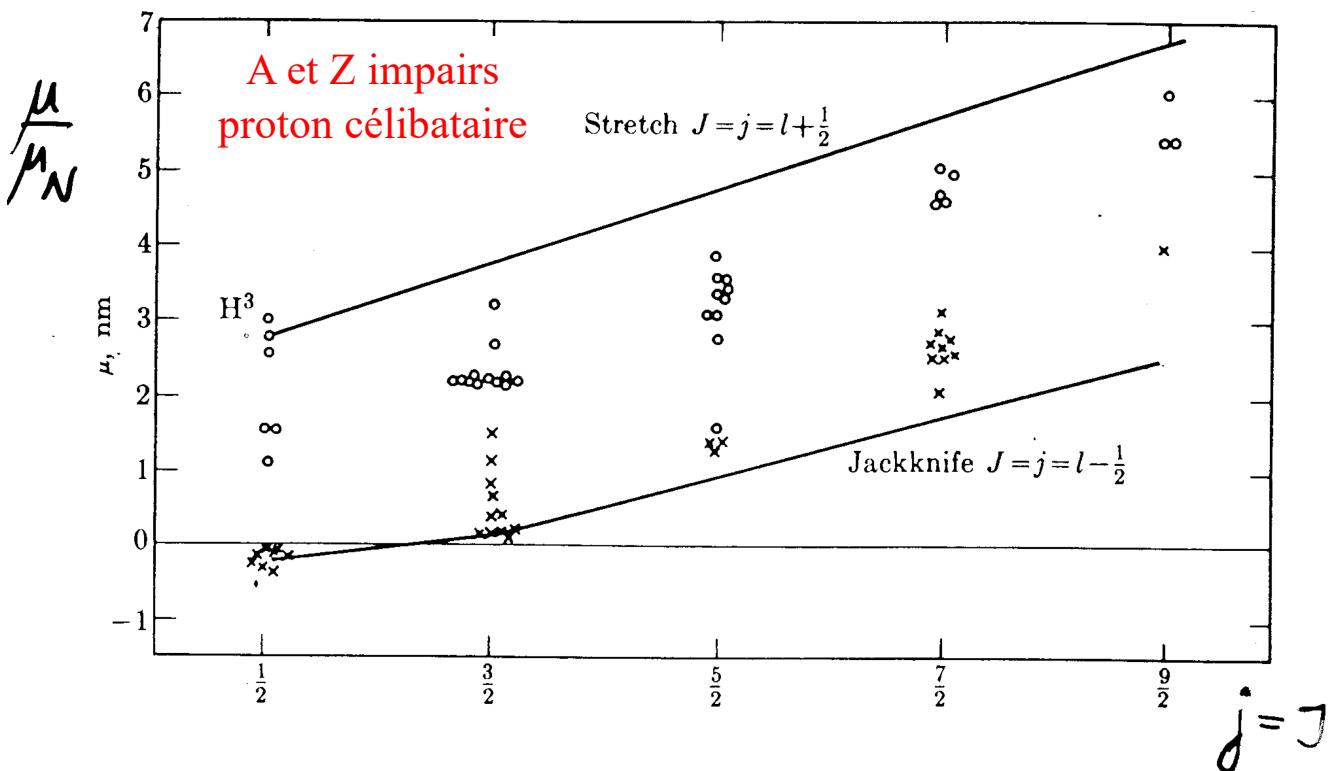
- Pour un noyau pair-pair (sans nucléon célibataire)
- $\mu = 0$  prédition correcte dans tous les cas
- Pour un noyau à un seul nucléon célibataire sur un niveau  $n\ell j$ :

$$\mu = \langle \mu_z^{\text{célib}} \rangle \Big|_{m=j} = \begin{cases} \frac{\mu_N}{2} \frac{j}{(j+1)} (g_\ell(2j+3) - g_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N}{2} (g_\ell(2j-1) + g_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases}$$

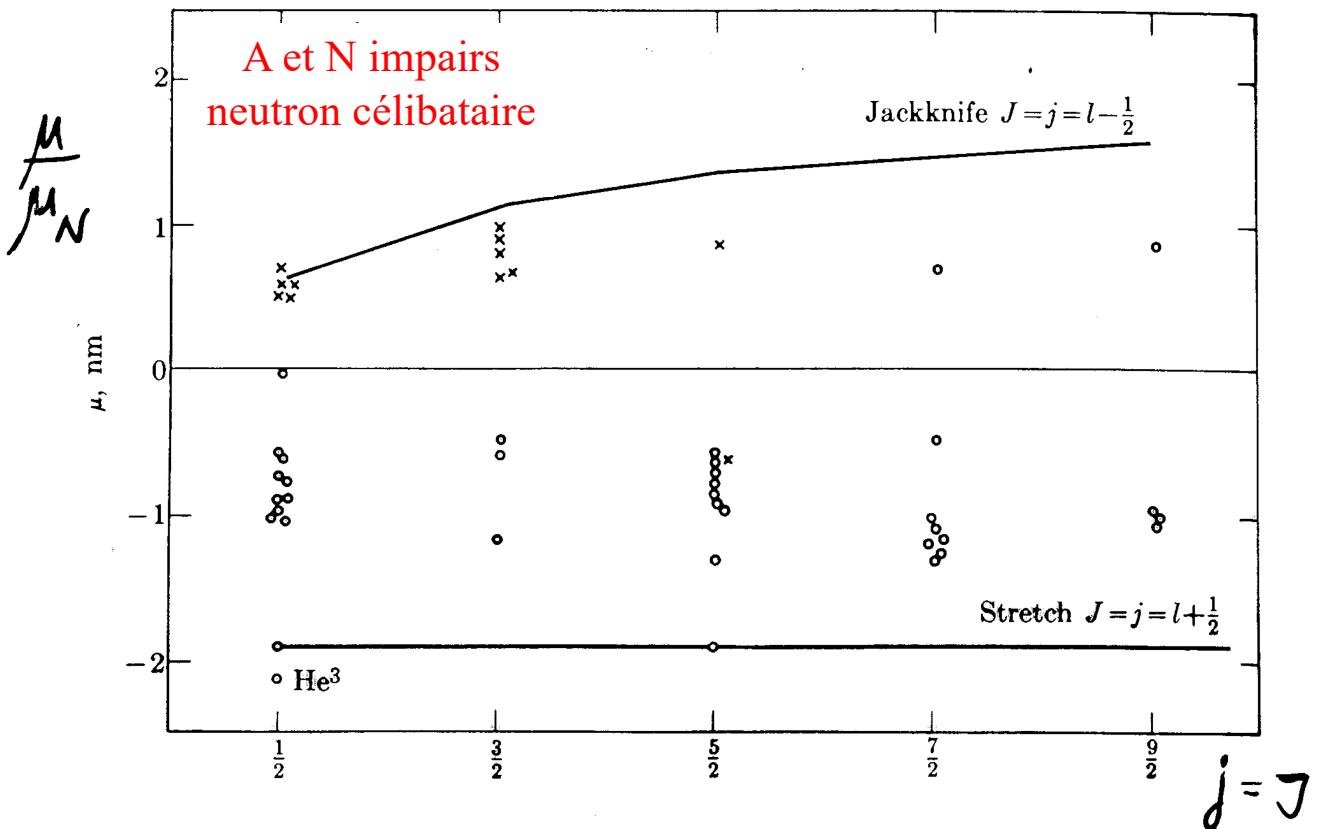
lignes de Schmidt

observations expérimentales tombent entre les deux lignes de Schmidt

## Lignes de Schmidt



# Lignes de Schmidt



## Modèle en couches sans interaction résiduelle

- Hamiltonien du noyau non perturbé:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A H_i \quad \text{où } H_i = \text{hamiltonien du nucléon } i \text{ indépendant}$$

- Etats stationnaires d'un nucléon  $i$

$$|\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle \text{ tel que } H_i |\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle = E_{n_i \ell_i j_i} |\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle$$

- Etats stationnaires du noyau de moment cinétique total  $J$  et d'isospin total  $I$  définis

$$|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle \text{ tel que } H_0 |\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle = E_{\Gamma}^{(0)} |\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$$

$\Gamma$  = ensemble des nombres quantiques décrivant l'état du noyau  
 $= (a, J, M, I, M_I, \dots)$  où  $a$  = configuration ( $n \ell j$  de chaque nucléon)

$$E_{\Gamma}^{(0)} = E_a^{(0)} = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

**L'énergie du noyau ne dépend que de la configuration et pas de  $J$**

# Modèle en couches avec interaction résiduelle

- On ajoute une “petite” interaction résiduelle  $H_1$  à l’hamiltonien

$$H = H_0 + H_1$$

- Nouveaux états stationnaires du noyau de nombres quantiques  $\Gamma$

$$|\Psi_\Gamma\rangle \text{ tel que } H |\Psi_\Gamma\rangle = E_\Gamma |\Psi_\Gamma\rangle$$

- Au premier ordre de perturbation

$$|\Psi_\Gamma\rangle = |\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle + |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \quad \text{où } |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \text{ est une petite correction}$$

$$E_\Gamma = E_\Gamma^{(0)} + E_\Gamma^{(1)} \quad \text{où } E_\Gamma^{(1)} \text{ est une petite correction}$$

$$E_\Gamma = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \langle \Psi_\Gamma^{(0)} | H_1 | \Psi_\Gamma^{(0)} \rangle$$

Les éléments diagonaux de  $H_1$  (dans la base des états non perturbés) lèvent la dégénérence par rapport à  $J$  (mais pas rapport à  $M$ )

# Modèle en couches avec interaction résiduelle (2)

- En général:

$$H_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A v_{ij} \quad v_{ij} = \text{interaction résiduelle entre nucléons } i \text{ et } j$$

- On décompose alors le noyau en un coeur formé de niveaux d’énergie complets et de nucléons de valence (sur des niveaux incomplets)

- Exemple:

- le noyau  ${}^{18}_8O_{10}$ , dans son état fondamental, est formé de deux neutrons de valence sur le niveau  $1d_{5/2}$  et d’un coeur inerte  ${}^{16}_8O_8$  formé de niveaux complets

$$H = H_0 + H_1 = H_{\text{valence}} + H_{\text{coeur}} + H_{\text{coeur-valence}}$$

$$H_{\text{valence}} = \sum_{i=1}^2 H_i + v_{12}$$

$$H_{\text{coeur}} = \sum_{i=3}^A H_i + \sum_{\substack{i,j=3 \\ i < j}}^A v_{ij}$$

$$H_{\text{coeur-valence}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=3}^A v_{ik}$$

# Modèle en couches avec interaction résiduelle (3)

- Le coeur à  $J=0$  (niveaux complets)
  - la fonction d'onde du coeur a une symétrie sphérique
  - le coeur n'a pas de direction privilégiée dans l'espace
  - l'interaction résiduelle entre le coeur et un nucléon de valence dans un état  $n\ell jm$  ne peut pas dépendre de  $m$
  - l'interaction résiduelle entre le coeur et les nucléons de valence ne dépend que de la configuration (constante additive)
- Ainsi, pour un noyau avec deux nucléons de valence identiques sur un niveau  $n\ell j$  incomplet:

$$E_\Gamma = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \text{constante} + \left\langle \Psi_\Gamma^{(0)}(1,2) \middle| v_{12} \middle| \Psi_\Gamma^{(0)}(1,2) \right\rangle$$

(se généralise à un nombre quelconque de nucléons de valence)

# Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact

- Avec

$$v_{12} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_{12} = 0 \text{ sauf si } \vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

on peut calculer que, pour deux nucléons identiques sur un même niveau  $n\ell j$  incomplet

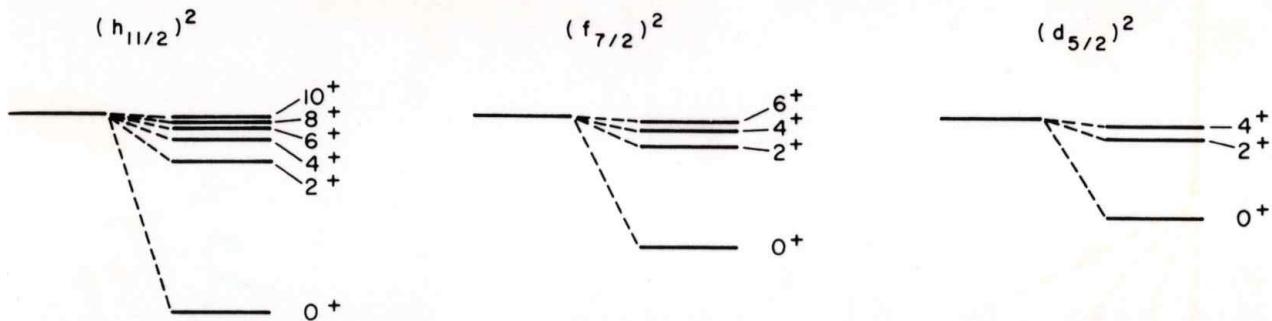
$$\Delta E_J = \left\langle \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \middle| v_{12} \middle| \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \right\rangle = -V_0 F(n, \ell, j) A(j, J)$$

- Tableau des valeurs de  $A(j, J)$

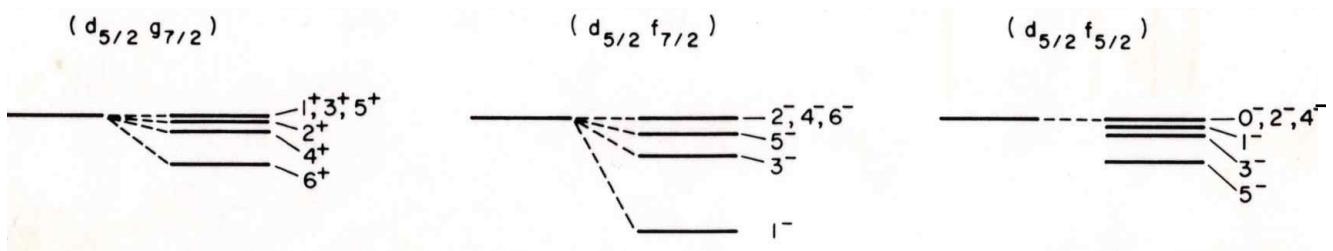
	$J = 0$	$J = 2$	$J = 4$	$J = 6$	$J = 8$
$j = \frac{1}{2}$	2				
$j = \frac{3}{2}$	4	$\frac{4}{5}$			
$j = \frac{5}{2}$	6	$\frac{48}{35}$	$\frac{4}{7}$		
$j = \frac{7}{2}$	8	$\frac{40}{21}$	$\frac{72}{77}$	$\frac{200}{429}$	
$j = \frac{9}{2}$	10	$\frac{80}{33}$	$\frac{180}{143}$	$\frac{320}{429}$	$\frac{980}{2431}$

## Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact (2)

- Pour deux nucléons identiques sur un même niveau  $n\ell j$  incomplet

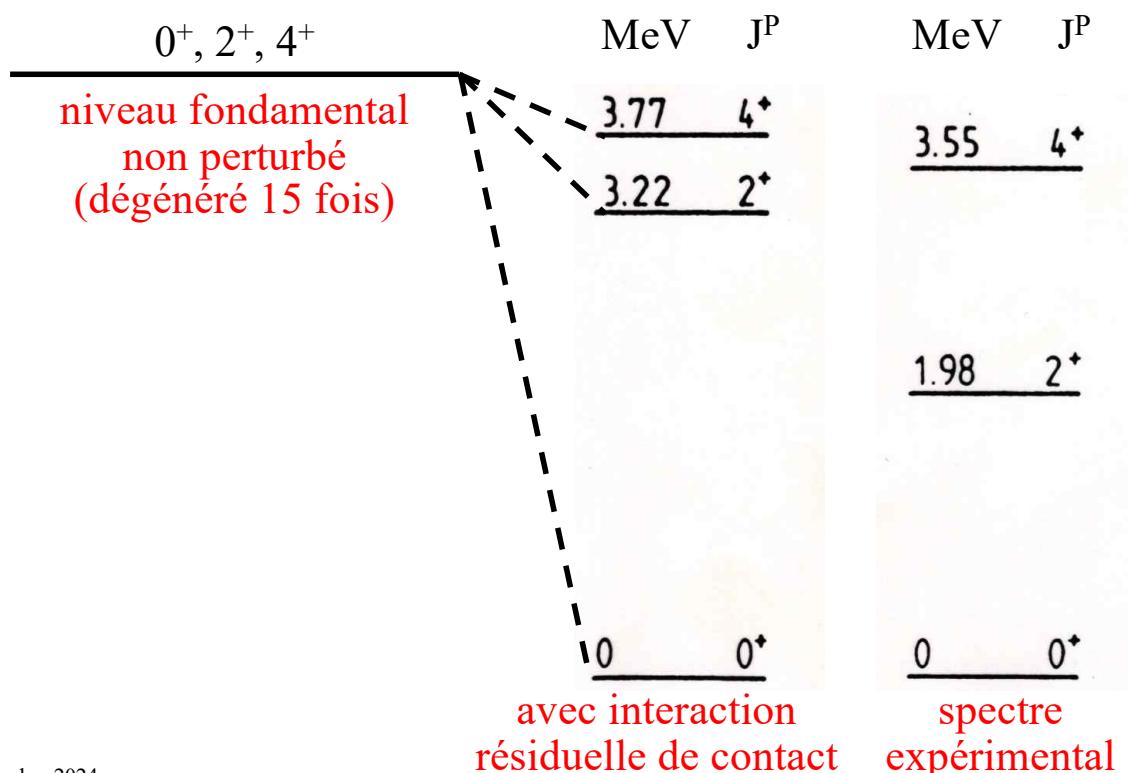


- Pour deux nucléons de valence identiques sur des niveaux différents



## Premiers niveaux d'énergie de $^{18}\text{O}$

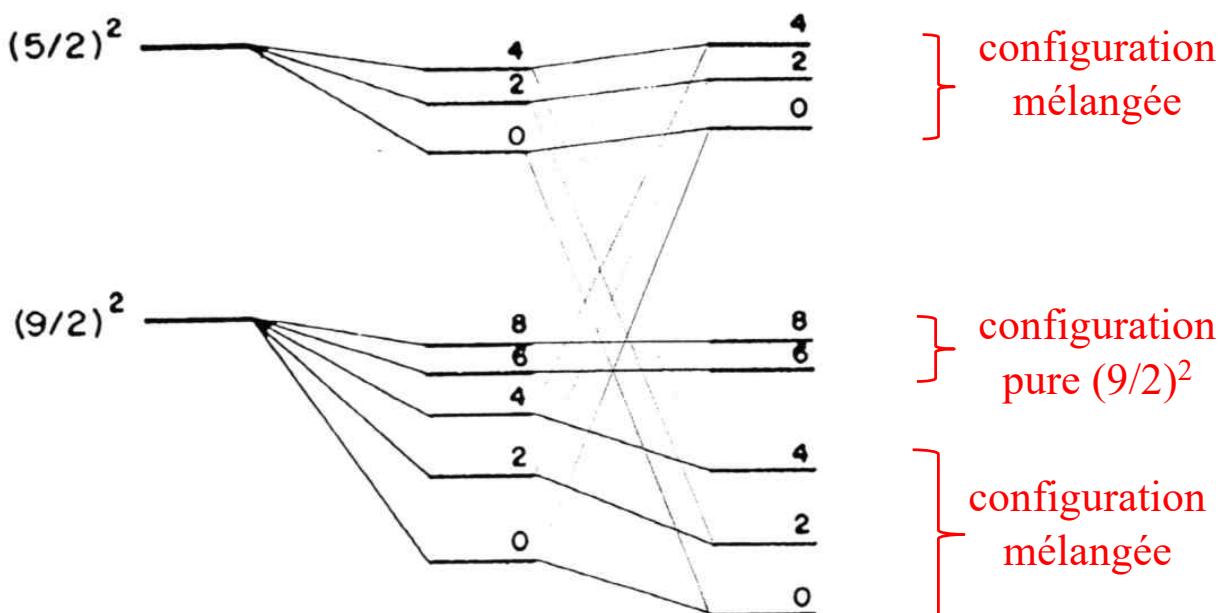
Configuration [n: ( $1d_{5/2}$ )<sup>2</sup>]  $\rightarrow J^P = 0^+, 2^+, 4^+$



# Mélange de configurations (1)

- Les éléments non diagonaux de  $H_1$  peuvent coupler des états  $|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$  de différentes configurations
  - Les états propres de l'hamiltonien total  $H_0+H_1$  deviennent des combinaisons linéaires des états non perturbés  $|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$  et ne correspondent plus nécessairement à des configurations définies !
- Ces éléments non diagonaux ne peuvent être non nuls qu'entre des états de même nombres quantiques  $P, J, M, I, M_I$ , car  $H_1$  doit être un vrai scalaire qui conserve la parité  $P$ , le moment cinétique total  $J$  et l'isospin total  $I$ 
  - Précédemment on a réduit l'espace des états  $\mathcal{E}$  du noyau à un sous-espace  $\mathcal{E}_a$  correspondant à une configuration “a” avec deux nucléons de valence; dans ce cas  $H_1$  n'avait pas d'élément non diagonal dans ce sous-espace

# Mélange de configurations (2)



$$H = H_0$$

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H \text{ diagonalisé} &\\ \text{ séparément dans} &\\ \mathcal{E}_{(9/2)^2} \text{ et } \mathcal{E}_{(5/2)^2} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H \text{ diagonalisé dans} &\\ \text{l'espace complet} &\\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_{(9/2)^2} \otimes \mathcal{E}_{(5/2)^2} & \end{aligned}$$

# Cas simple: mélange de deux états (1)

- Deux états non perturbés  $|\Psi_i^{(0)}\rangle$  ( $i=1,2$ ):

$$H_0 |\Psi_i^{(0)}\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(0)}\rangle$$

- Dans la base  $\{|\Psi_i^{(0)}\rangle\}$ :

$$H = H_0 + H_1 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & A \\ A^* & E_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^\dagger = H_1 \quad H^\dagger = H$$

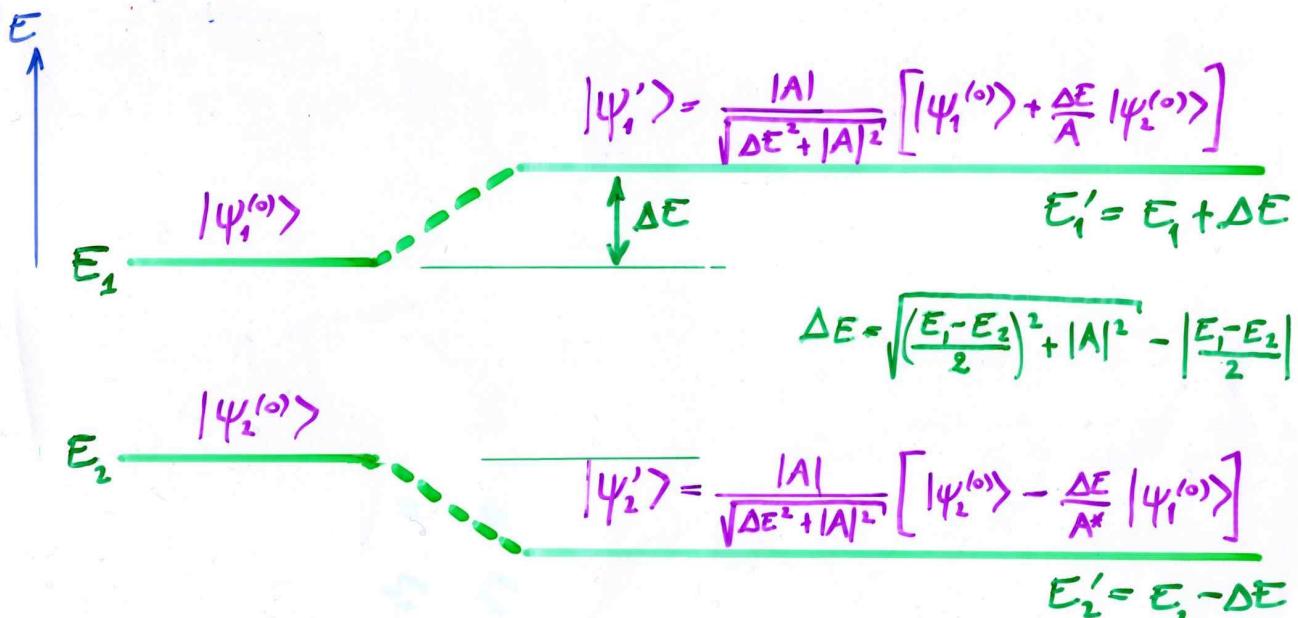
- Diagonalisation de  $H$ :

– on cherche les états propres  $|\Psi'\rangle$  et les valeurs propres  $E'$  de  $H$

$$|\Psi'\rangle = a |\Psi_1^{(0)}\rangle + b |\Psi_2^{(0)}\rangle \quad \text{tel que} \quad H |\Psi'\rangle = E' |\Psi'\rangle$$

$$\begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

# Cas simple: mélange de deux états (2)

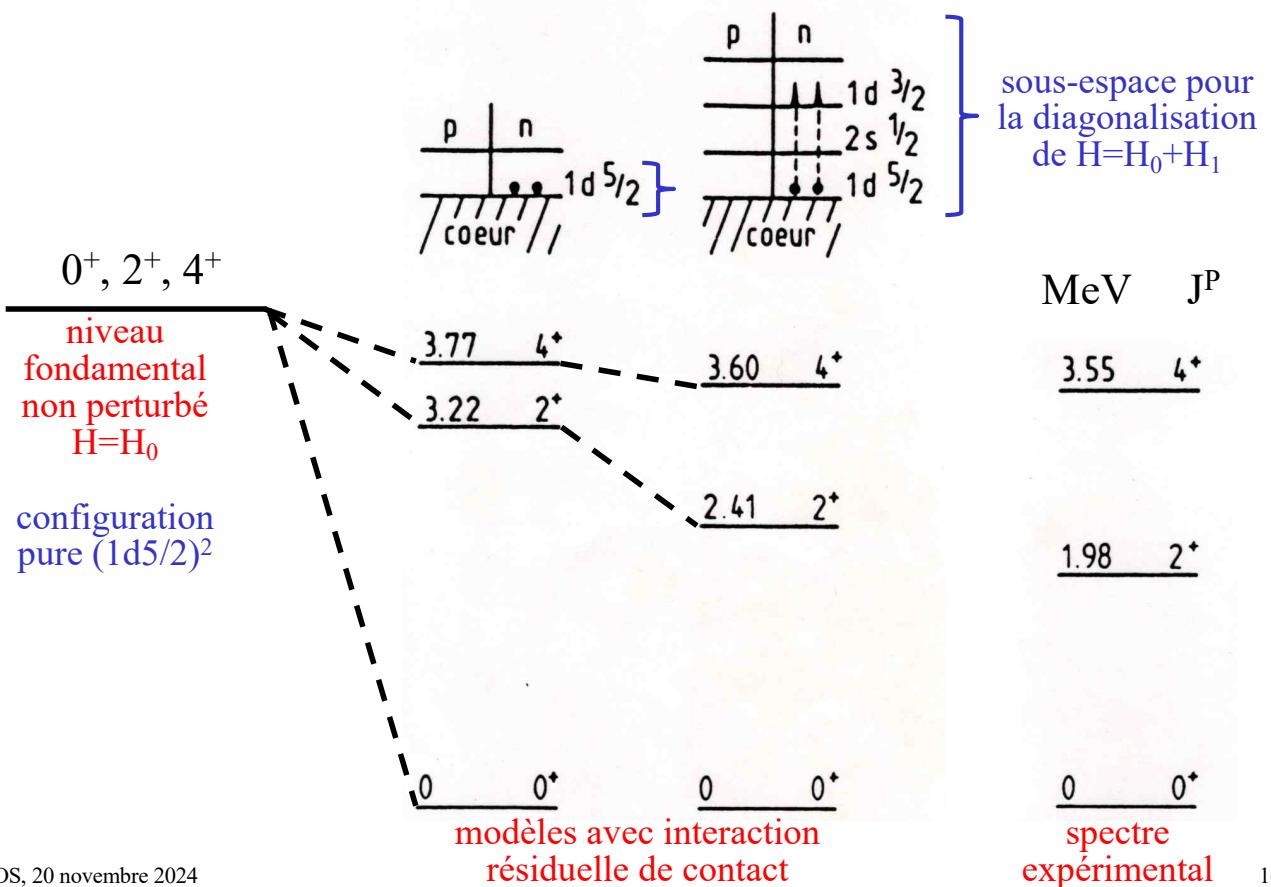


Cas limites:

$$E_1 - E_2 \ll |A| \Rightarrow \Delta E \approx |A| \quad \text{et} \quad |\langle \Psi_j' | \Psi_i^{(0)} \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$E_1 - E_2 \gg |A| \Rightarrow \Delta E \approx 0 \quad \text{et} \quad |\Psi_j'\rangle \approx |\Psi_j^{(0)}\rangle$$

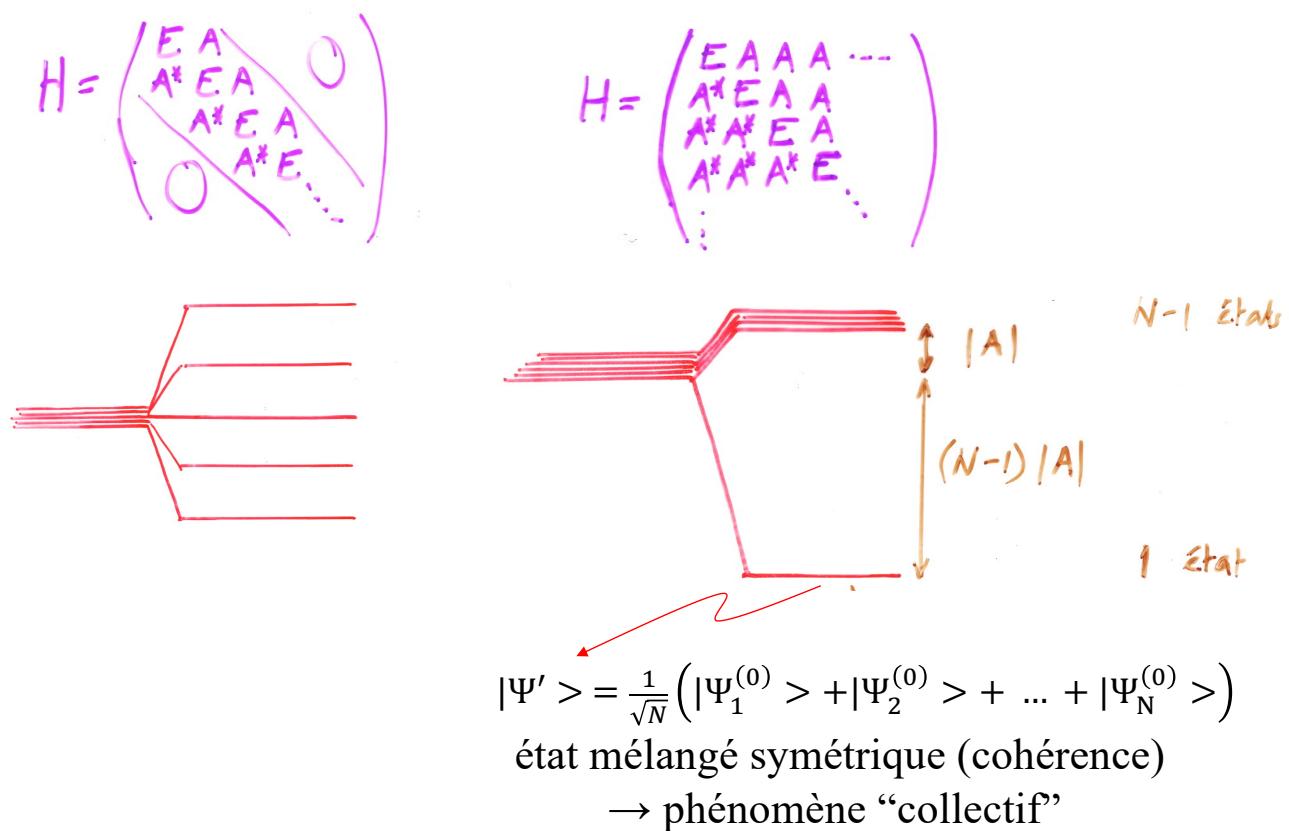
# Premiers niveaux d'énergie de $^{18}\text{O}$



OS, 20 novembre 2024

160

## Mélange de N états dégénérés



OS, 20 novembre 2024

161

# Moments électriques multipolaires

- Energie d'interaction d'un noyau dans un champ électrique extérieur

$$W = \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$\rho(\vec{r})$  = densité de charge du noyau  
 $\phi(\vec{r})$  = potentiel électrique extérieur

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = Ze$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = 0$$

- Décomposition sur la base des harmoniques sphériques

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} f_{\ell m}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

- Moments électriques multipolaires

$$Q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) d^3\vec{r}$$

$$W = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} Q_{\ell m}$$

$Q_{\ell m}$  = coefficients caractérisant la distribution de charge  
 $\phi_{\ell m}$  = coefficients caractérisant le potentiel extérieur

# Moments électriques multipolaires

- Base des états du noyau:

$$\{|J, M, \dots\rangle\} \text{ états propres de } H, \vec{J}^2, J_z, \dots$$

$$Q_{\ell m} = e \sum_{i=1}^Z \langle J, M, \dots | r_i^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta_i, \varphi_i) | J, M, \dots \rangle$$

- Propriétés des harmoniques sphériques:

$$\langle J, M, \dots | Y_{\ell}^m(\theta_i, \varphi_i) | J', M', \dots \rangle = 0 \quad \text{sauf si } M = m + M' \text{ et } |J - J'| \leq \ell \leq J + J'$$

- Donc:

$$Q_{\ell m} = 0 \quad \text{si } m \neq 0 \text{ ou si } \ell > 2J$$

- De plus:  $|J, M, \dots\rangle$  de parité définie  
 $Y_{\ell}^m$  de parité  $(-1)^{\ell}$

$$\left. \Rightarrow Q_{\ell 0} = 0 \text{ si } \ell \text{ impair} \right\}$$