

Spectre d'énergie d'un nucléon

Notation des niveaux d'énergie:

$n\ell j$

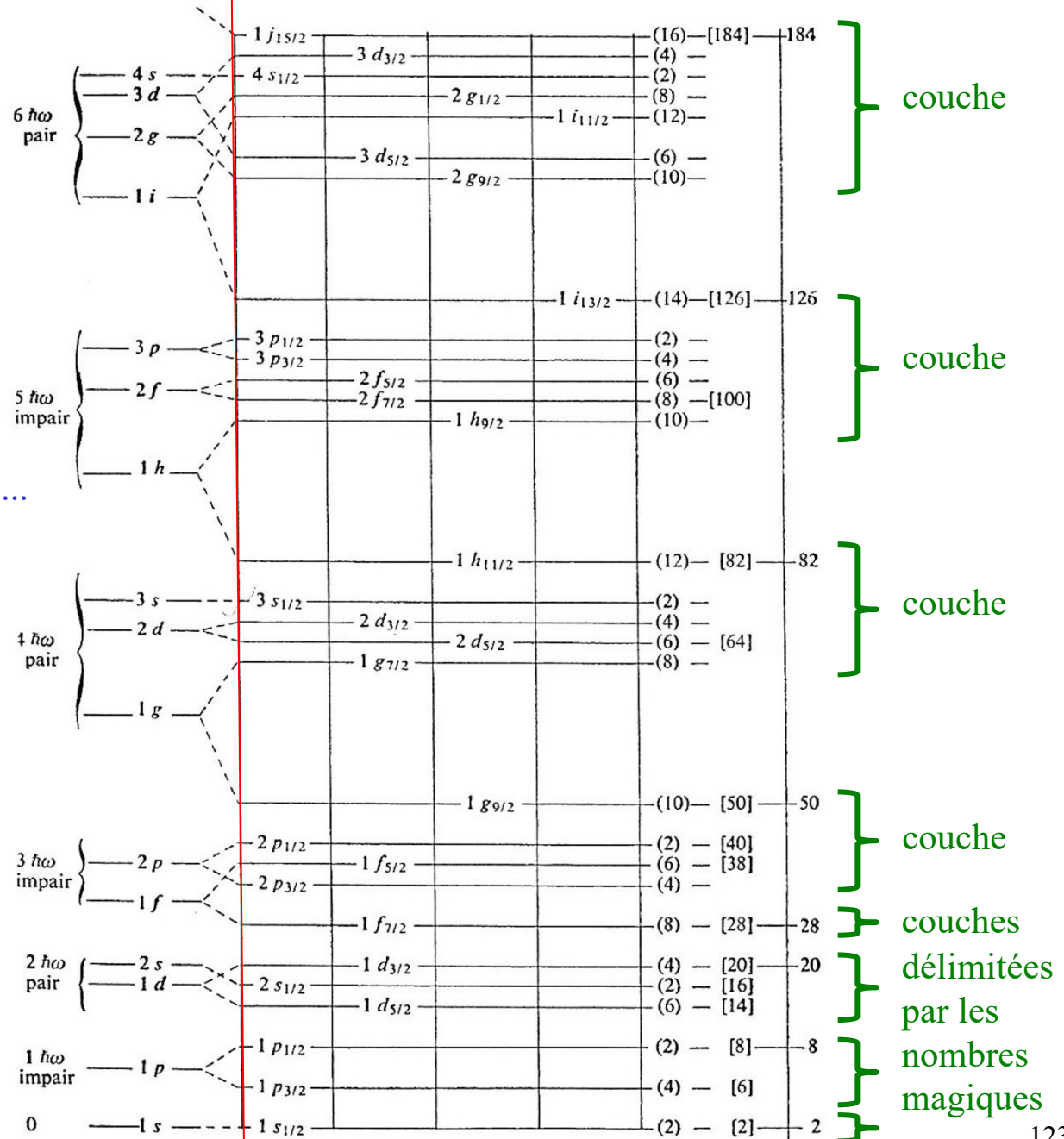
nombre quantique radial $n=1, 2, \dots$
moment cinétique orbital $\ell = s, p, d, \dots$
moment cinétique total $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

Note:

- le spectre diffère légèrement pour les protons et les neutrons si l'on tient compte du potentiel de Coulomb
- le spectre dépend légèrement de A (extension radiale du potentiel)
- interventions possibles des niveaux dans les couches supérieures ($N, Z > 50$)

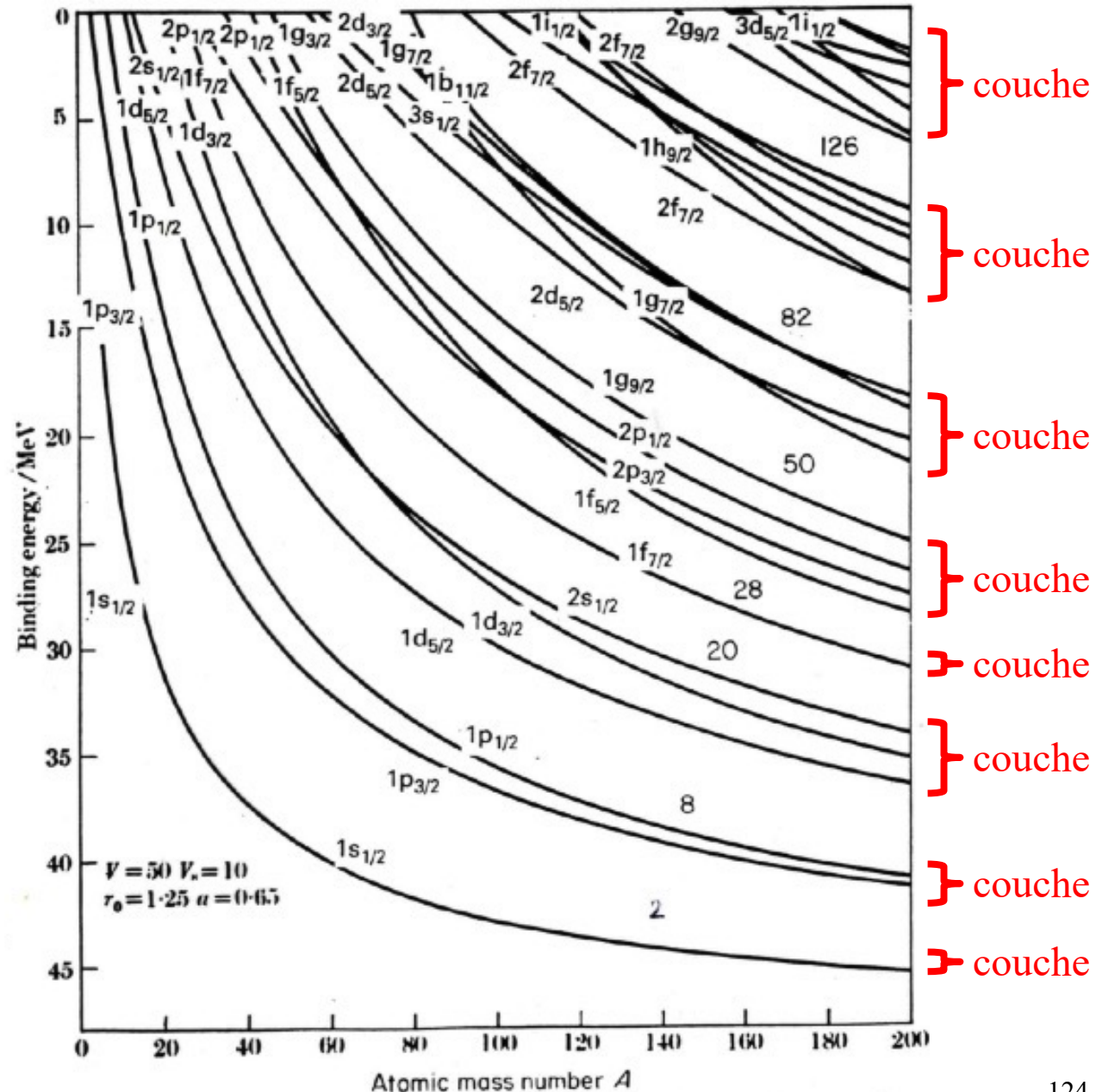
SANS

AVEC couplage spin-orbite



Niveaux d'énergie en fonction de A

- Le potentiel $V(r)$ dépend du rayon du noyau, donc de A
 - La séquence des niveaux d'énergie dépend de A , mais ...
 - ... les nombres magiques restent largement indépendants de A



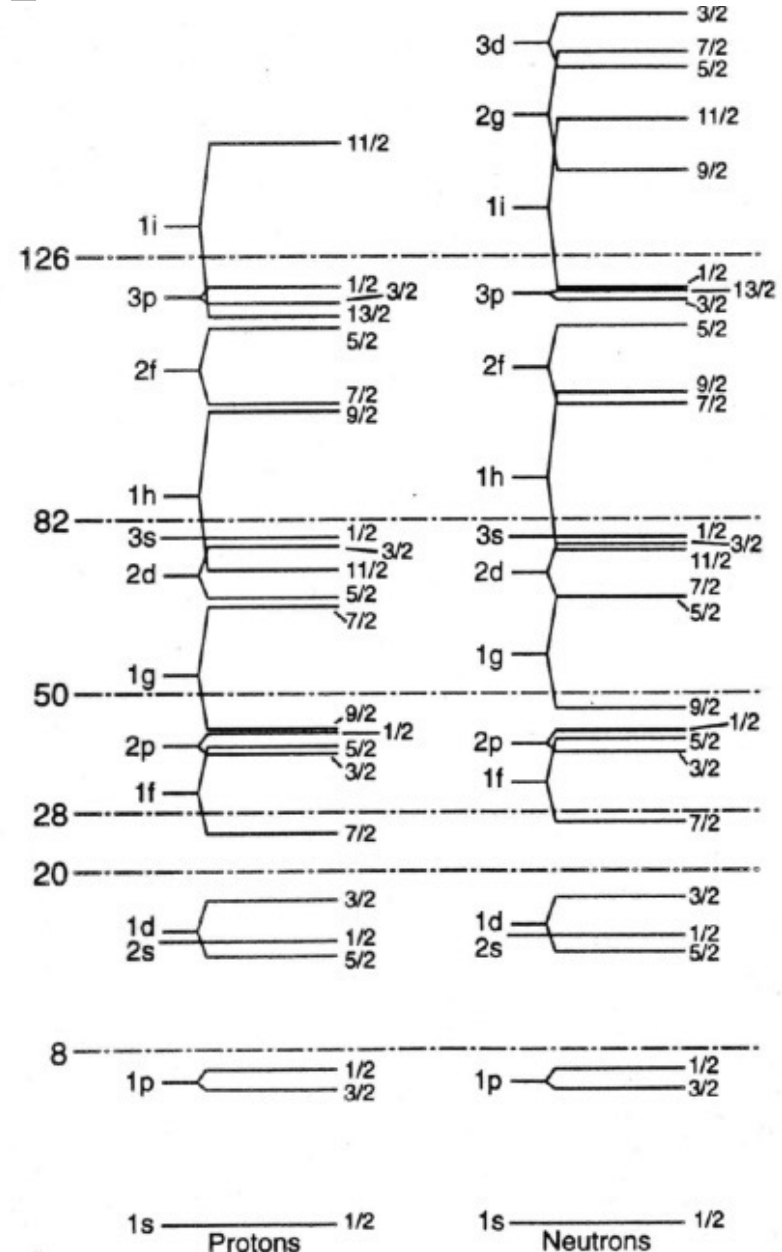
Spectre d'énergie: proton et neutron

- Pour les protons, répulsion Coulombienne:

$$H(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{Saxon-Woods}}(r) + \left(I_3 + \frac{1}{2}\right) V_{\text{Coulomb}}(r) + \xi(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

- $I_3 = 3^{\text{ème}}$ composante isospin (+1/2 proton, -1/2 neutron)

- Les spectres des protons et neutrons sont légèrement différents, mais les nombres magiques restent les mêmes



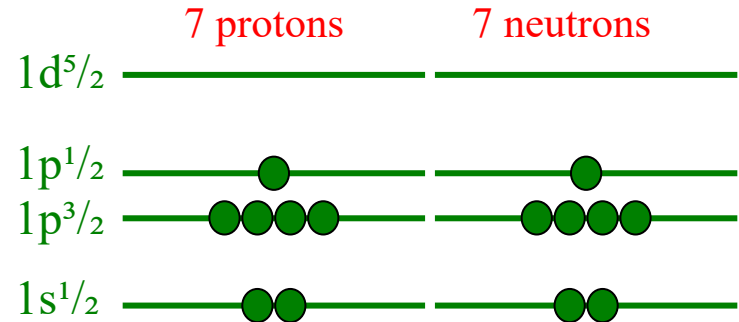
Configuration d'un noyau

- Remplissage des niveaux $n\ell j$ avec Z protons et N neutrons
 - au maximum $2j+1$ protons ou neutrons par niveau $n\ell j$
(dégénérescence par rapport à m et principe d'exclusion)
- Configuration = donnée des nombres quantiques $n\ell j$ de chacun des nucléons du noyau
 - NB: la configuration ne suffit pas à déterminer la fonction d'onde du noyau

- Exemple:

- état fondamental
(configuration d'énergie minimale)
du noyau ^{14}N

- notation: $[\text{p: } (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1 ; \text{n: } (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1]$
- notation abrégée: $[\text{p: } (1p^{1/2})^1 ; \text{n: } (1p^{1/2})^1]$



Energie, parité et spin des noyaux

- Energie totale
(cinétique + potentielle)

$$E = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Parité totale
= parité du noyau

$$P = \prod_{i=1}^A (-1)^{\ell_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A \ell_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Moment cinétique total
= spin du noyau
= spin nucléaire

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i = \sum_{i=1}^A (\vec{\ell}_i + \vec{s}_i)$$

- Pour trouver les valeurs possibles de J, il faut appliquer la règle de composition des moments cinétiques et l'antisymétrisation de la fonction d'onde totale des protons et des neutrons

Spin-parité des noyaux

- Niveau $n\ell j$ complet (occupé par $2j+1$ nucléons identiques)

$$P = \prod_{i=1}^{2j+1} (-1)^\ell = (-1)^{\ell(2j+1)} = +1$$

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{2j+1} \vec{j}_i \quad M = \text{valeur propre de } J_z = \sum_{i=1}^{2j+1} m_i = \sum_{m=-j}^j m = 0$$

principe d'exclusion

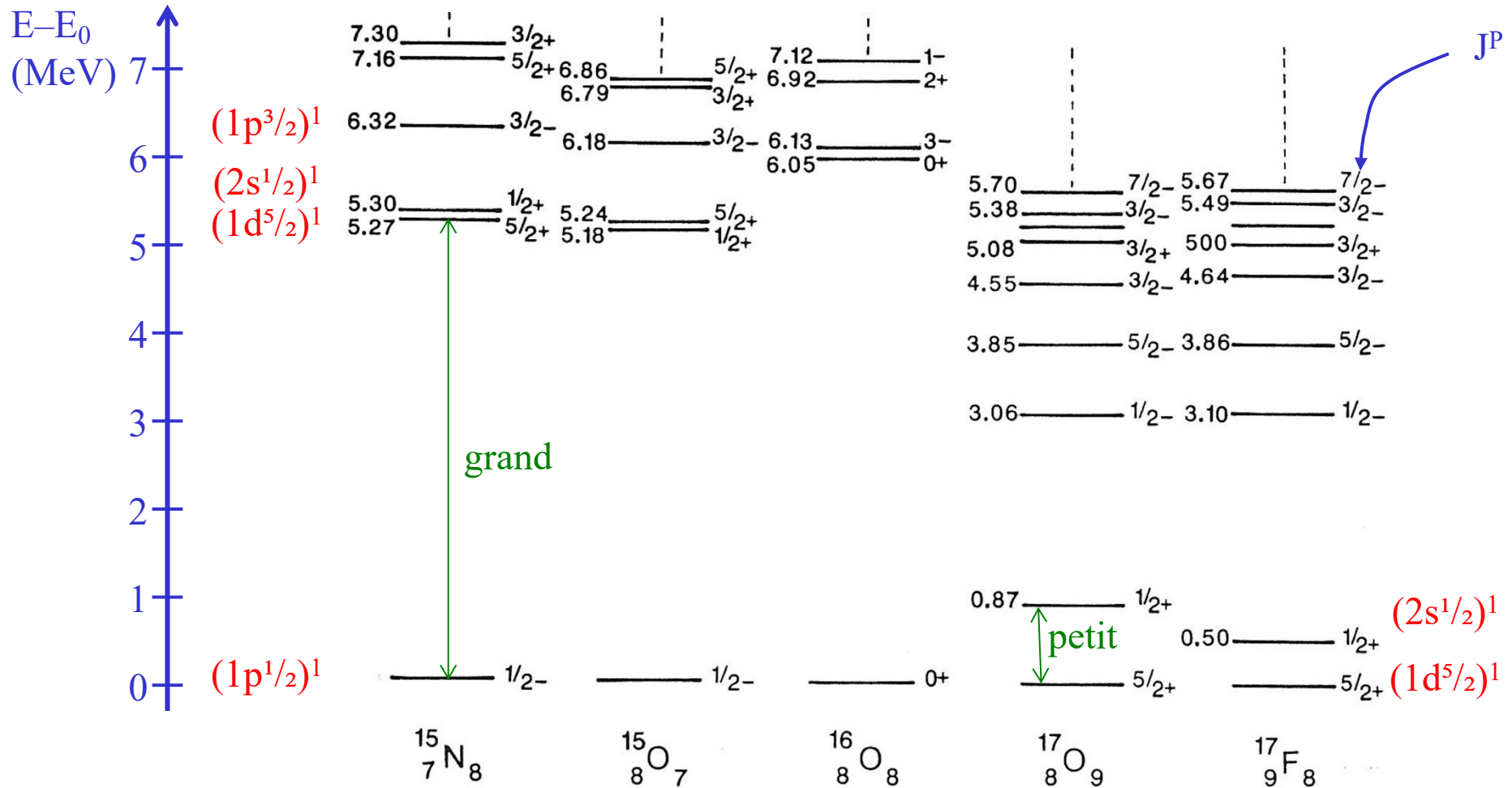
→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets

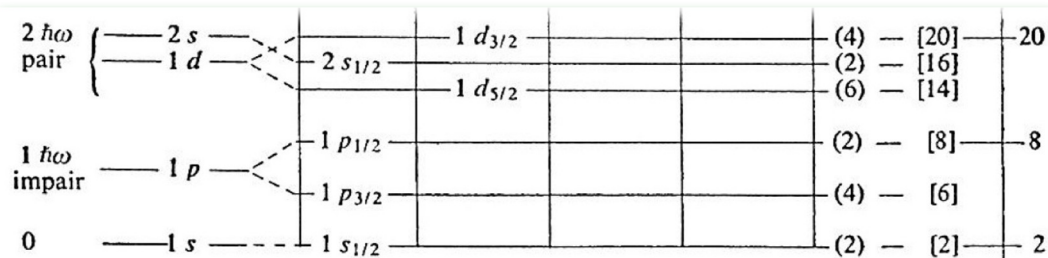
→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets
+ un niveau $n\ell j$ occupé par un seul nucléon
→ état dégénéré $2j+1$ fois, $J = j$, $P = (-1)^\ell$

Spectres expérimentaux (^{15}N , ^{15}O , ^{16}O , ^{17}O , ^{17}F)



Spectre du
nucléon
indépendant

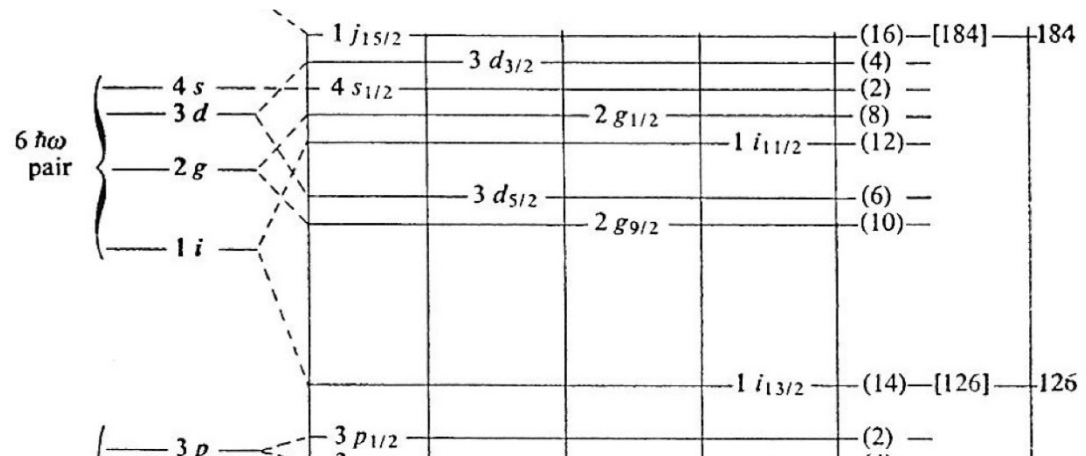


Spectre expérimental du $^{209}_{82}\text{Pb}$

- Couches complètes
(82 protons et 126 neutrons)
+ 1 neutron tout seul dans la
dernière couche ($6 \hbar\omega$)
 - le spectre expérimental des
premiers niveaux excités du
noyau donne la séquence des
niveaux individuels du neutron
dans la dernière couche

J^π	$^{209}_{82}\text{Pb}$	E^* [MeV]	Config.
$1/2^-$		2,152	$(2g_{9/2})^2(3p_{1/2})$
$1/2^+$		2,032	$4s_{1/2}$
$5/2^+$		1,566	$3d_{5/2}$
$15/2^-$		1,422	$1j_{15/2}$
$11/2^+$		0,778	$1i_{11/2}$
$9/2^+$			$2g_{9/2}$

Spectre du
nucléon
indépendant



Moment cinétique total de deux nucléons

- Moment cinétique total
- Deux bases de l'espace des états de moment cinétique total

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$

$$\begin{aligned} \left\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \right\} & \text{ états propres de } \vec{j}_1^2, j_{1z}, \vec{j}_2^2, j_{2z} \\ \left\{ |j_1 j_2 J M\rangle \right\} & \text{ états propres de } \vec{j}_1^2, \vec{j}_2^2, \vec{J}^2, J_z \end{aligned}$$

- Valeurs possibles pour J et M:
- Changements de base:

$$\begin{aligned} |j_1 - j_2| &\leq J \leq j_1 + j_2 && \text{par pas de 1} \\ -J &\leq M \leq J && \text{par pas de 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 J M\rangle &= \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ M=m_1+m_2}} \underline{C_{j_1 j_2}(J, M, m_1, m_2)} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= \sum_{\substack{J \text{ possibles} \\ M=m_1+m_2}} \underline{C_{j_1 j_2}(J, M, m_1, m_2)} |j_1 j_2 J M\rangle \end{aligned}$$

coefficients de Clebsch-Gordan

Coefficients de Clebsch-Gordan

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1	m_2	
m_1	m_2	Coefficients
$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	

$j_1 \quad j_2$
 $1/2 \times 1/2$

	1		
	+1	1	0
+1/2+1/2	1	0	0
	+1/2 -1/2	1/2 1/2	1
	-1/2 +1/2	1/2 -1/2	-1
		-1/2 -1/2	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$2 \times 1/2$

	5/2		
	+5/2	5/2 3/2	
+2 +1/2	1	+3/2 +3/2	
		+2 -1/2	1/5 4/5
		+1 +1/2	4/5 -1/5
			5/2 3/2
			+1/2 +1/2

	+1 -1/2	2/5 3/5	5/2 3/2
	0 +1/2	3/5 -2/5	-1/2 -1/2

	0 -1/2	3/5 2/5	5/2 3/2
	-1 +1/2	2/5 -3/5	-3/2 -3/2

$3/2 \times 1/2$

	2		
	+2	2 1	
+3/2 +1/2	1	+1 +1	
		+3/2 -1/2	1/4 3/4
		+1/2 +1/2	3/4 -1/4
			2 1
			0 0

	+1/2 -1/2	1/2 1/2	2 1
	-1/2 +1/2	1/2 -1/2	-1 -1

	-1/2 -1/2	3/4 1/4	2
	-3/2 +1/2	1/4 -3/4	-2

	-3/2 -1/2	1	
--	-----------	---	--

	+1/2 -1	3/10 8/15	1/6
	-1/2 0	3/5 -1/15	-1/3
	-3/2 +1	1/10 -2/5	1/2

	-1/2 -1	3/5 2/5	5/2
	-3/2 0	2/5 -3/5	-5/2

	-3/2 -1	1	
--	---------	---	--

	-1 -1	2/3 1/3	3
	-2 0	1/3 -2/3	-3

	-2 -1	1	
--	-------	---	--

$j_1 \quad j_2$
 $1 \times 1/2$

	3/2		
	+3/2	3/2 1/2	
+1 +1/2	1	+1/2 +1/2	
		+1 -1/2	1/3 2/3
		0 +1/2	2/3 -1/3
			3/2 1/2
			-1/2 -1/2

2×1

	3		
	+3	3 2	
+2 +1	1	+2 +2	
		+2 0	1/3 2/3
		+1 +1	2/3 -1/3
			3 2 1
			+1 +1 +1

1×1

	2		
	+2	2 1	
+1 +1	1	+1 +1	
		+1 0	1/2 1/2
		0 +1	1/2 -1/2
			2 1 0
			0 0 0

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

[coefficients pour autres valeurs de \$j_1\$ et \$j_2\$](#)

Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_9\text{F}$ de configuration [p: $(1d^{5/2})^1$; n: $(1d^{5/2})^1$]
 - deux nucléons **différents** sur un même niveau avec **$j = 5/2$**
 - dénombrement des états et détermination de leurs valeurs de $M = m_1 + m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

- valeurs possibles pour **J**: 0, 1, 2, 3, 4, 5
- parité totale positive

Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_8\text{O}$ de configuration [n: $(1d^{5/2})^2$]
 - deux nucléons **identiques** sur un même niveau avec $j = 5/2$
 - dénombrement des états et la détermination de leurs valeurs de $M=m_1+m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

états
indiscernables

principe d'exclusion

- valeurs possibles pour J: 0, 2, 4
- parité totale positive

Spectre expérimental du $^{210}_{84}\text{Po}$

- Configuration du $^{210}_{84}\text{Po}$ dans l'état fondamental: [p: $(1h^{9/2})^2$]
 - prédictions du modèle en couches à particule indépendante pour le niveau fondamental
 - valeurs possibles du spin-parité:
 $J^P = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+$
 - niveau fondamental totalement dégénéré
(énergie indépendante de J)
 - spectre expérimental des premiers niveaux du $^{210}_{84}\text{Po}$

