

Moment magnétique dipolaire d'un noyau

- $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle$ dépend des valeurs de m des nucléons célibataires, donc de leur somme M
- On définit « le » moment magnétique μ d'un noyau de spin J :

$$\mu = \langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle \Big|_{M=J} = \langle J, M = J, \dots | \mu_z^{\text{noyau}} | J, M = J, \dots \rangle$$

- Pour un noyau pair-pair (sans nucléon célibataire)
 $\mu = 0$ prédition correcte dans tous les cas
- Pour un noyau à un seul nucléon célibataire sur un niveau $n\ell j$:

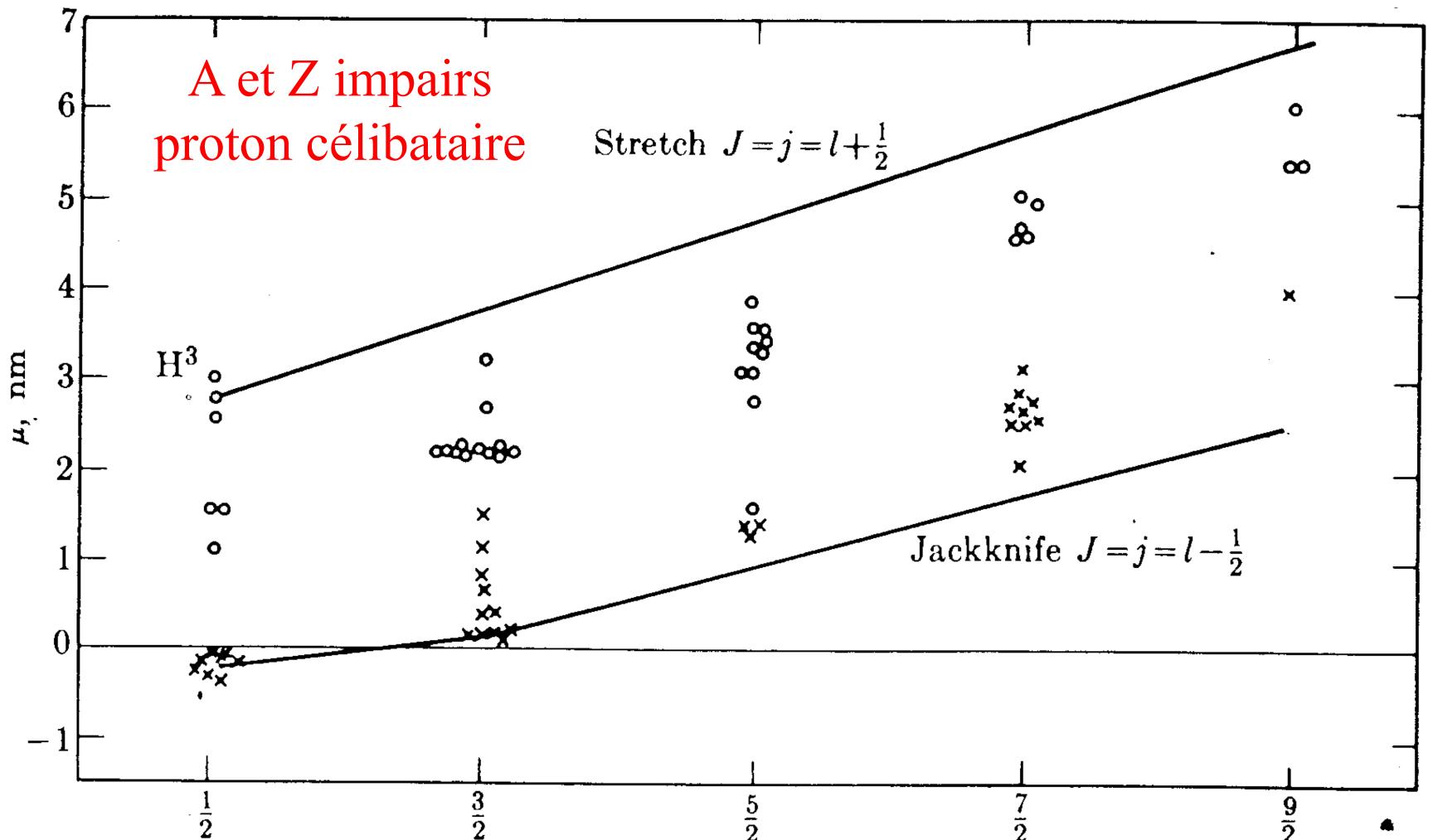
$$\mu = \langle \mu_z^{\text{célib}} \rangle \Big|_{m=j} = \begin{cases} \frac{\mu_N}{2} \frac{j}{(j+1)} (g_\ell(2j+3) - g_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N}{2} (g_\ell(2j-1) + g_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases}$$

lignes de Schmidt

observations expérimentales tombent entre les deux lignes de Schmidt

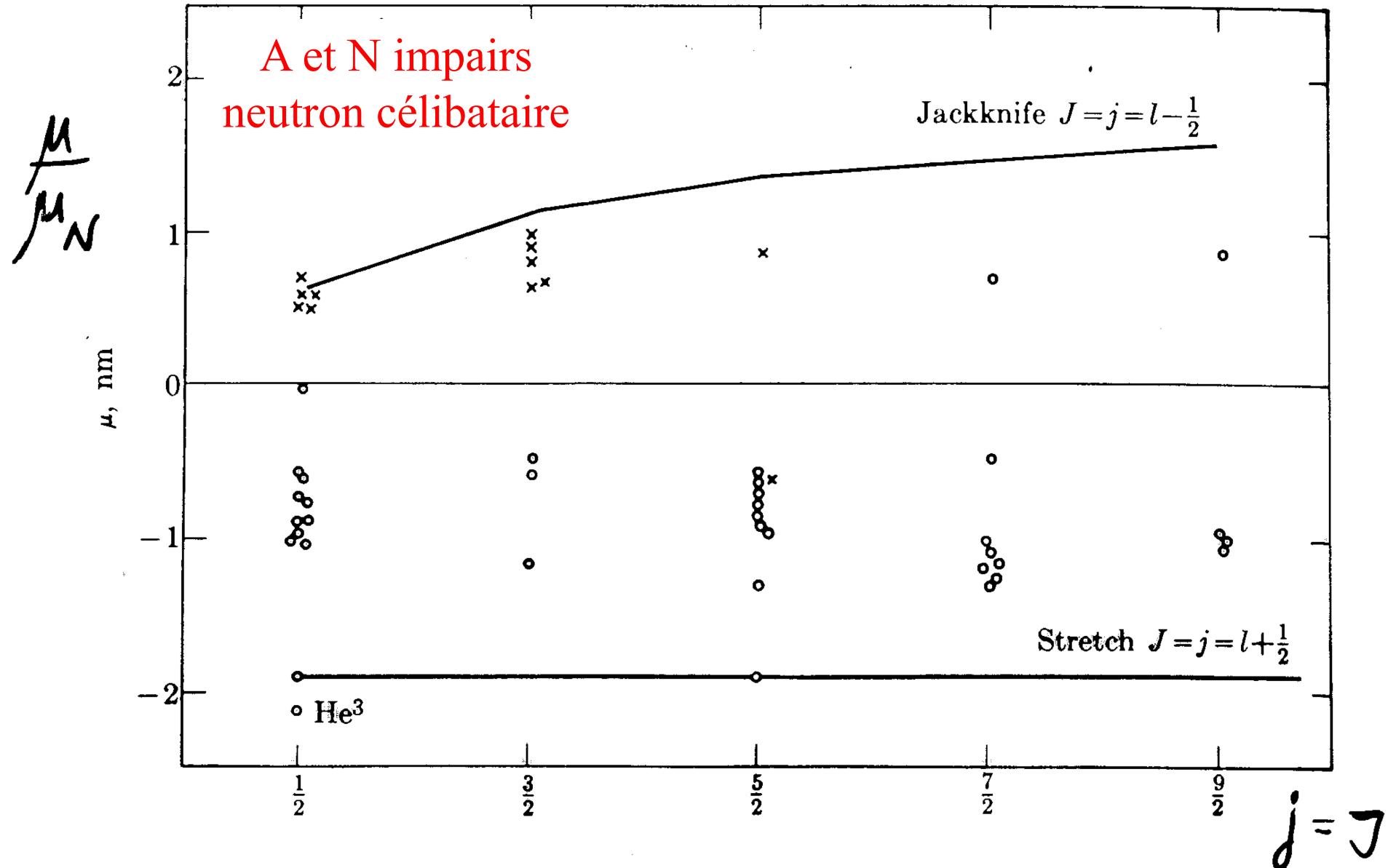
Lignes de Schmidt

$\frac{\mu}{\mu_N}$



$j = J$

Lignes de Schmidt



Modèle en couches

sans interaction résiduelle

- Hamiltonien du noyau non perturbé:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A H_i \quad \text{où } H_i = \text{hamiltonien du nucléon } i \text{ indépendant}$$

- Etats stationnaires d'un nucléon i

$$|\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle \text{ tel que } H_i |\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle = E_{n_i \ell_i j_i} |\Psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle$$

- Etats stationnaires du noyau de moment cinétique total J et d'isospin total I définis

$$|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle \text{ tel que } H_0 |\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle = E_{\Gamma}^{(0)} |\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$$

Γ = ensemble des nombres quantiques décrivant l'état du noyau
= (a, J, M, I, M_I, \dots) où a = configuration ($n\ell j$ de chaque nucléon)

$$E_{\Gamma}^{(0)} = E_a^{(0)} = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

L'énergie du noyau ne dépend que de la configuration et pas de J

Modèle en couches avec interaction résiduelle

- On ajoute une “petite” interaction résiduelle H_1 à l’hamiltonien

$$H = H_0 + H_1$$

- Nouveaux états stationnaires du noyau de nombres quantiques Γ

$$|\Psi_\Gamma\rangle \text{ tel que } H |\Psi_\Gamma\rangle = E_\Gamma |\Psi_\Gamma\rangle$$

- Au premier ordre de perturbation

$$|\Psi_\Gamma\rangle = |\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle + |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \quad \text{où } |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \text{ est une petite correction}$$
$$E_\Gamma = E_\Gamma^{(0)} + E_\Gamma^{(1)} \quad \text{où } E_\Gamma^{(1)} \text{ est une petite correction}$$

$$E_\Gamma = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \langle \Psi_\Gamma^{(0)} | H_1 | \Psi_\Gamma^{(0)} \rangle$$

Les éléments diagonaux de H_1 (dans la base des états non perturbés) lèvent la dégénérence par rapport à J (mais pas rapport à M)

Modèle en couches avec interaction résiduelle (2)

- En général:

$$H_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A v_{ij} \quad v_{ij} = \text{interaction résiduelle entre nucléons } i \text{ et } j$$

- On décompose alors le noyau en un cœur formé de niveaux d'énergie complets et de nucléons de valence (sur des niveaux incomplets)
- Exemple:

- le noyau $^{18}_8O_{10}$, dans son état fondamental, est formé de deux neutrons de valence sur le niveau $1d_{5/2}$ et d'un cœur inerte $^{16}_8O_8$ formé de niveaux complets

$$H = H_0 + H_1 = H_{\text{valence}} + H_{\text{coeur}} + H_{\text{coeur-valence}}$$

$$H_{\text{valence}} = \sum_{i=1}^2 H_i + v_{12}$$

$$H_{\text{coeur}} = \sum_{i=3}^A H_i + \sum_{\substack{i,j=3 \\ i < j}}^A v_{ij}$$

$$H_{\text{coeur-valence}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=3}^A v_{ik}$$

Modèle en couches avec interaction résiduelle (3)

- Le cœur à $J=0$ (niveaux complets)
 - la fonction d'onde du cœur a une symétrie sphérique
 - le cœur n'a pas de direction privilégiée dans l'espace
 - l'interaction résiduelle entre le cœur et un nucléon de valence dans un état $n\ell jm$ ne peut pas dépendre de m
 - l'interaction résiduelle entre le cœur et les nucléons de valence ne dépend que de la configuration (constante additive)
- Ainsi, pour un noyau avec deux nucléons de valence identiques sur un niveau $n\ell j$ incomplet:

$$E_\Gamma = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \text{constante} + \left\langle \Psi_\Gamma^{(0)}(1,2) \middle| v_{12} \middle| \Psi_\Gamma^{(0)}(1,2) \right\rangle$$

(se généralise à un nombre quelconque de nucléons de valence)

Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact

- Avec

$$v_{12} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_{12} = 0 \text{ sauf si } \vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

on peut calculer que, pour deux nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ incomplet

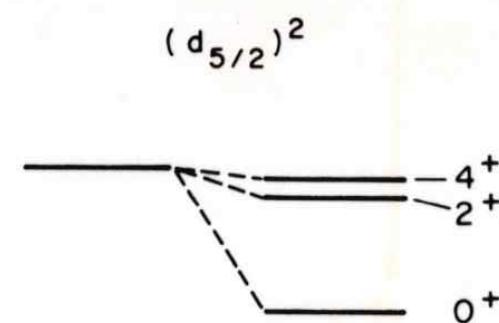
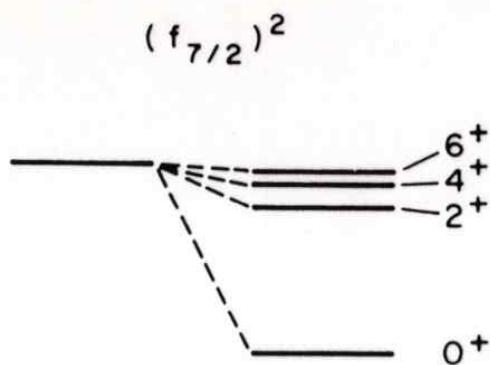
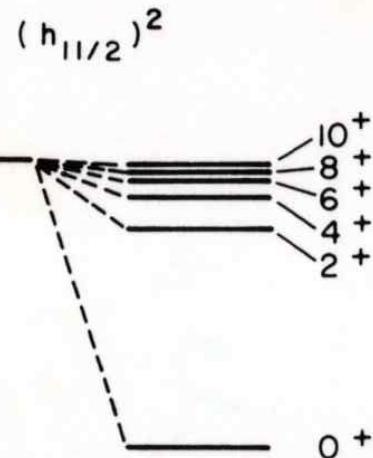
$$\Delta E_J = \left\langle \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \middle| v_{12} \middle| \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \right\rangle = -V_0 F(n, \ell, j) A(j, J)$$

- Tableau des valeurs de $A(j, J)$

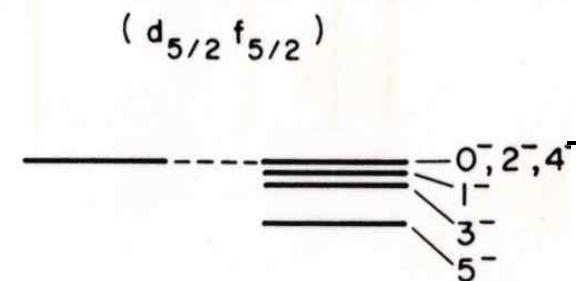
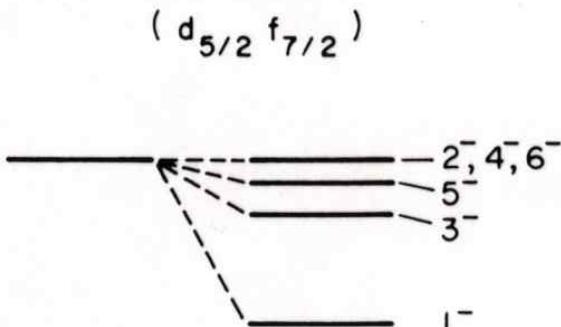
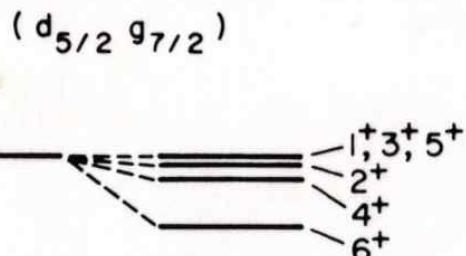
	$J = 0$	$J = 2$	$J = 4$	$J = 6$	$J = 8$
$j = \frac{1}{2}$	2				
$j = \frac{3}{2}$	4	$\frac{4}{5}$			
$j = \frac{5}{2}$	6	$\frac{48}{35}$	$\frac{4}{7}$		
$j = \frac{7}{2}$	8	$\frac{40}{21}$	$\frac{72}{77}$	$\frac{200}{429}$	
$j = \frac{9}{2}$	10	$\frac{80}{33}$	$\frac{180}{143}$	$\frac{320}{429}$	$\frac{980}{2431}$

Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact (2)

- Pour deux nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ incomplet

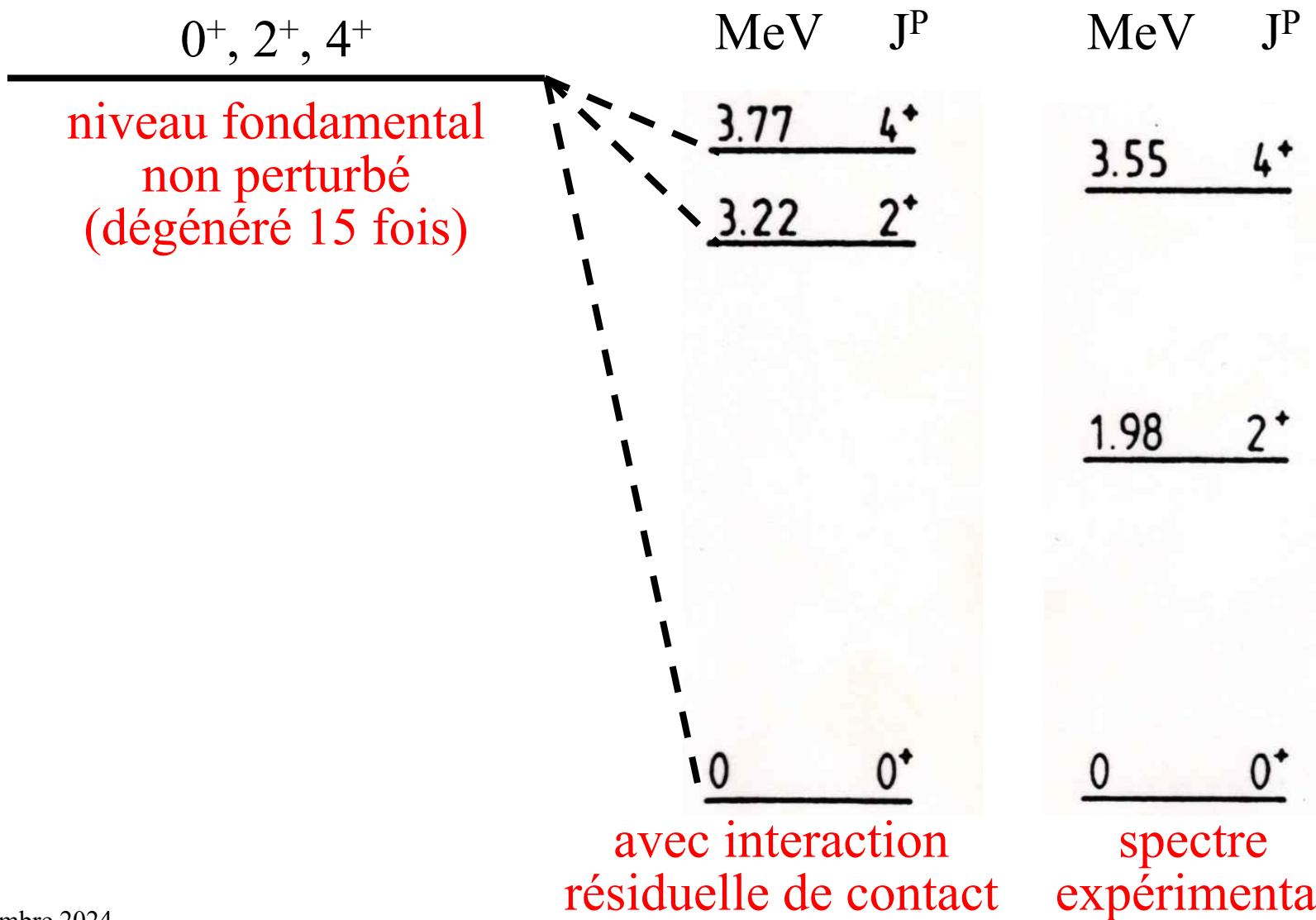


- Pour deux nucléons de valence identiques sur des niveaux différents



Premiers niveaux d'énergie de ^{18}O

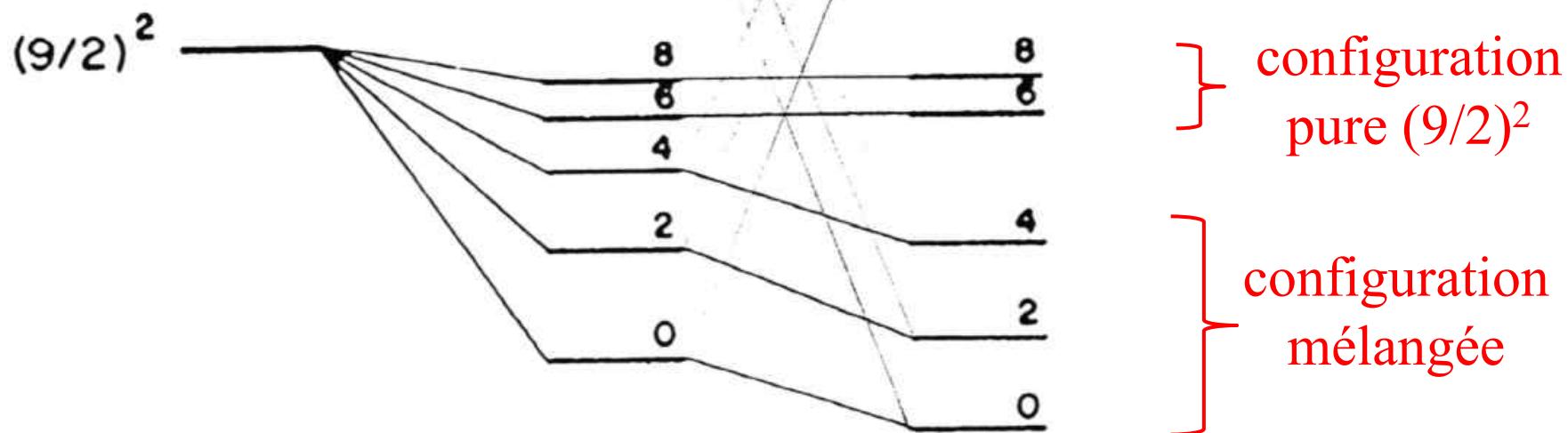
Configuration $[\text{n}: (1\text{d}_{5/2})^2] \rightarrow J^P = 0^+, 2^+, 4^+$



Mélange de configurations (1)

- Les éléments non diagonaux de H_1 peuvent coupler des états $|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$ de différentes configurations
 - Les états propres de l'hamiltonien total H_0+H_1 deviennent des combinaisons linéaires des états non perturbés $|\Psi_{\Gamma}^{(0)}\rangle$ et ne correspondent plus nécessairement à des configurations définies !
- Ces éléments non diagonaux ne peuvent être non nuls qu'entre des états de même nombres quantiques P, J, M, I, M_I , car H_1 doit être un vrai scalaire qui conserve la parité P , le moment cinétique total J et l'isospin total I
 - Précédemment on a réduit l'espace des états \mathcal{E} du noyau à un sous-espace \mathcal{E}_a correspondant à une configuration “a” avec deux nucléons de valence; dans ce cas H_1 n'avait pas d'élément non diagonal dans ce sous-espace

Mélange de configurations (2)



$$H = H_0$$

$$H = H_0 + H_1$$

H diagonalisé
séparément dans
 $\mathcal{E}_{(9/2)^2}$ et $\mathcal{E}_{(5/2)^2}$

$$H = H_0 + H_1$$

H diagonalisé dans
l'espace complet
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(9/2)^2} \otimes \mathcal{E}_{(5/2)^2}$

Cas simple: mélange de deux états (1)

- Deux états non perturbés $|\Psi_i^{(0)}\rangle$ ($i=1,2$):

$$H_0 |\Psi_i^{(0)}\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(0)}\rangle$$

- Dans la base $\{|\Psi_i^{(0)}\rangle\}$:

$$H = H_0 + H_1 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & A \\ A^* & E_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^\dagger = H_1 \quad H^\dagger = H$$

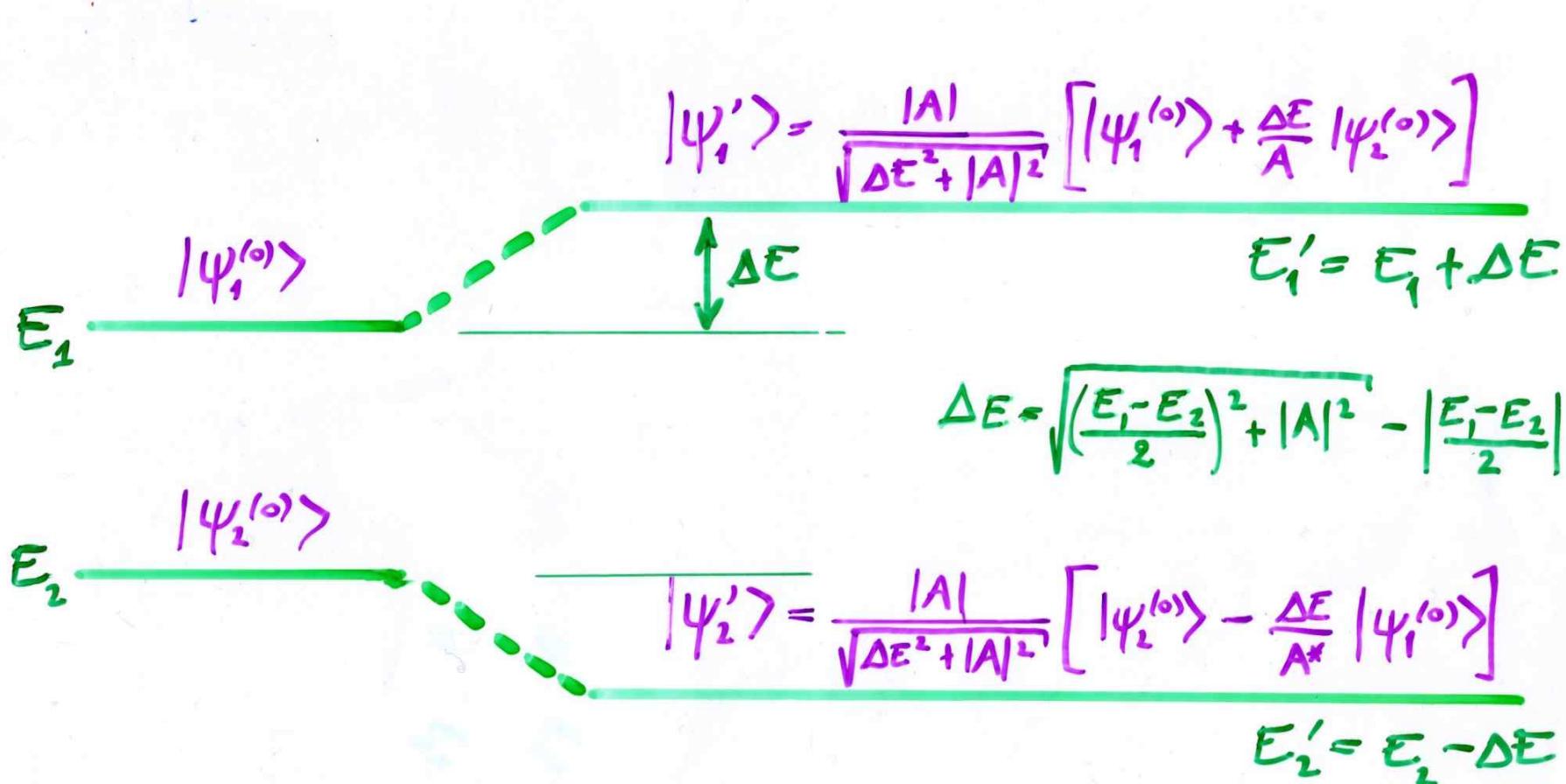
- Diagonalisation de H :

– on cherche les états propres $|\Psi'\rangle$ et les valeurs propres E' de H

$$|\Psi'\rangle = a |\Psi_1^{(0)}\rangle + b |\Psi_2^{(0)}\rangle \quad \text{tel que} \quad H |\Psi'\rangle = E' |\Psi'\rangle$$

$$\begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Cas simple: mélange de deux états (2)

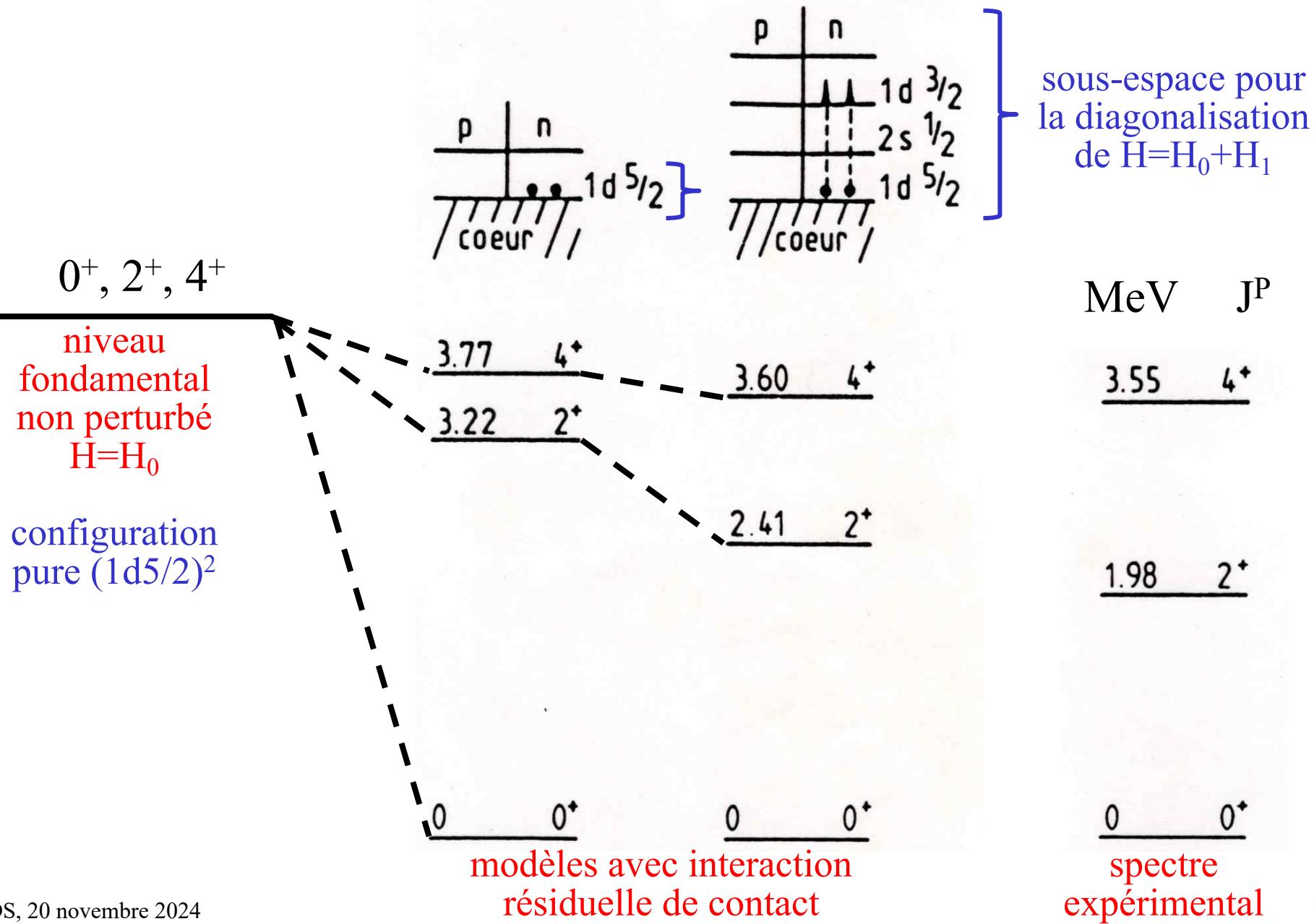


Cas limites:

$$E_1 - E_2 \ll |A| \Rightarrow \Delta E \approx |A| \quad \text{et} \quad |\langle \psi_j' | \psi_i^{(0)} \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$E_1 - E_2 \gg |A| \Rightarrow \Delta E \approx 0 \quad \text{et} \quad |\psi_j'\rangle \approx |\psi_j^{(0)}\rangle$$

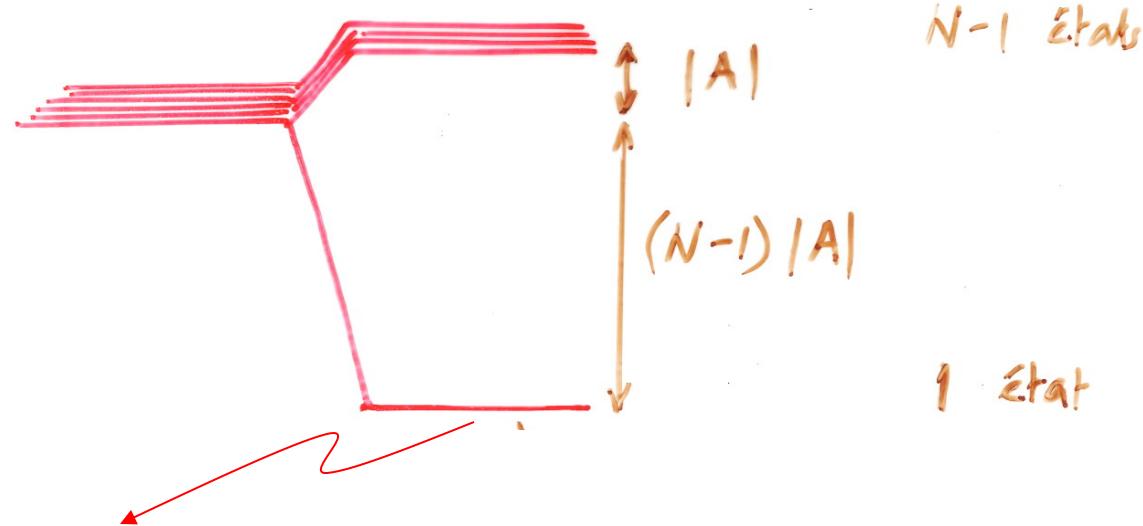
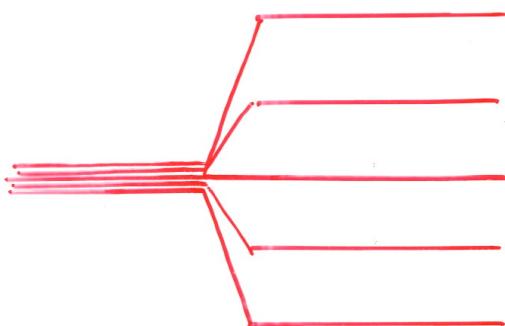
Premiers niveaux d'énergie de ^{18}O



Mélange de N états dégénérés

$$H = \begin{pmatrix} E & A & & & \\ A^* & E & A & & \\ & A^* & E & A & \\ & & A^* & E & A \\ & & & A^* & E \end{pmatrix} \quad \text{O}$$

$$H = \begin{pmatrix} E & A & A & A & A & \dots \\ A^* & E & A & A & A & \dots \\ & A^* & E & A & A & \dots \\ & & A^* & E & A & \dots \\ & & & A^* & E & \dots \\ & & & & \vdots & \end{pmatrix}$$



$$|\Psi' \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|\Psi_1^{(0)} \rangle + |\Psi_2^{(0)} \rangle + \dots + |\Psi_N^{(0)} \rangle)$$

état mélangé symétrique (cohérence)
 → phénomène “collectif”

Moments électriques multipolaires

- Energie d'interaction d'un noyau dans un champ électrique extérieur

$$W = \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$\rho(\vec{r})$ = densité de charge du noyau
 $\phi(\vec{r})$ = potentiel électrique extérieur

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = Ze$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$
$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = 0$$

- Décomposition sur la base des harmoniques sphériques

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} f_{\ell m}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

- Moments électriques multipolaires

$$Q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) d^3\vec{r}$$

$$W = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} Q_{\ell m}$$

$Q_{\ell m}$ = coefficients caractérisant la distribution de charge
 $\phi_{\ell m}$ = coefficients caractérisant le potentiel extérieur

Moments électriques multipolaires

- Base des états du noyau:

$\{|J, M, \dots\rangle\}$ états propres de H, \vec{J}^2, J_z, \dots

$$Q_{\ell m} = e \sum_{i=1}^Z \langle J, M, \dots | r_i^\ell Y_\ell^m(\theta_i, \varphi_i) | J, M, \dots \rangle$$

- Propriétés des harmoniques sphériques:

$$\langle J, M, \dots | Y_\ell^m(\theta_i, \varphi_i) | J', M', \dots \rangle = 0 \quad \text{sauf si } M = m + M' \text{ et } |J - J'| \leq \ell \leq J + J'$$

- Donc:

$$Q_{\ell m} = 0 \quad \text{si } m \neq 0 \text{ ou si } \ell > 2J$$

- De plus: $|J, M, \dots\rangle$ de parité définie
 Y_ℓ^m de parité $(-1)^\ell$

$$\Rightarrow Q_{\ell 0} = 0 \quad \text{si } \ell \text{ impair}$$