

# Appariement des nucléons identiques

- Fait d'expérience:

Tous les noyaux pair-pair ont  $J^P = 0^+$

- On améliore donc le modèle:

- addition d'interactions résiduelles entre paires de nucléons identiques sur un même niveau  $n\ell j$

- on abandonne donc la stricte indépendance des nucléons

- l'interaction résiduelle  $V_{jk}$  est telle qu'une paire de nucléons identiques sur un même niveau  $n\ell j$  est davantage liée si

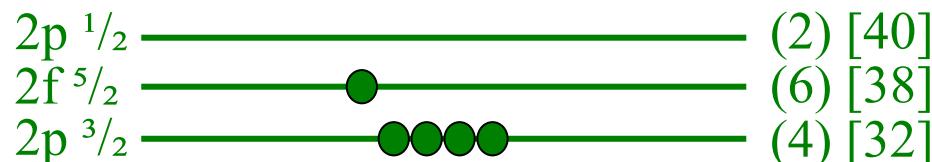
$$H_{\text{noyau}} = \sum_{i=1}^A H_i + \sum_{\substack{j,k \\ j>k}}^{\text{niveaux incomplets}} V_{jk}$$

$$\vec{J}_{\text{paire}} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{0}$$

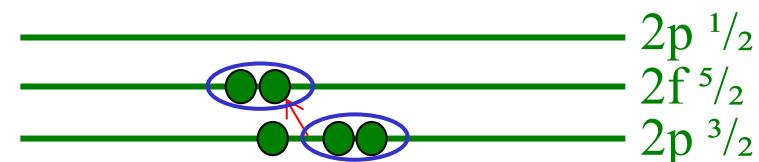
- l'énergie d'appariement croît avec la valeur de  $\ell$

# Energie d'appariement

- Exemple du  $^{61}_{28}\text{Ni}$ 
  - configuration de l'état fondamental pour les 33 neutrons



Prédiction sans appariement  
 $J^P = 5/2^-$

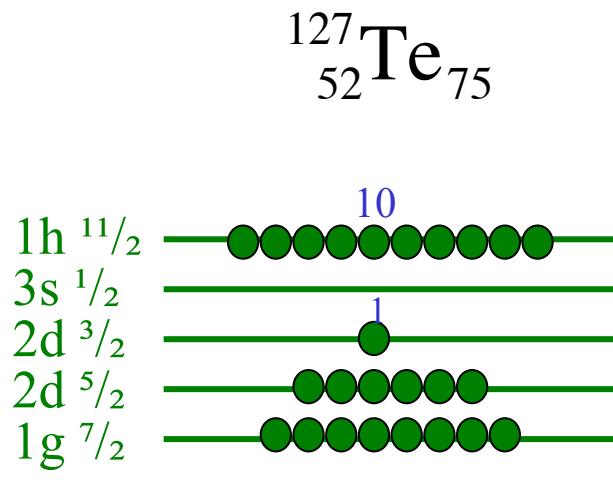


Prédiction avec appariement  
 $J^P = 3/2^-$

Valeur observée  
 $J^P = 3/2^-$   
en faveur du modèle avec  
appariement qui croît avec  $\ell$

# Energie d'appariement

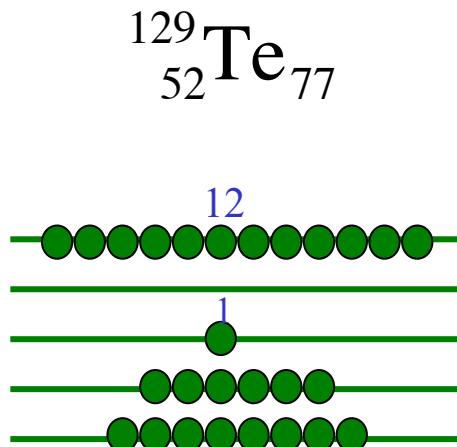
- Isotopes du  $^{52}\text{Te}$  avec N impair
  - prédictions du modèle avec appariement qui croît avec  $\ell$



N = 75

$J^P = 3/2^+$

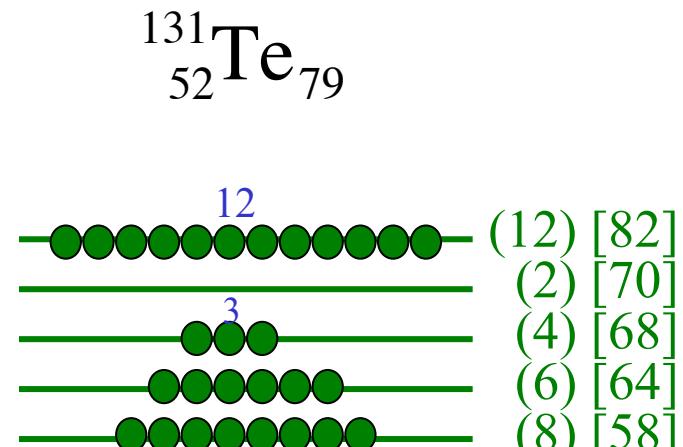
Valeur observée  
 $J^P = 3/2^+$



N = 77

$J^P = 3/2^+$

Valeur observée  
 $J^P = 3/2^+$



N = 79

$J^P = 3/2^+$

Valeur observée  
 $J^P = 3/2^+$

# Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

Modèle à nucléons célibataires

= modèle à nucléons indépendants + appariement

- Règles concernant  $J^P$  de l'état fondamental d'un noyau  ${}^A_Z X_N$ 
  - ① N et Z pairs  
⇒ tous les nucléons appariés ⇒  $J^P = 0^+$
  - ② A impair  
⇒ un seul nucléon non-apparié sur niveau  $n\ell j$  ⇒  $J = j$ ,  $P = (-1)^\ell$
  - ③ Energie d'appariement augmente avec  $\ell$   
⇒ possible interversion de l'ordre de remplissage des niveaux
  - ④ N et Z impairs  
⇒ deux nucléons non-appariés sur les niveaux  $n_1\ell_1j_1$  et  $n_2\ell_2j_2$   
⇒  $|j_1-j_2| \leq J \leq j_1+j_2$ ,  $P = (-1)^{\ell_1+\ell_2}$
- les propriétés du noyau sont essentiellement déterminées par le(s) nucléon(s) non-appariés, appelés **nucléons célibataires**

# Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

- Règle 1:
  - aucune exception !
- Règles 2 et 3:
  - quelques rares exceptions (noyaux non-sphériques)
- Règle 4:
  - très peu de noyaux stables avec Z et N impairs

Noyau	J prédict	J observé
$^{19}_9\text{F}$	5/2	1/2
$^{21}_{11}\text{Na}$	5/2	3/2
$^{23}_{11}\text{Na}$	5/2	3/2
$^{55}_{25}\text{Mn}$	7/2	5/2

Noyau	$n_p \ell_{p,j_p}$	$n_n \ell_{n,j_n}$	$J^P$ prédict	$J^P$ observé
$^2_1\text{H}_1$	1s <sup>1/2</sup>	1s <sup>1/2</sup>	0 <sup>+</sup> , 1 <sup>+</sup>	1 <sup>+</sup>
$^6_3\text{Li}_3$	1p <sup>3/2</sup>	1p <sup>3/2</sup>	0 <sup>+</sup> , 1 <sup>+</sup> , 2 <sup>+</sup> , 3 <sup>+</sup>	1 <sup>+</sup>
$^{10}_5\text{B}_5$	1p <sup>3/2</sup>	1p <sup>3/2</sup>	0 <sup>+</sup> , 1 <sup>+</sup> , 2 <sup>+</sup> , 3 <sup>+</sup>	3 <sup>+</sup>
$^{14}_7\text{N}_7$	1p <sup>1/2</sup>	1p <sup>1/2</sup>	0 <sup>+</sup> , 1 <sup>+</sup>	1 <sup>+</sup>

# Moment magnétique dipolaire d'un nucléon

- Contribution orbitale

- classiquement, pour un proton

$$\|\vec{\mu}_\ell\| = iA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m_p} rp \Rightarrow \vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2m_p} \vec{\ell}$$

$$\text{magnéton nucléaire} = \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 3.15 \times 10^{-14} \text{ MeV/T}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_\ell = g_\ell \mu_N \frac{\vec{\ell}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{pour proton} \\ 0 & \text{pour neutron} \end{cases}}$$

- Contribution intrinsèque (due au spin)

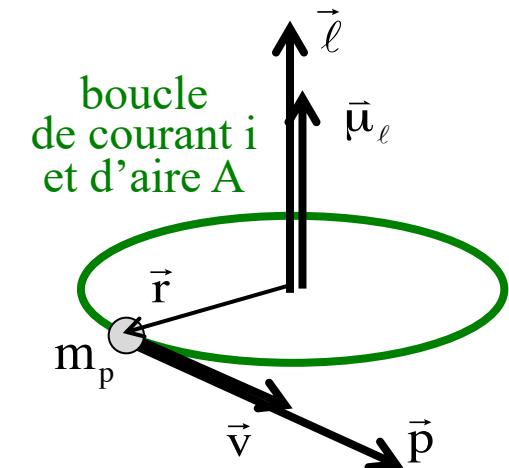
$$\boxed{\vec{\mu}_s = g_s \mu_N \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_s = \begin{cases} +5.5857 & \text{pour proton} \\ -3.8261 & \text{pour neutron} \end{cases}}$$

$g_s$  = facteurs de Landé

- Moment magnétique dipolaire total

$$\boxed{\vec{\mu} = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s}$$

- énergie d'interaction dans champ magnétique:  $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$



# Moment magnétique de l'électron

- Moment magnétique dipolaire intrinsèque de l'électron

$$\vec{\mu} = g \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \Rightarrow \mu_z = \pm \frac{g}{2} \mu_B \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{g}{2} \mu_B} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

magnéton  
de Bohr

- Pour l'électron (particule de spin  $\frac{1}{2}$  sans structure interne), la théorie de Dirac implique  $g \cong 2$  et donc  $\mu \cong \mu_B$

- Prédiction d'électrodynamique quantique (QED)

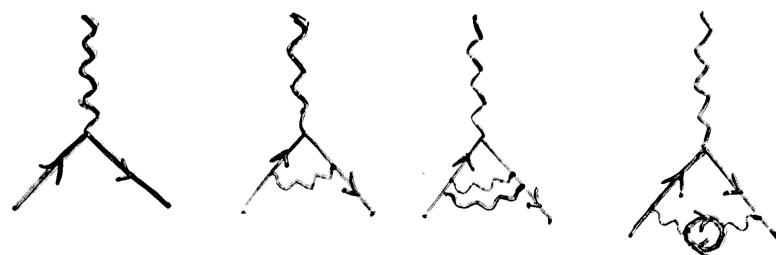
$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_B} &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) - 0.328478966 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.1765 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 - \dots \\ &= 1.00115965218279(771) \end{aligned}$$

- Valeur mesurée:

$$\frac{\mu}{\mu_B} = 1.00115965218076(27)$$

– impressionnant test de la QED !

- Le fait que le proton et le neutron ont  $g_s \neq 2$  prouve qu'ils ont une structure interne (les quarks !)



# Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

- Valeurs moyennes:

$$\langle j_x \rangle = 0$$

$$\langle j_y \rangle = 0$$

$$\langle j_z \rangle = m\hbar$$

$$\langle \vec{j}^2 \rangle = j(j+1)\hbar^2$$

$$\langle \vec{\ell}^2 \rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

$$\langle \vec{s}^2 \rangle = s(s+1)\hbar^2$$

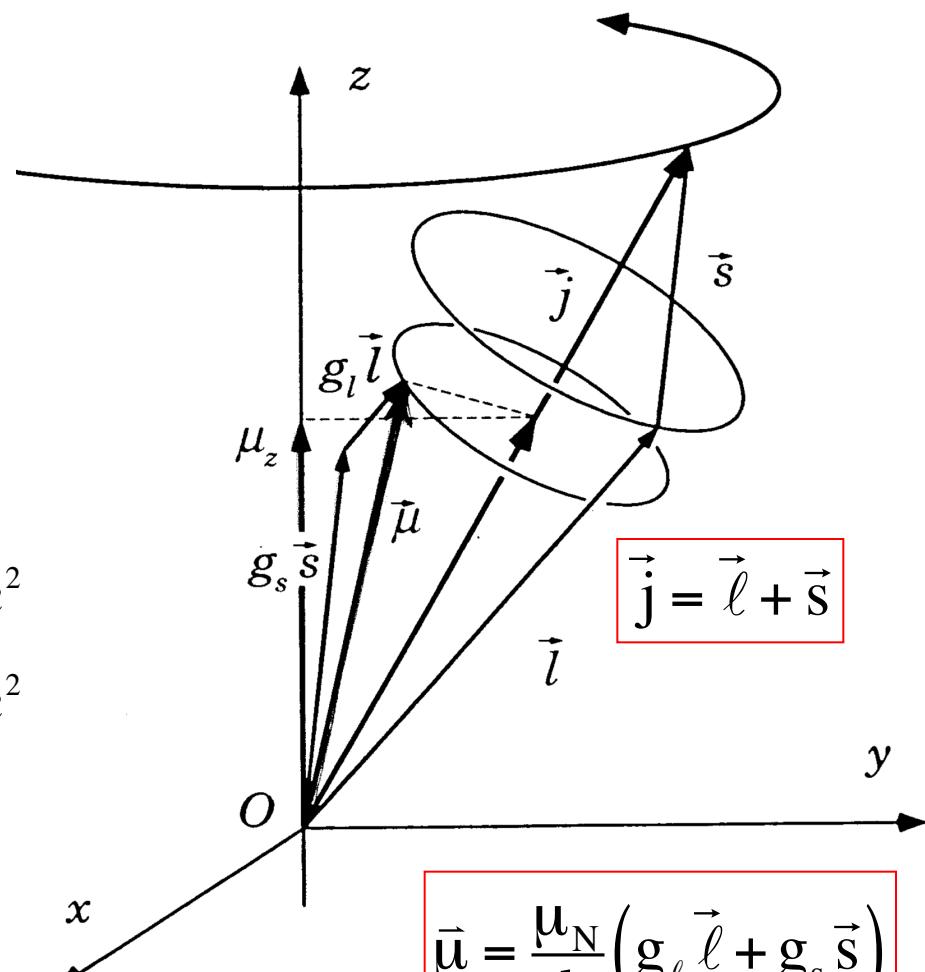
$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)) \hbar^2$$

$$\langle \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)) \hbar^2$$

- vecteur  $\vec{j}$ :

- norme constante/fixe et angle constant/fixe avec l'axe z

- vecteur  $\vec{\ell}$  ou  $\vec{s}$ , ou combinaison linéaire de  $\vec{\ell}$  ou  $\vec{s}$  (par exemple moment magnétique  $\vec{\mu}$ ):
  - norme constante/fixe et angle constant/fixe avec le vecteur  $\vec{j}$



$$\vec{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (\mathbf{g}_\ell \vec{\ell} + \mathbf{g}_s \vec{s})$$

# Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

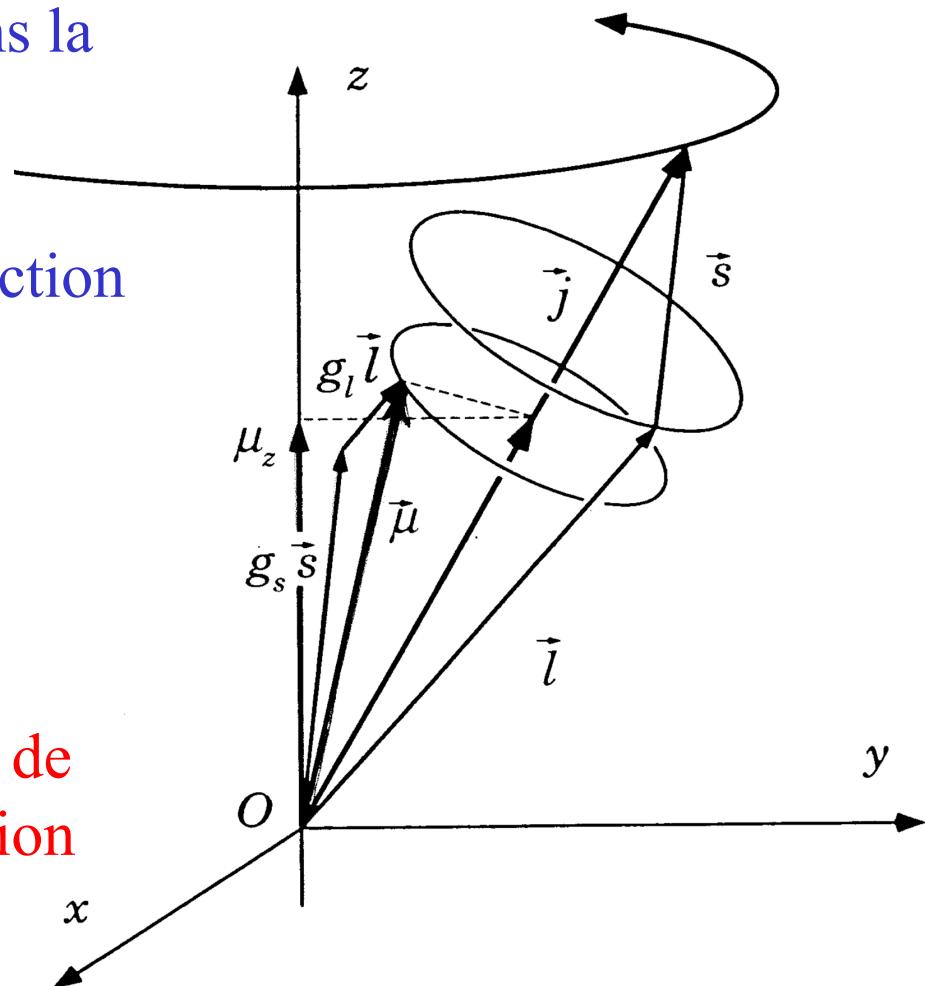
- Axe de quantification z choisi dans la direction du champ magnétique B extérieur
- On s'intéresse à l'énergie d'interaction

$$W = - \langle \vec{\mu} \cdot \vec{B} \rangle = - \langle \mu_z \rangle B_z$$

donc à la valeur moyenne de  $\mu_z$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle$$

théorème de  
la projection



valeur moyenne de  $\mu_z$  = projection sur z de la projection de  $\vec{\mu}$  sur  $\vec{j}$

# Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s}) \Rightarrow \langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} \frac{\langle g_\ell \vec{\ell} \cdot \vec{j} + g_s \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle$$

$$\langle \mu_z \rangle = \begin{cases} \frac{\mu_N m}{2(j+1)} (g_\ell(2j+3) - g_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N m}{2j} (g_\ell(2j-1) + g_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases} = m f(I_3, \ell, j)$$

$I_3$  = 3<sup>ème</sup> composante de l'isospin (+1/2 pour le proton, -1/2 pour le neutron)

- Moment magnétique total de deux nucléons identiques appariés ( $J^{\text{paire}} = 0$ ,  $M^{\text{paire}} = 0$ ) sur un même niveau  $n\ell j$ :

$$\langle \mu_z^{\text{paire}} \rangle = \langle \mu_{z1} \rangle + \langle \mu_{z2} \rangle = (m_1 + m_2) f(I_3, \ell, j) = M^{\text{paire}} f(I_3, \ell, j) = 0$$

- Moment magnétique total d'un noyau de  $A$  nucléons:  $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \mu_{zi} \rangle = \sum_{\text{nucléons célibataires}} \langle \mu_{zi} \rangle$