

Appariement des nucléons identiques

- Fait d'expérience:

Tous les noyaux pair-pair ont $J^P = 0^+$

- On améliore donc le modèle:

- addition d'interactions résiduelles entre paires de nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$

$$H_{\text{noyau}} = \sum_{i=1}^A H_i + \sum_{\substack{j,k \\ j>k}}^{\text{niveaux incomplets}} V_{jk}$$

- on abandonne donc la stricte indépendance des nucléons

- l'interaction résiduelle V_{jk} est telle qu'une paire de nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ est davantage liée si

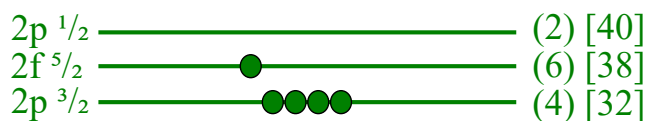
$$\vec{J}_{\text{paire}} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{0}$$

- l'énergie d'appariement croît avec la valeur de ℓ

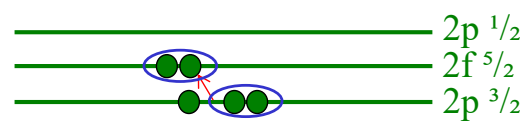
Energie d'appariement

- Exemple du $^{61}_{28}\text{Ni}$

- configuration de l'état fondamental pour les 33 neutrons



Prédiction sans appariement
 $J^P = 5/2^-$

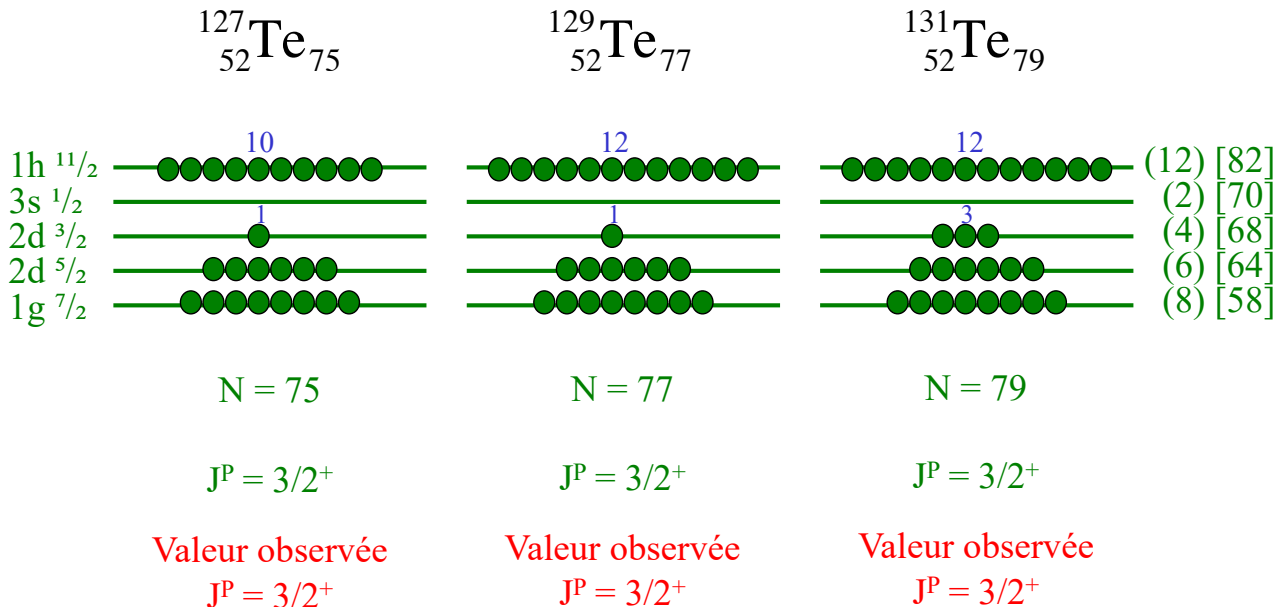


Prédiction avec appariement
 $J^P = 3/2^-$

Valeur observée
 $J^P = 3/2^-$
 en faveur du modèle avec
 appariement qui croît avec ℓ

Energie d'appariement

- Isotopes du $_{52}\text{Te}$ avec N impair
 - prédictions du modèle avec appariement qui croît avec ℓ



Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

Modèle à nucléons célibataires
= modèle à nucléons indépendants + appariement

- Règles concernant J^P de l'état fondamental d'un noyau $^A_Z\text{X}_N$

- ① N et Z pairs
 \Rightarrow tous les nucléons appariés $\Rightarrow J^P = 0^+$
- ② A impair
 \Rightarrow un seul nucléon non-apparié sur niveau $n\ell j \Rightarrow J = j, P = (-1)^\ell$
- ③ Energie d'appariement augmente avec ℓ
 \Rightarrow possible interversion de l'ordre de remplissage des niveaux
- ④ N et Z impairs
 \Rightarrow deux nucléons non-appariés sur les niveaux $n_1\ell_1 j_1$ et $n_2\ell_2 j_2$
 $\Rightarrow |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, P = (-1)^{\ell_1 + \ell_2}$

- les propriétés du noyau sont essentiellement déterminées par le(s) nucléon(s) non-appariés, appelés **nucléons célibataires**

Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

- Règle 1:
 - aucune exception !

- Règles 2 et 3:
 - quelques rares exceptions (noyaux non-sphériques)

| Noyau | J prédit | J observé |
|-----------------------|----------|-----------|
| $^{19}_9\text{F}$ | 5/2 | 1/2 |
| $^{21}_{11}\text{Na}$ | 5/2 | 3/2 |
| $^{23}_{11}\text{Na}$ | 5/2 | 3/2 |
| $^{55}_{25}\text{Mn}$ | 7/2 | 5/2 |

- Règle 4:
 - très peu de noyaux stables avec Z et N impairs

| Noyau | $n_p \ell_p j_p$ | $n_n \ell_n j_n$ | J^P prédit | J^P observé |
|---------------------|------------------|------------------|----------------------|---------------|
| $^2_1\text{H}_1$ | $1s^{1/2}$ | $1s^{1/2}$ | $0^+, 1^+$ | 1^+ |
| $^6_3\text{Li}_3$ | $1p^{3/2}$ | $1p^{3/2}$ | $0^+, 1^+, 2^+, 3^+$ | 1^+ |
| $^{10}_5\text{B}_5$ | $1p^{3/2}$ | $1p^{3/2}$ | $0^+, 1^+, 2^+, 3^+$ | 3^+ |
| $^{14}_7\text{N}_7$ | $1p^{1/2}$ | $1p^{1/2}$ | $0^+, 1^+$ | 1^+ |

OS, 13 novembre 2024

140

Moment magnétique dipolaire d'un nucléon

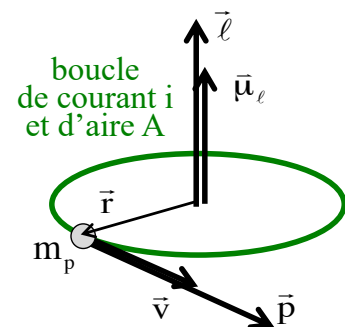
Contribution orbitale

- classiquement, pour un proton

$$\|\vec{\mu}_\ell\| = iA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m_p} r p \Rightarrow \vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2m_p} \vec{\ell}$$

$$\text{magnéton nucléaire} = \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 3.15 \times 10^{-14} \text{ MeV/T}$$

$$\vec{\mu}_\ell = g_\ell \mu_N \frac{\vec{\ell}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{pour proton} \\ 0 & \text{pour neutron} \end{cases}$$



Contribution intrinsèque (due au spin)

$$\vec{\mu}_s = g_s \mu_N \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_s = \begin{cases} +5.5857 & \text{pour proton} \\ -3.8261 & \text{pour neutron} \end{cases}$$

g_s = facteurs de Landé

Moment magnétique dipolaire total

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$$

– énergie d'interaction dans champ magnétique: $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

OS, 13 novembre 2024

141

Moment magnétique de l'électron

- Moment magnétique dipolaire intrinsèque de l'électron

$$\vec{\mu} = g \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \Rightarrow \mu_z = \pm \frac{g}{2} \mu_B \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{g}{2} \mu_B} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \text{ magnéton de Bohr}$$

– Pour l'électron (particule de spin $\frac{1}{2}$ sans structure interne), la théorie de Dirac implique $g \cong 2$ et donc $\mu \cong \mu_B$

- Prédiction d'électrodynamique quantique (QED)

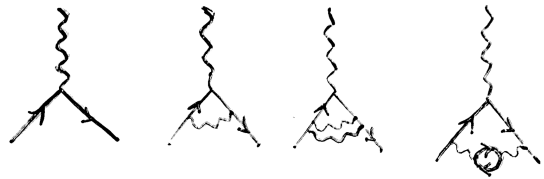
$$\frac{\mu}{\mu_B} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) - 0.328478966 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.1765 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 - \dots$$

$$= 1.00115965218279(771)$$

- Valeur mesurée:

$$\frac{\mu}{\mu_B} = 1.00115965218076(27)$$

– impressionnant test de la QED !



- Le fait que le proton et le neutron ont $g_s \neq 2$ prouve qu'ils ont une structure interne (les quarks !)

Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

- Valeurs moyennes:

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_x \rangle &= 0 \\ \langle \vec{j}_y \rangle &= 0 \\ \langle \vec{j}_z \rangle &= m\hbar \\ \langle \vec{j}^2 \rangle &= j(j+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{\ell}^2 \rangle &= \ell(\ell+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{s}^2 \rangle &= s(s+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{\ell} \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2} (j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1))\hbar^2 \\ \langle \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1))\hbar^2 \end{aligned}$$

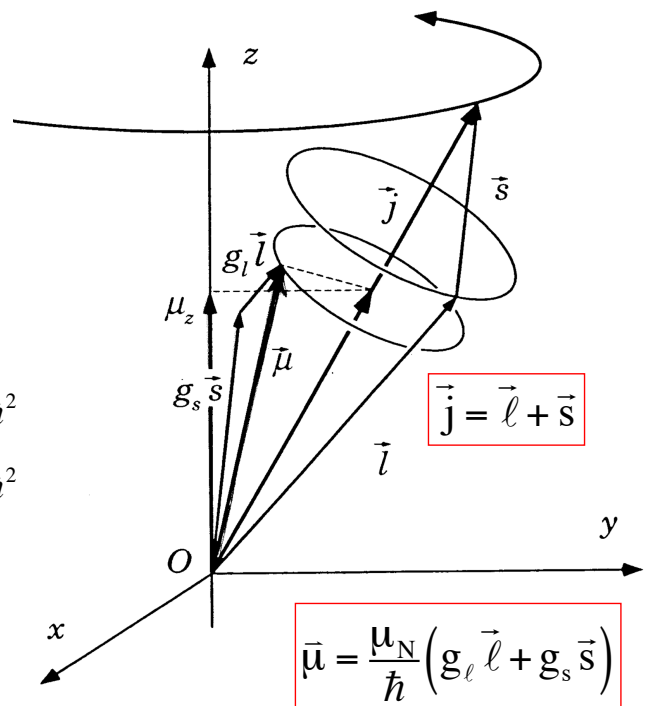
– vecteur \vec{j} :

- norme constante/fixe et angle constant/fixe avec l'axe z

– vecteur $\vec{\ell}$ ou \vec{s} ,

ou combinaison linéaire de $\vec{\ell}$ ou \vec{s} (par exemple moment magnétique $\vec{\mu}$):

- norme constante/fixe et angle constant/fixe avec le vecteur \vec{j}



Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell j m$

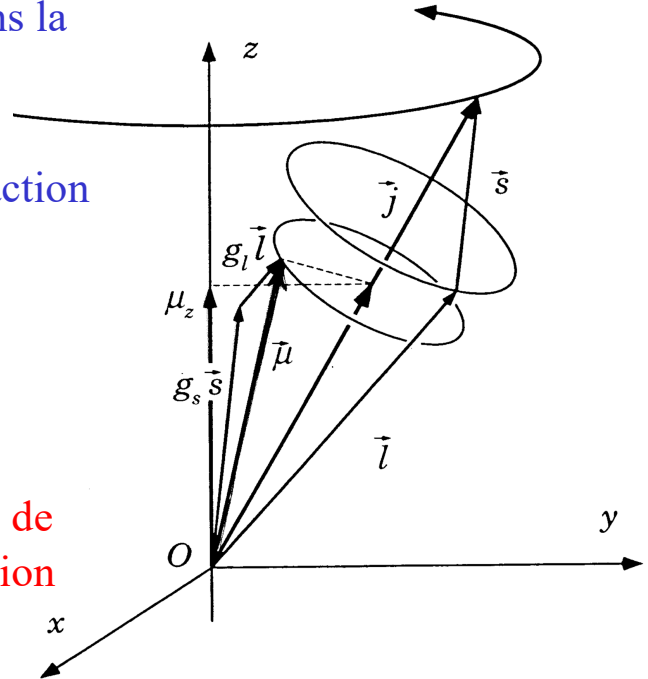
- Axe de quantification z choisi dans la direction du champ magnétique B extérieur
- On s'intéresse à l'énergie d'interaction

$$W = -\langle \vec{\mu} \cdot \vec{B} \rangle = -\langle \mu_z \rangle B_z$$

donc à la valeur moyenne de μ_z

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle$$

théorème de la projection



valeur moyenne de $\mu_z =$ projection sur z de la projection de $\vec{\mu}$ sur \vec{j}

Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell j m$

$$\vec{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s}) \Rightarrow \langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} \frac{\langle g_\ell \vec{\ell} \cdot \vec{j} + g_s \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle$$

$$\langle \mu_z \rangle = \begin{cases} \frac{\mu_N m}{2(j+1)} (g_\ell (2j+3) - g_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N m}{2j} (g_\ell (2j-1) + g_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases} = m f(I_3, \ell, j)$$

$I_3 = 3^{\text{ème}}$ composante de l'isospin (+1/2 pour le proton, -1/2 pour le neutron)

- Moment magnétique total de deux nucléons identiques appariés ($J_{\text{paire}} = 0$, $M_{\text{paire}} = 0$) sur un même niveau $n\ell j$:

$$\langle \mu_z^{\text{paire}} \rangle = \langle \mu_{z1} \rangle + \langle \mu_{z2} \rangle = (m_1 + m_2) f(I_3, \ell, j) = M^{\text{paire}} f(I_3, \ell, j) = 0$$

- Moment magnétique total d'un noyau de A nucléons: $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \mu_{zi} \rangle = \sum_{\text{nucléons célibataires}} \langle \mu_{zi} \rangle$