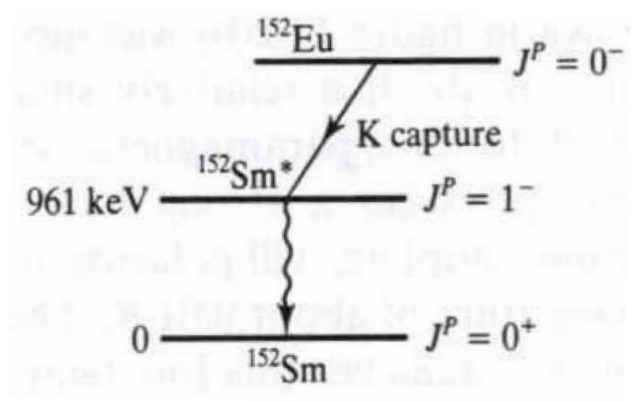
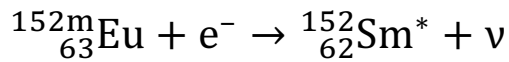


Hélicité du neutrino

Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

- Capture électronique de l'euprimum sur la couche K:



- Moment cinétique total

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J}_{\text{Eu}} + \vec{J}_e + \vec{L}_K = \vec{0} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{0} = \frac{\vec{1}}{2}$$

- Désintégration γ du samarium excité: $^{152}_{62}\text{Sm}^* \rightarrow ^{152}_{62}\text{Sm} + \gamma$
 - On s'intéresse au cas où le photon est émis dans la direction du samarium excité

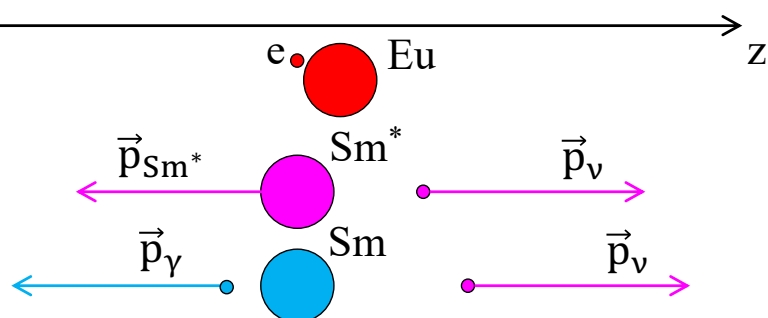
OS, 16 octobre 2024

86

Hélicité du neutrino

Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

- Axe z selon les quantités de mouvement:



- Projection des spins sur l'axe z avec somme égale à $J_{\text{tot},z} = \pm \frac{1}{2}$ (pas de moment cinétique orbital selon z)
 - cas hélicité +1 $\leftarrow s_{\gamma,z} = -1 \quad \rightarrow s_{\nu,z} = +\frac{1}{2}$
 - cas hélicité -1 $\rightarrow s_{\gamma,z} = +1 \quad \leftarrow s_{\nu,z} = -\frac{1}{2}$
- En mesurant la polarisation circulaire des photons, on détermine l'hélicité du neutrino: $H = -1$ (le neutrino est toujours gauche)

OS, 16 octobre 2024

87

Modèle du noyau à particules indépendantes

- Hypothèses:

- ① Chaque nucléon i se meut indépendamment des autres sous l'effet d'un potentiel moyen reflétant l'action des $A-1$ autres nucléons
- ② Ce potentiel moyen ne dépend que de la position du nucléon i
- ③ Ce potentiel a une symétrie sphérique (potentiel central)

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^A V_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V_i \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V(\vec{r}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V(r_i)
 \end{aligned}$$

- Hamiltonien du noyau
(dans le centre de masse)

$$H = \sum_{i=1}^A H_i \quad \text{où} \quad H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(r_i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + V(r_i)$$

Modèle à particules indépendantes (2)

- Fonction d'onde du noyau:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \text{ telle que } H\psi = E\psi$$

- Comme H est une somme de termes H_i agissant sur des variables différentes (\vec{r}_i), on peut séparer les variables et chercher des solutions de la forme

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \dots \psi_A(\vec{r}_A) \quad \text{avec} \quad H_i \psi_i = E_i \psi_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^A E_i = E$$

- On est donc ramené à résoudre le problème d'un « nucléon indépendant » dans un potentiel central
 - détermination des états possibles (et donc du spectre) du nucléon indépendant
- On construit ensuite la fonction d'onde du noyau en respectant l'antisymétrie sous l'échange de deux nucléons identiques (principe d'exclusion de Pauli)

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_A) = -\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_A) \quad \text{pour toute paire } j, k \text{ de nucléons identiques}$$

Fonction d'onde du noyau

- **Fonction d'onde du nucléon j dans l'état k:** $\psi_k(\vec{r}_j)$
 - $j = \underbrace{1, 2, \dots, Z}_{\text{protons}}, \underbrace{Z+1, \dots, A-1, A}_{\text{neutrons}}$ et k numérote les états occupés par les nucléons
- **Fonction d'onde du noyau de Z protons et N = A-Z neutrons**

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{r}_1) & \psi_2(\vec{r}_1) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_1) \\ \psi_1(\vec{r}_2) & \psi_2(\vec{r}_2) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\vec{r}_Z) & \psi_2(\vec{r}_Z) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_Z) \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{Z+1}(\vec{r}_{Z+1}) & \dots & \psi_A(\vec{r}_{Z+1}) \\ \psi_{Z+1}(\vec{r}_{Z+2}) & \dots & \psi_A(\vec{r}_{Z+2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{Z+1}(\vec{r}_A) & \dots & \psi_A(\vec{r}_A) \end{vmatrix}$$

- change de signe sous l'échange de deux nucléons identiques (permutation de deux lignes dans un des déterminants)
- nulle si deux nucléons identiques sont dans le même état (deux colonnes identiques dans un des déterminants)

Particule dans un potentiel central

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \Rightarrow [H, \vec{L}] = 0 \quad \text{moment cinétique } \vec{L} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \text{ conservé}$$

- On cherche les fonctions d'ondes $\psi(r, \theta, \phi)$ telles que

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ \vec{L}^2 \psi &= \ell(\ell+1)\hbar^2 \psi \\ L_z \psi &= m\hbar \psi \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2} \\ \vec{L}^2 &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

- **Solutions:** $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$

- les fonctions angulaires $Y(\theta, \phi)$ sont universelles (harmoniques sphériques)
- les fonctions radiales $R(r)$ dépendent de $V(r)$ et satisfont à

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0 \quad \text{équation radiale}$$

Harmoniques sphériques (1)

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

harmoniques
sphériques

ℓ et m entiers: $\ell = 0, 1, 2, \dots$ et $-\ell \leq m \leq \ell$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell$$

fonctions associées de Legendre,
définies dans l'intervalle $[-1, +1]$

$P_\ell^0(x)$ = polynôme de Legendre

$P_\ell^0(1) = 1$

• Les harmoniques sphériques

- sont les solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} \vec{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ L_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta, \phi) \end{cases} \quad \text{où } \vec{L} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla}$$

- forment une base orthonormée des fonctions définies sur la sphère unité

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_\ell^m(\theta, \phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)^* \sin\theta d\theta d\phi = \delta^{\ell\ell'} \delta^{mm'}$$

Harmoniques sphériques (2)

• Propriétés:

- parité P = inversion d'espace

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$$

$$P Y_\ell^m(\theta, \phi) = Y_\ell^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^m Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

- conjugaison complexe

$$Y_\ell^m(\theta, \phi)^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \phi)$$

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_1^1(\theta, \phi) = -Y_1^{-1*}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -Y_2^{-1*}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = Y_2^{-2*}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_3^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$Y_3^1(\theta, \phi) = -Y_3^{-1*}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{i\varphi}$$

$$Y_3^2(\theta, \phi) = Y_3^{-2*}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta \cos\theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_3^3(\theta, \phi) = -Y_3^{-3*}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta e^{3i\varphi}$$

Particule dans un potentiel central (suite)

- Equations différentielles pour la fonction radiale $R(r)$
(une pour chaque valeur de $\ell = 0, 1, 2, \dots$)

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0$$

- pour chaque ℓ , plusieurs solutions
numérotées $n = 1, 2, \dots$
par ordre croissant d'énergie

$$E \rightarrow E_{n\ell}$$

$$R(r) \rightarrow R_{n\ell}(r)$$

$$\psi(r, \theta, \phi) \rightarrow \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

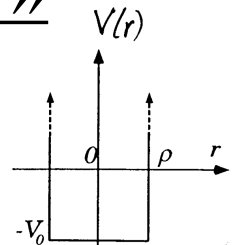
- Un état propre de H , L^2 et L_z d'une particule dans un potentiel central est défini par

- nombre quantique radial $n = 1, 2, \dots$
- nombre quantique orbital (moment cinétique orbital) $\ell = 0, 1, 2, \dots$
- nombre quantique magnétique $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ ($2\ell+1$ valeurs)

Potentiels centraux « simples »

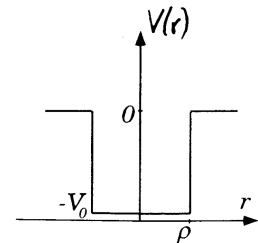
- Puits rectangulaire à paroi infinie

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < \rho \\ \infty & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$



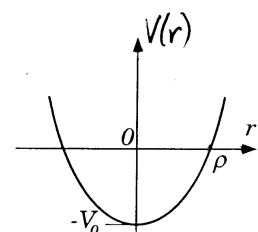
- Puits rectangulaire à paroi finie

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < \rho \\ 0 & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$



- Puits parabolique (oscillateur harmonique)

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{2V_0}{m\rho^2}$$



- Puits coulombien

- inapproprié pour décrire les forces nucléaires

$$V(r) = -\frac{C}{r}$$

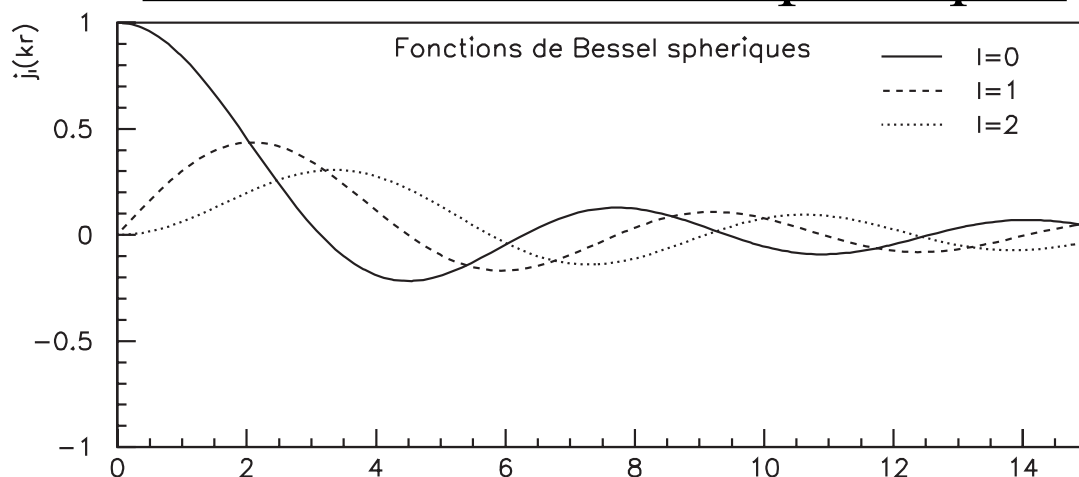
Puits rectangulaire infini

- Equation radiale
pour $r < \rho$, $V(r) = -V_0$
$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + r^2 \overbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)}^{k^2} - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0$$
- Avec $x = kr$
$$\left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) + x^2 - \ell(\ell+1) \right] f(x) = 0$$
 - pour chaque ℓ entier, deux solutions linéairement indép.
$$f(x) = \begin{cases} j_\ell(x) & \text{fonction de Bessel sphérique d'ordre } \ell \\ \eta_\ell(x) & \text{fonction de Neumann sphérique d'ordre } \ell \end{cases}$$
- La solution physique doit être régulière à l'origine \Rightarrow
$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(kr) & \text{si } r < \rho \\ 0 & \text{si } r \geq \rho \end{cases} \quad (A = \text{normalisation})$$
 - continuité en $r = \rho$
$$j_\ell(k\rho) = 0 \quad \text{condition de quantification sur } k$$
- Solutions: $k_{n\ell} = n^{\text{ième}} \text{ zéro de } j_\ell(k\rho) \Rightarrow E_{n\ell} = \frac{\hbar^2 k_{n\ell}^2}{2m} - V_0$
(sans compter le zéro à l'origine)

OS, 16 octobre 2024

96

Fonctions de Bessel sphériques



Fonctions de Bessel

- régulières (c'est-à-dire finies) à l'origine

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}$$

Fonctions de Neumann

- infinies à l'origine

$$\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\eta_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

$$\eta_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3 \sin x}{x^2}$$

Puits rectangulaire fini (1)

- Equation radiale
pour $r \geq \rho$, $V(r) = 0$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + r^2 \overbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}^{-\kappa^2} - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0 \quad \text{car } E < 0 \text{ (états liés)}$$

- Avec $x = i\kappa r$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) + x^2 - \ell(\ell+1) \right] f(x) = 0$$

même équation que précédemment !

- pour chaque ℓ , deux solutions linéairement indépendantes: $j_\ell(x)$ et $\eta_\ell(x)$
- la solution physique doit s'annuler pour $r \rightarrow \infty$, sans oscillations:

fonction de **Hankel** sphérique d'ordre ℓ
 $h_\ell(x) = j_\ell(x) + i \eta_\ell(x)$

- Solution complète:

$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(\kappa r) & \text{si } r < \rho \\ C h_\ell(i\kappa r) & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_0(i\kappa r) &= -\frac{1}{\kappa r} e^{-\kappa r} \\ h_1(i\kappa r) &= i \left(\frac{1}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{\kappa r} \right) e^{-\kappa r} \\ h_2(i\kappa r) &= \left(\frac{3}{\kappa^3 r^3} + \frac{3}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{\kappa r} \right) e^{-\kappa r} \\ &\dots \end{aligned}$$

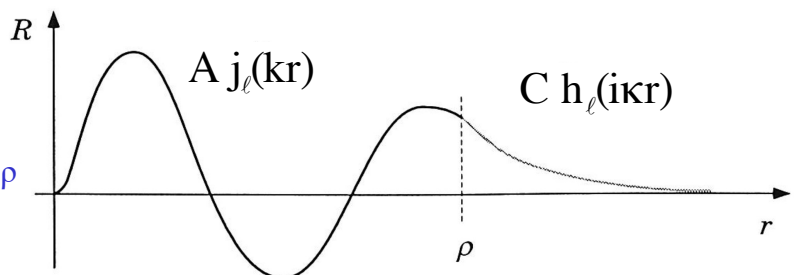
Puits rectangulaire fini (2)

- Pour chaque $\ell = 0, 1, 2, \dots$
 - trois constantes à déterminer
 - A, C et E (ou κ ou \mathcal{K})

$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(\kappa r) & \text{si } r < \rho \\ C h_\ell(i\kappa r) & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$

- trois conditions:

- normalisation de $R(r)$
- continuité de $R(r)$ en $r = \rho$
- continuité de dR/dr en $r = \rho$



- Plusieurs solutions:

- numérotation $n=1, 2, \dots$ par ordre croissant d'énergie
- n = nombre de zéros de $R(r)$
 - sans compter le zéro l'origine, mais y.c. le zéro à l'infini

$$E_{n\ell} = \frac{\hbar^2 k_{n\ell}^2}{2m} - V_0 < E_{n\ell}^{\text{puits infini}}$$

$$E_{n\ell} < 0 \text{ (état lié)}$$

Puits rectangulaire fini (3)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + V(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell+1) \right] R(r) = E R(r)$$

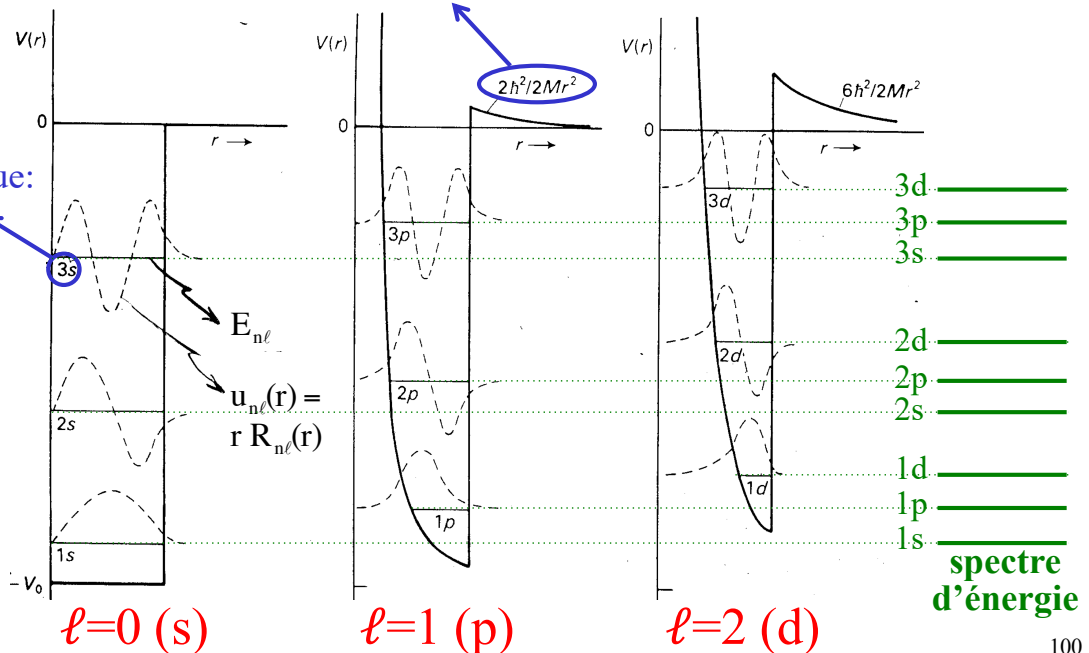
« barrière angulaire » : terme s'ajoutant à $V(r)$

$n\ell$ en notation spectroscopique:

$\ell=0 \leftrightarrow s$
 $\ell=1 \leftrightarrow p$
 $\ell=2 \leftrightarrow d$
 $\ell=3 \leftrightarrow f$
 $\ell=4 \leftrightarrow g$
 $\ell=5 \leftrightarrow h$
 $\ell=6 \leftrightarrow i$
 $\ell=7 \leftrightarrow k$

etc ...

OS, 16 octobre 2024



100

Dégénérescence des niveaux d'énergie

- Le nucléon est une particule de spin $s = 1/2$
- Fonction d'onde d'un état propre de H , L^2 , L_z et S^2 et S_z

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_s^{m_s}$$

état défini par
4 nombres
quantiques

$\left\{ \begin{array}{l} n = \text{nombre quantique radial} \\ \ell = \text{nombre quantique orbital (moment cinétique)} \\ m_\ell = \text{projection du moment cinétique orbital} \\ m_s = \text{projection du spin } s = 1/2 \end{array} \right\}$

nombres
quantiques
magnétiques

$$H \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = E_{n\ell} \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi)$$

énergie $E_{n\ell}$
indépendante
de m_ℓ et m_s !

- Dégénérescence = nombre d'états distincts par niveau $E_{n\ell}$
 $= 2(2\ell+1)$

2 valeurs possibles pour m_s :
 $m_s = \pm 1/2$

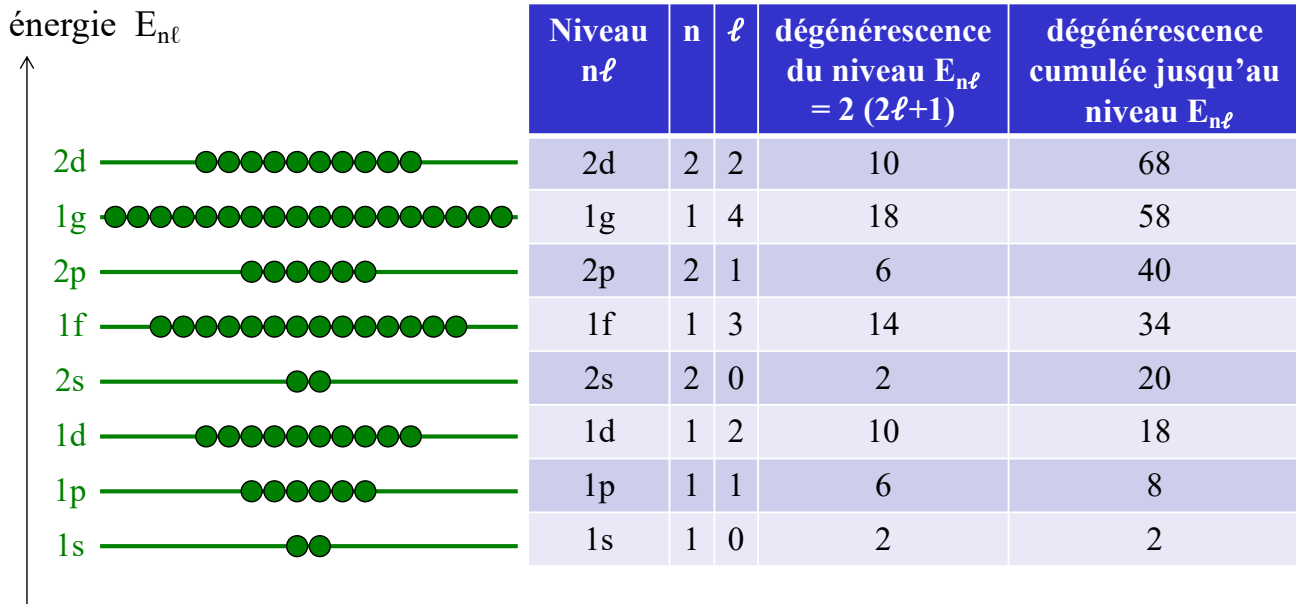
$2\ell+1$ valeurs possibles pour m_ℓ :
 $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$

OS, 16 octobre 2024

101

Remplissage des niveaux d'énergie

- Principe d'exclusion de Pauli appliqué séparément aux neutrons et aux protons
 - pour une des deux espèces:

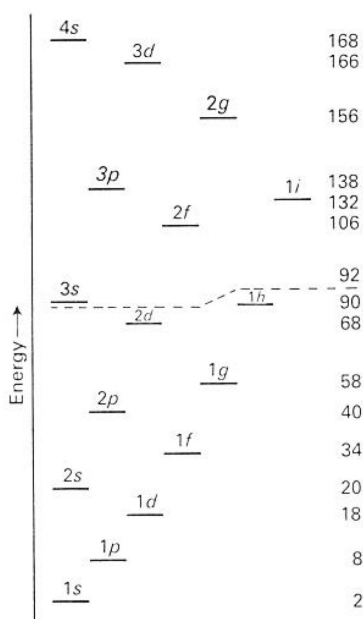


OS, 16 octobre 2024

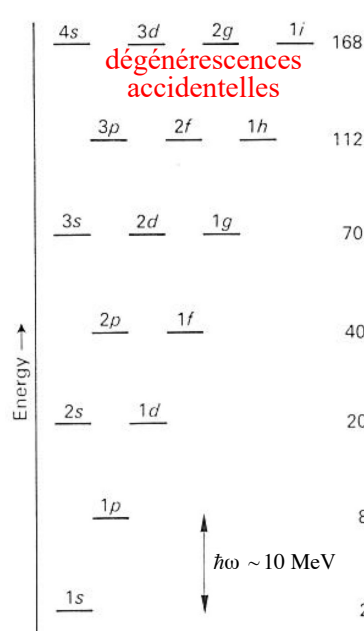
102

Comparaison entre différents spectres

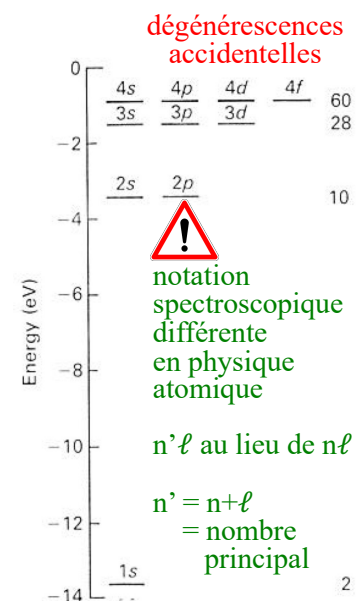
potentiel rectangulaire
(noyau)



potentiel harmonique
(noyau)



potentiel coulombien
(atome H)



$$E_{n\ell} = \hbar\omega\left(2n + \ell - \frac{1}{2}\right) - V_0$$

$$E_{n\ell} = -\frac{E_1}{(n + \ell)^2} \equiv -\frac{E_1}{n'^2}$$

OS, 16 octobre 2024

103