Modèle du gaz de Fermi (4)

- Energie cinétique moyenne d'un nucléon dans le noyau:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{A/4} T \, du}{\int_0^{A/4} du} = \ldots = \frac{3}{5} T_F \approx 20 \text{ MeV}$$

- Energie de séparation S du nucléon le moins lié:

$S \approx 6$ MeV
~ constante pour tous les noyaux

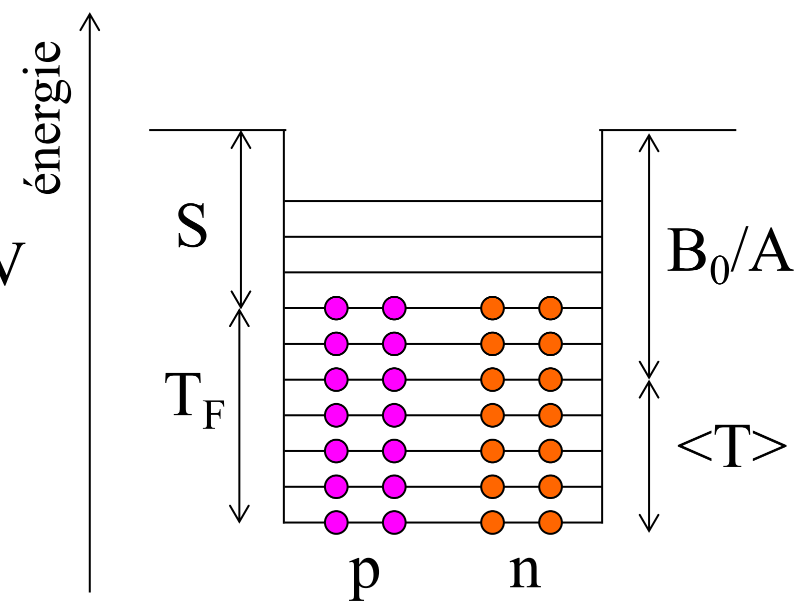
paramètre empirique

- Energie de liaison moyenne d'un nucléon:

$$\frac{B_0}{A} = T_F + S - \langle T \rangle \approx 33 + 6 - 20 = 19 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison totale du noyau:

$$\boxed{B_0 = a_v A \quad \text{où} \quad a_v = 19 \text{ MeV}}$$



Modèle du gaz de Fermi (5)

- Energie de liaison brute: $B_0 = a_v A \quad \text{où} \quad a_v = 19 \text{ MeV}$

- Corrections:

  ① Energie de répulsion coulombienne entre les protons

  $$\boxed{E_C = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{où} \quad a_C \approx 0.72 \text{ MeV}}$$

  ② Energie d'asymétrie (pour N différent de Z)

  $$\boxed{E_a = a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \quad \text{où} \quad a_a \approx 11 \text{ MeV}}$$

  ③ Energie de surface

  $$\boxed{E_s = a_s A^{2/3} \quad \text{où} \quad a_s \approx 16 \text{ MeV}}$$

- Energie de liaison corrigée: $\boxed{B = B_0 - E_C - E_a - E_s}$

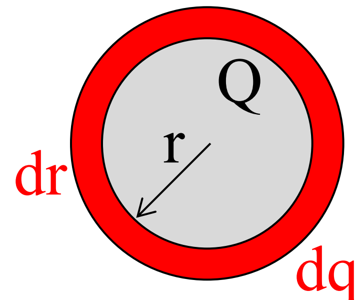
Energie coulombienne d'un noyau

- On considère une boule de rayon R de charge Ze, uniformément chargée

densité de charge $= \eta = \dfrac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

- Energie d'interaction d'une boule de rayon r et de charge Q avec une coquille de rayon r, d'épaisseur dr et de charge dq:

$$dE_c = \frac{dq\, Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\left(4\pi r^2 dr\, \eta\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \eta\right)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\eta^2 r^4 dr$$



- Energie totale pour la boule de rayon R:

$$E_c = \int_0^R dE_c = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\eta^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\left(\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 \frac{R^5}{5} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Z^2}{R}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{\alpha\hbar c}{r_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{3}{5}\times\frac{197\text{ MeV fm}}{137\times 1.2\text{ fm}}\times\frac{Z^2}{A^{1/3}} \approx 0.72\text{ MeV}\times\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Asymétrie N – Z

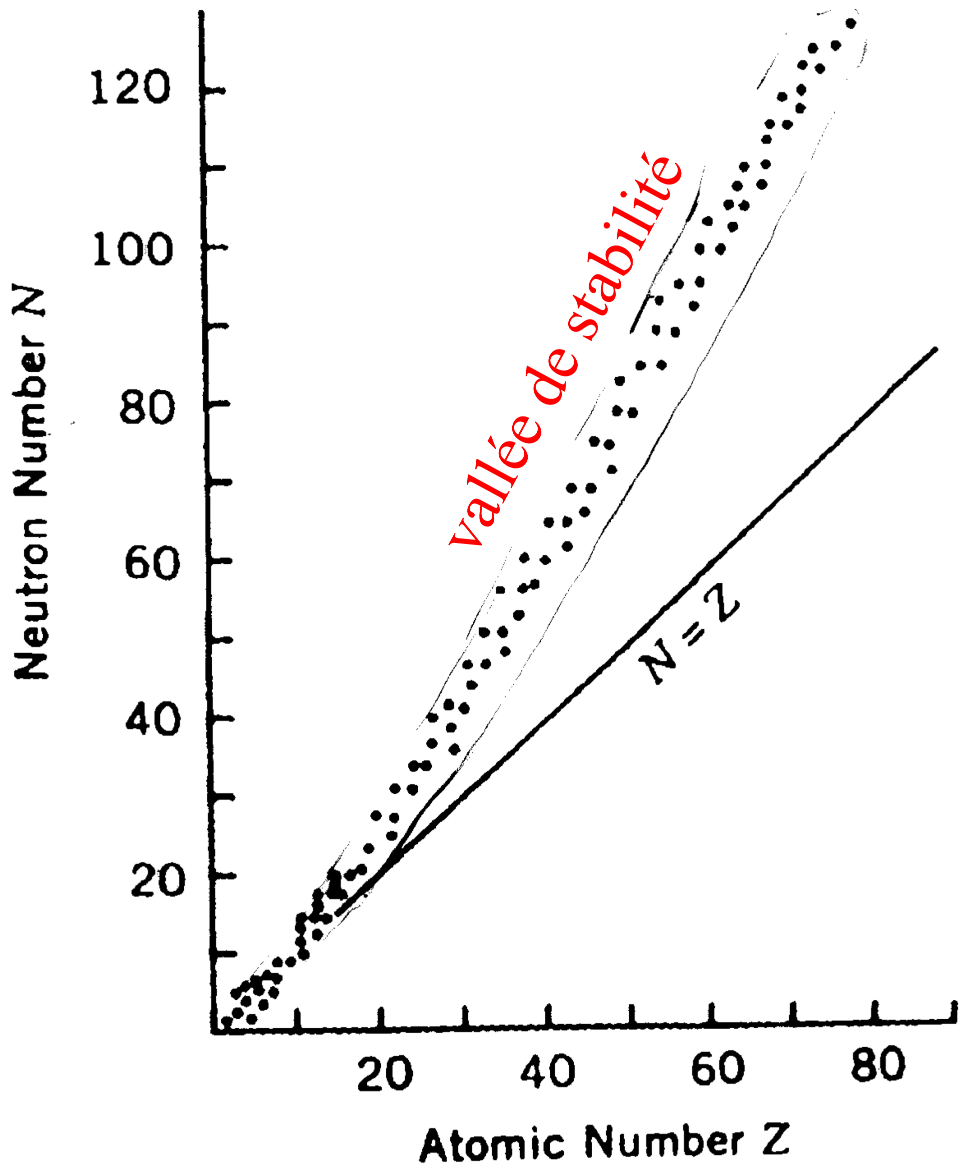
- Pour les noyaux stables légers:

  N ≈ Z

- Pour les noyaux stables moyens ou lourds:

  N > Z

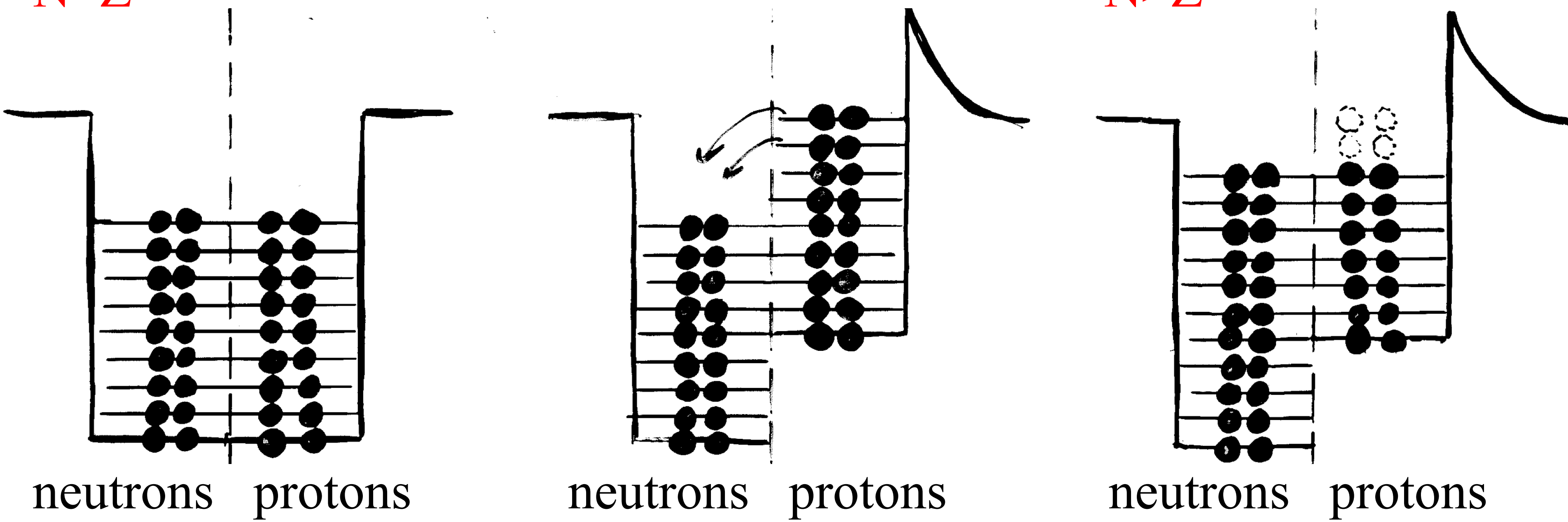
- Effets déterminants:
  ① principe d'exclusion
  ② répulsion coulombienne



Etat d'énergie mininale d'un noyau

noyau symétrique
N=Z

noyau asymétrique
N>Z



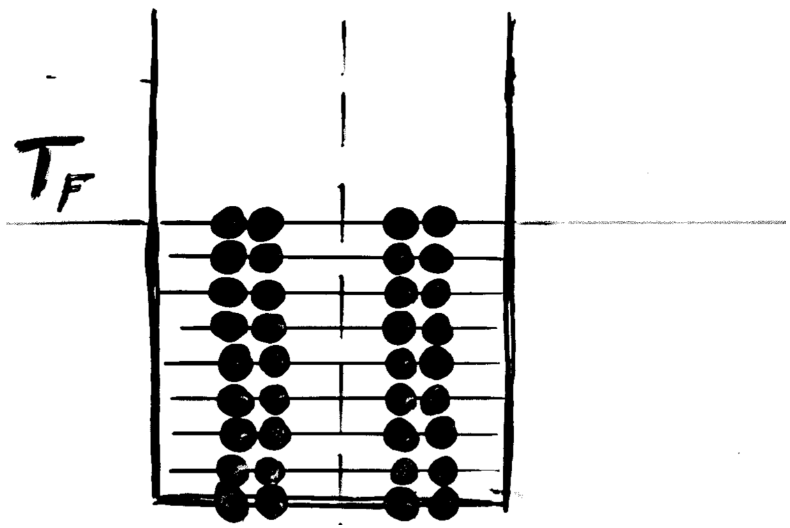
répulsion coulombienne
entre les protons

configuration d'énergie
minimale atteinte par
désintégration β^+

$$p \rightarrow n\, e^+ \nu_e$$

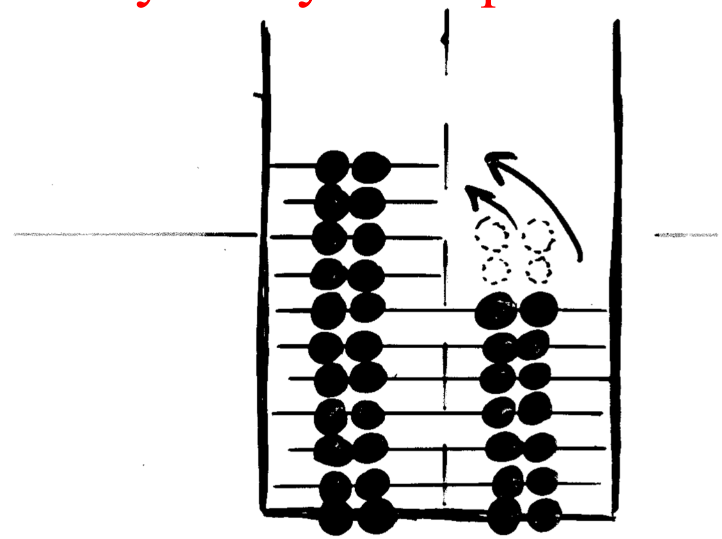
Energie d'asymétrie

noyau symétrique de A nucléons



A/2 neutrons + A/2 protons

noyau asymétrique de A nucléons



N neutrons + Z protons

$$N = \frac{A}{2}(1+\lambda) \qquad Z = \frac{A}{2}(1-\lambda)$$

$$N - Z = \lambda A$$

- Energie supplémentaire due à l'asymétrie:

$$E_a = \underbrace{2\int_{A/4}^{A/4\,(1+\lambda)} T\,du}_{\text{neutrons en plus}} - \underbrace{2\int_{A/4\,(1-\lambda)}^{A/4} T\,du}_{\text{protons en moins}}$$

Energie d'asymétrie (calcul)

$$F(u) = \int_0^u T\,du' \qquad \frac{dF}{du} = T(u) = \text{ énergie du u-ième niveau}$$

$$E_a = 2\left[F\left(\frac{A}{4}(1+\lambda)\right) - F\left(\frac{A}{4}\right)\right] - 2\left[F\left(\frac{A}{4}\right) - F\left(\frac{A}{4}(1-\lambda)\right)\right]$$

Développement limité en λ au 2ème ordre (valable si $\lambda \ll 1$):

$$F\left(\frac{A}{4}(1\pm\lambda)\right) = F\left(\frac{A}{4}\right) \pm \left(\lambda\frac{A}{4}\right)\left.\frac{dF}{du}\right|_{u=A/4} + \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{A}{4}\right)^2 \left.\frac{d^2F}{du^2}\right|_{u=A/4}$$

$$E_a \approx 4\,\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{A}{4}\right)^2 \left.\frac{d^2F}{du^2}\right|_{u=A/4} = \frac{1}{8}\lambda^2 A^2 \left.\frac{dT}{du}\right|_{u=A/4} = \frac{1}{8}(N-Z)^2 \left.\frac{dT}{du}\right|_{u=A/4}$$

$$\left(T = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{et} \quad u = \frac{\Omega}{6\pi^2}k^3\right) \Rightarrow T(u) = \beta u^{2/3} \Rightarrow \frac{dT}{du} = \frac{2}{3}\beta u^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{T}{u}$$

$$E_a \approx \frac{1}{8}(N-Z)^2\,\frac{2}{3}\,\frac{T_F}{\frac{A}{4}} = \frac{T_F}{3}\,\frac{(N-Z)^2}{A} = 11\ \text{MeV} \times \frac{(N-Z)^2}{A}$$

Désintégrations (instabilités) nucléaires

- Population de noyaux instables, avec durée de vie moyenne τ

$$\boxed{N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

  - temps de demi-vie $t_{1/2}$ $\quad N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \tau \ln(2)$

- Activité = nombre de désintégrations par unité de temps

$$\boxed{A(t) = -\frac{dN}{dt} = A_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \qquad A_0 = \frac{N_0}{\tau}$$

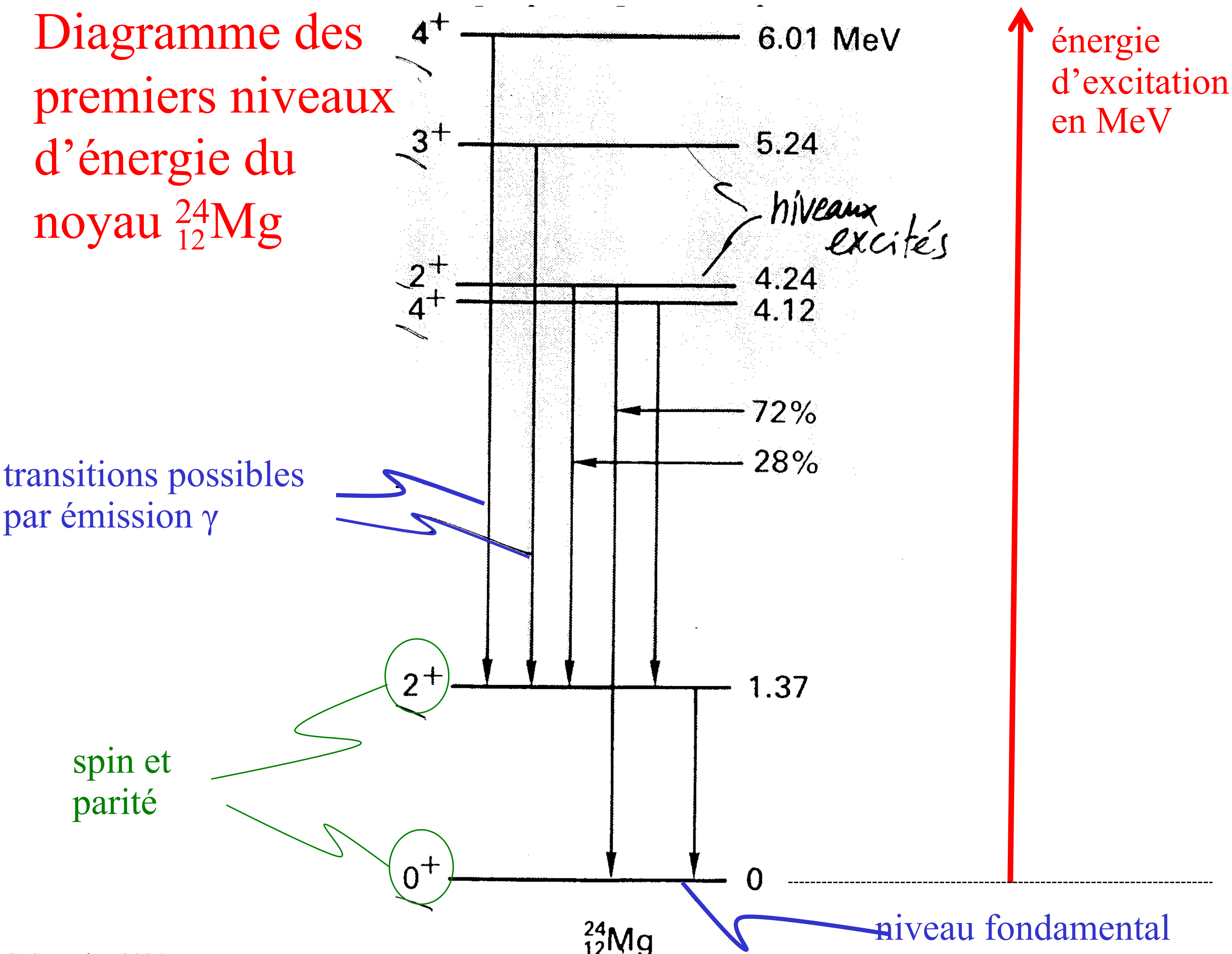
- Désintégration: $\quad X \rightarrow A + B + C$
- Energie cinétique dégagée: $\quad Q = m_X - m_A - m_B - m_C \; > 0$

  (on a posé c=1)

Désintégrations (instabilités) nucléaires

α	émission α	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$	$Q_{\alpha} = M_X - M_Y - M_{He}$
	fission (cas plus général)	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y^{(*)} + {}^{A-A'}_{A-Z'}W^{(*)} + \text{neutrons}$	
β	émission β^{-}	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y^{(*)} + e^{-} + \bar{\nu}_e$	$Q_{\beta-} = M_X - M_{Y^{(*)}}$
	émission β^{+}	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y^{(*)} + e^{+} + \nu_e$	$Q_{\beta+} = M_X - M_{Y^{(*)}} - 2m_e$
	capture électronique (par ex. capture K)	${}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y^{(*)} + \nu_e$	$Q_{EC} = M_X - M_{Y^{(*)}}$
γ	émission γ	${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$	$Q_{\gamma} = M_{X^{*}} - M_X$
	conversion interne	${}^{A}_{Z}X^{*} + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + e^{-}$	

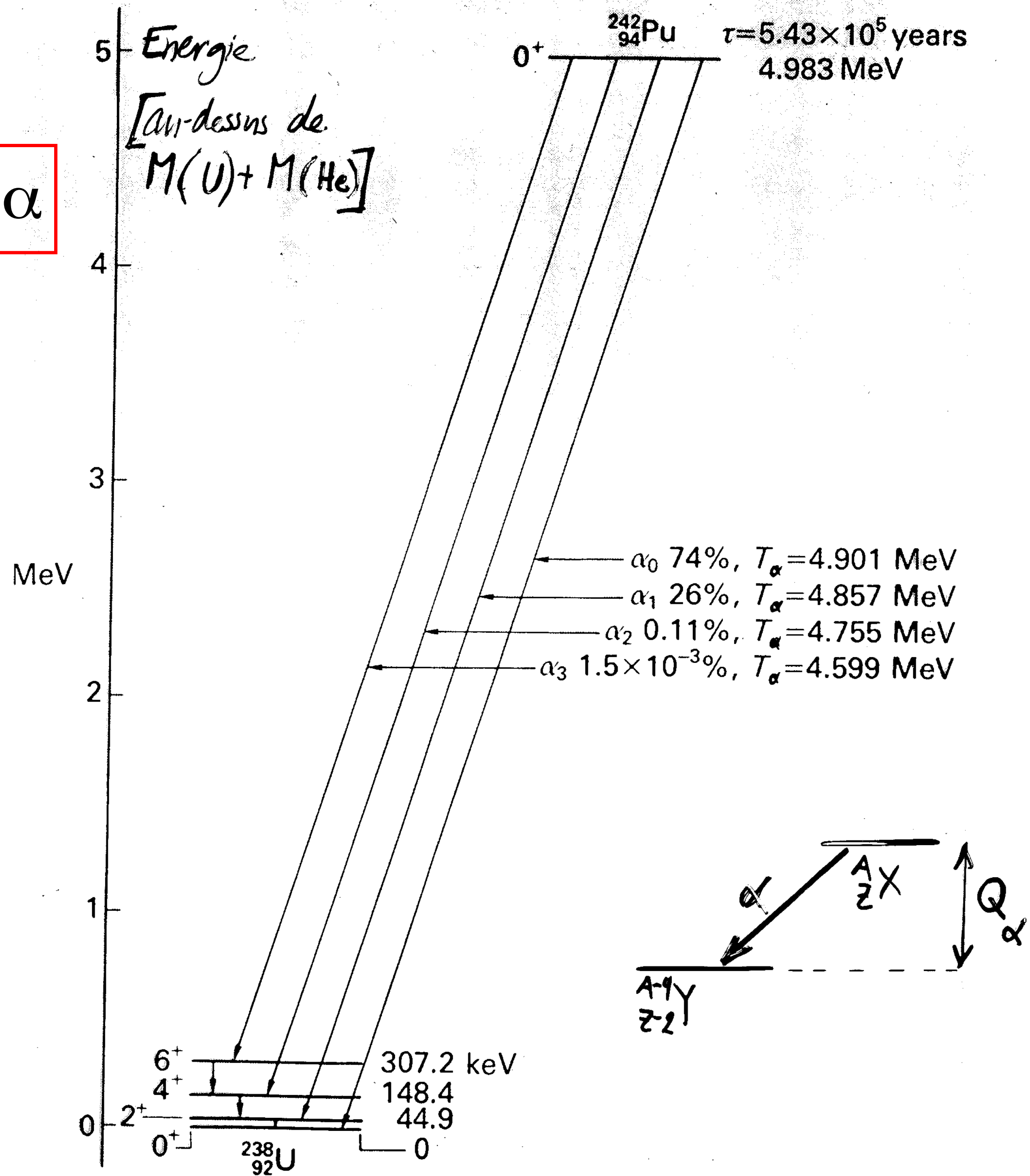
Diagramme des premiers niveaux d'énergie du noyau $^{24}_{12}Mg$



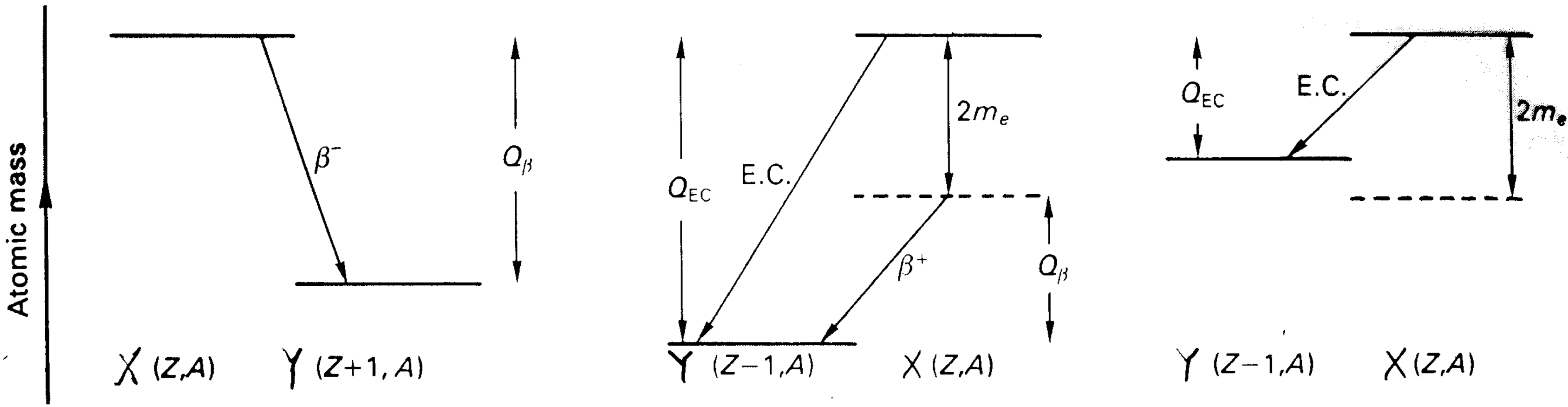
Désintégration α

$$\boxed{{}^{242}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{238}_{92}\mathrm{U}^{(*)} + \alpha}$$

(voir exercice)



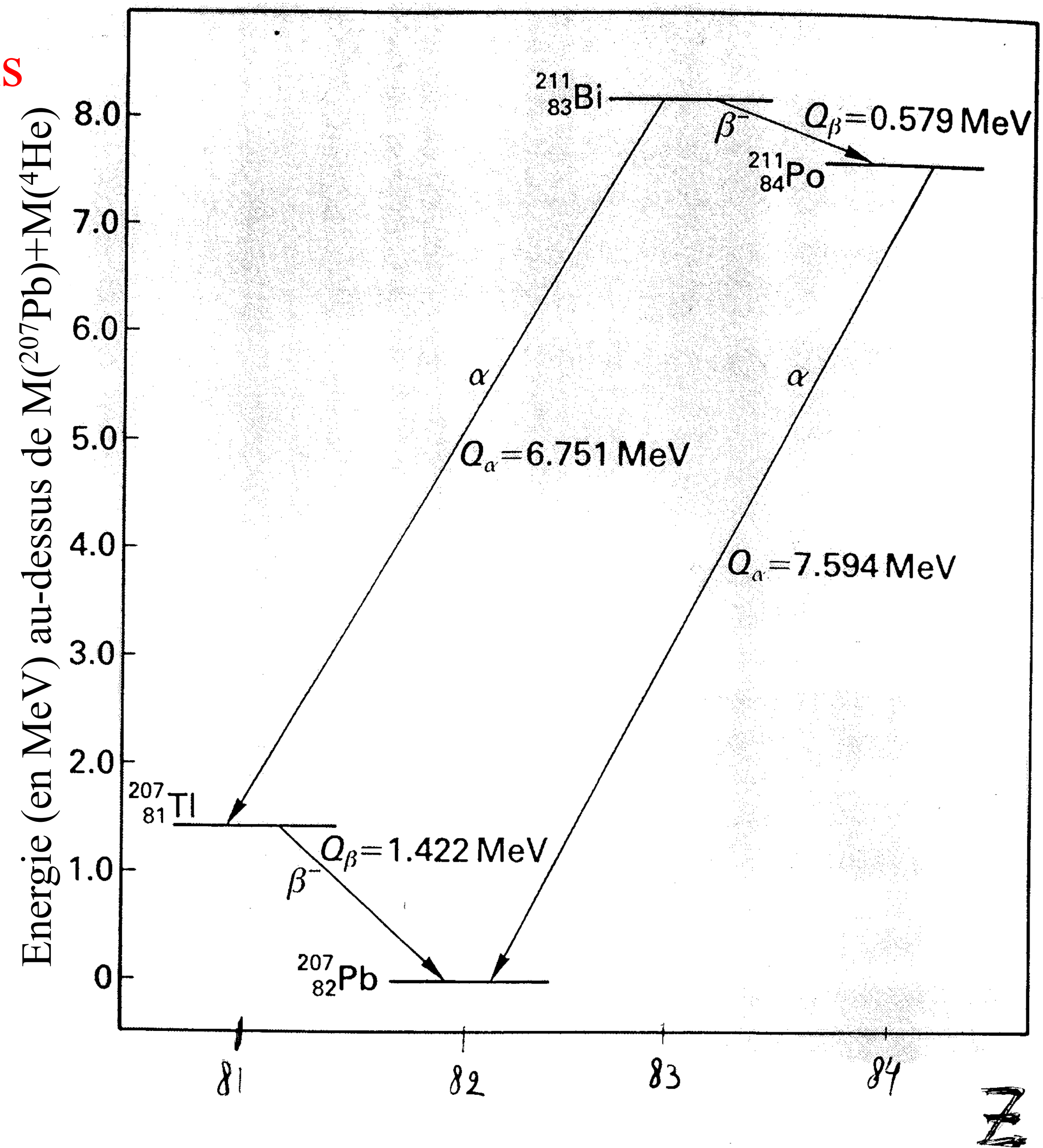
Désintégration β



émission β^-	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y^{(*)} + e^- + \bar{\nu}_e$	$Q_{\beta-} = M_X - M_Y$
émission β^+	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y^{(*)} + e^+ + \nu_e$	$Q_{\beta+} = M_X - M_Y - 2m_e$
capture électronique	${}^{A}_{Z}X + e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y^{(*)} + \nu_e$	$Q_{EC} = M_X - M_Y$

La capture électronique est toujours possible si l'émission β^+ est possible, car $Q_{EC} > Q_{\beta+}$

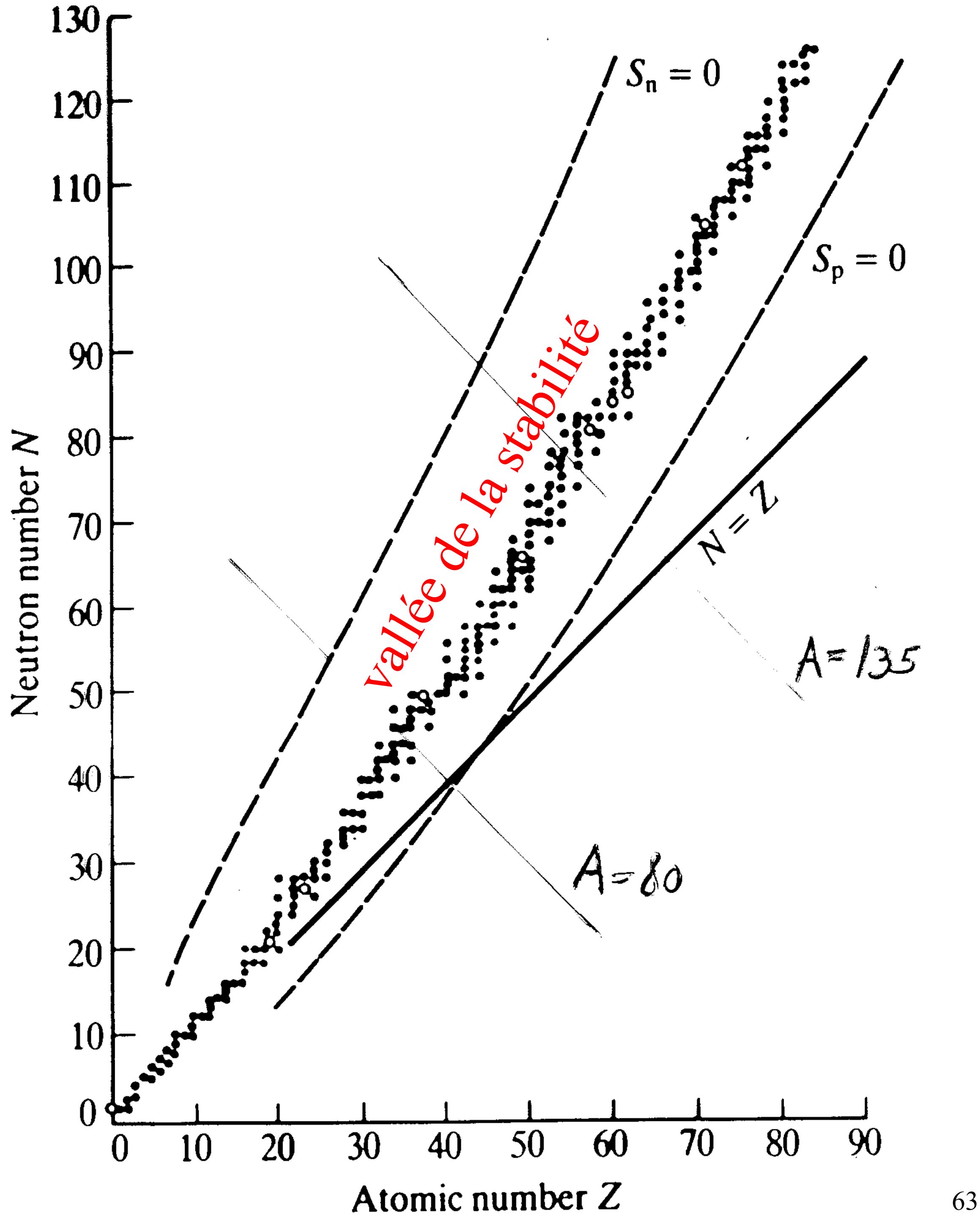
Désintégrations successives



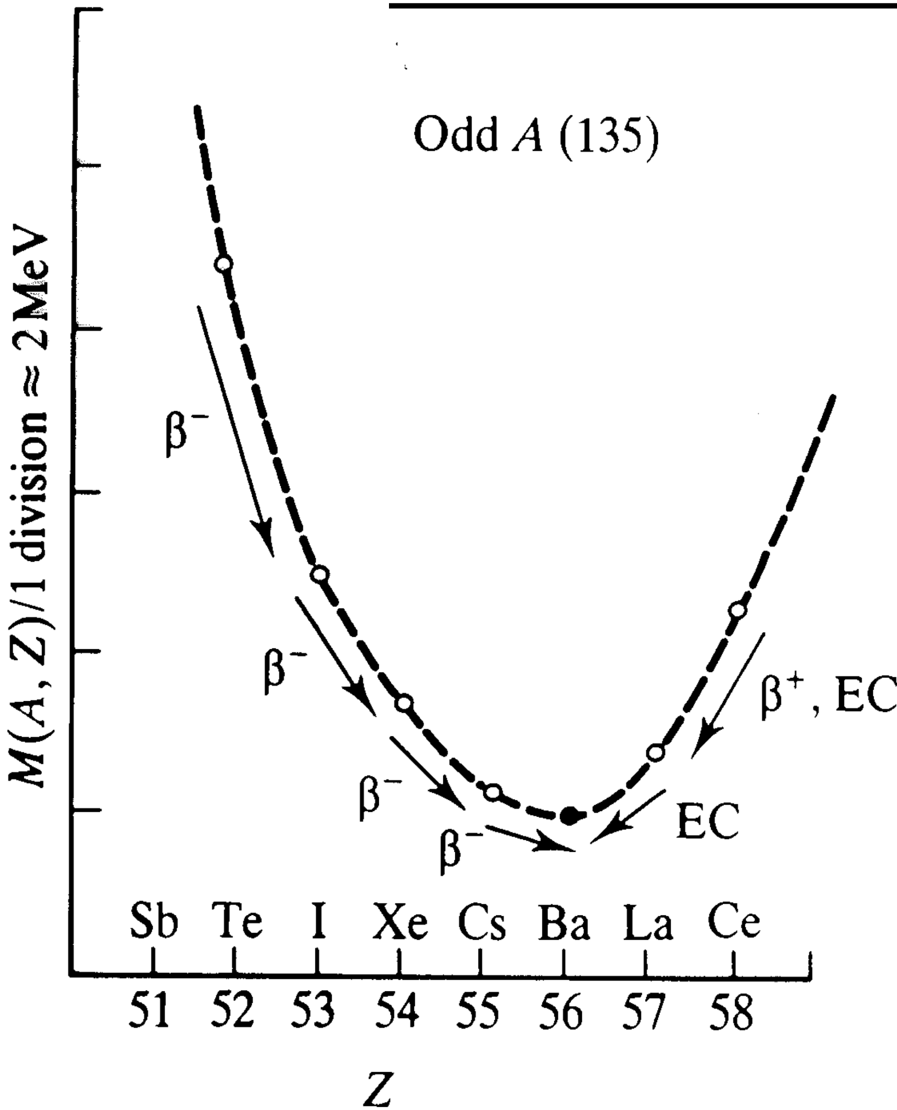
- Z_A = nombre de protons de l'isobare à A nucléons qui soit stable par rapport aux désintégrations β
  - A fixé
  - formule de la masse M(Z,A)
  - on pose $\left.\frac{\partial M}{\partial Z}\right|_{Z=Z_A} = 0$

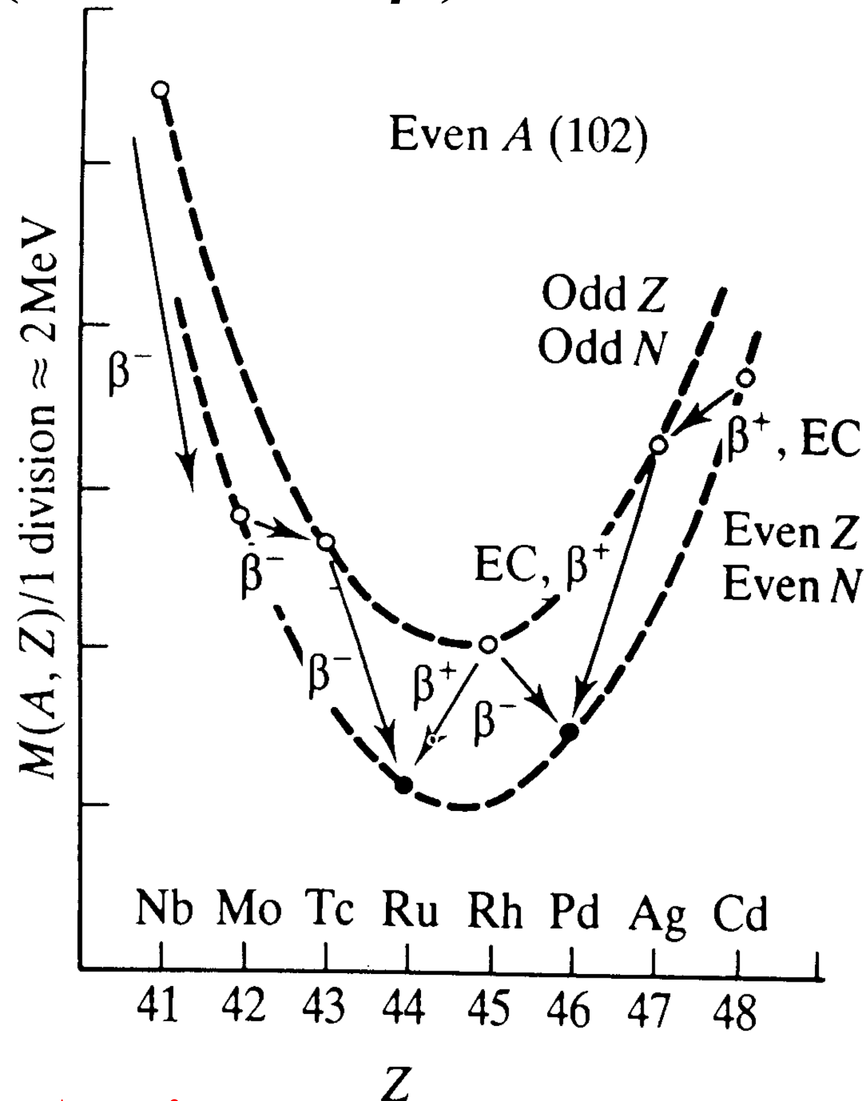
$$\boxed{Z_A = \frac{A}{2}\,\frac{1}{1+\frac{a_C}{4a_a}A^{2/3}} < \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{A}{2}\,\frac{1}{1+0.0075\,A^{2/3}}$$



Isobare stable (stabilité β)

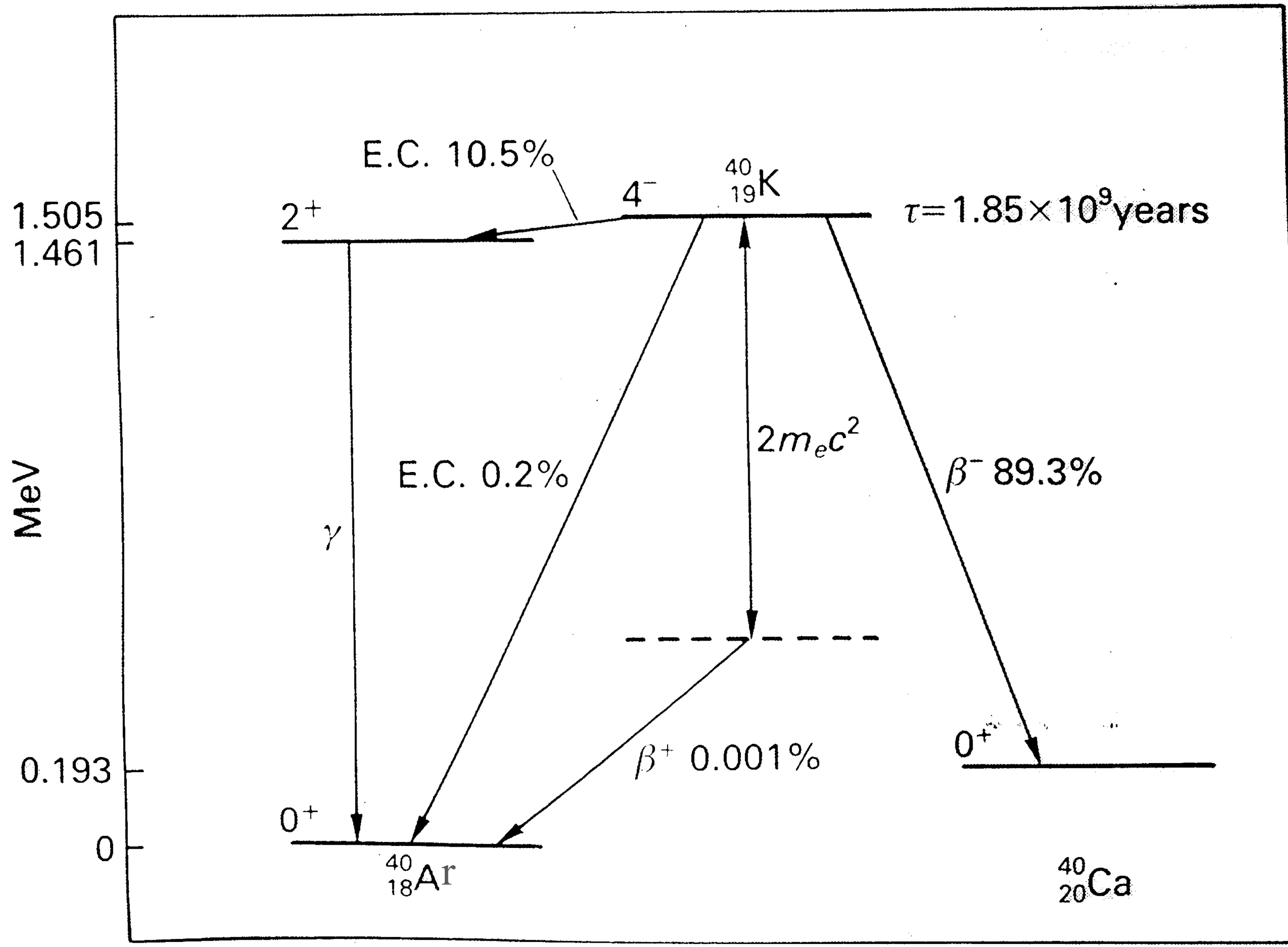




A impair:
– un seul isobare stable

A pair:
– un ou deux isobares stables avec N et Z pairs

Noyau radioactif β⁺ et β⁻



Stabilité α

- Désintégration α d'un isobare stable pour la désintégration β

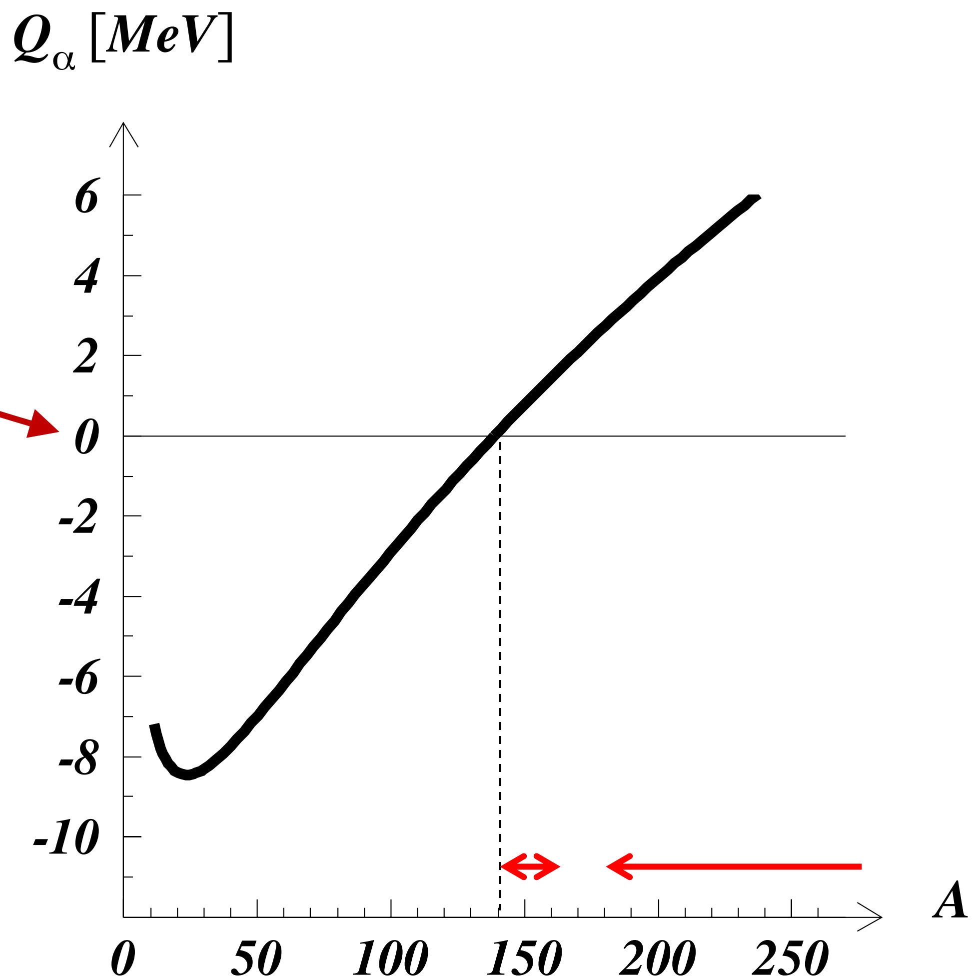
$$ {}^{A}_{Z_A}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z_A-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

  – formule de la masse M(Z,A)
  – énergie libérée:

$$ Q_\alpha = M(Z,A) - M(Z-2;A-4) - M(2,4) $$

  pour $Z = Z_A$

  – $Q_\alpha > 0 \;\Rightarrow\; A \geq 140$



- **Noyaux émetteurs α:**
  – **144 < A < 160 et A > 180**

Stabilité α (calcul)

- En posant c=1, et avec ΔZ=–2, ΔA=–4:

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha &= M(Z,A) - M(Z-2;A-4) - M(2,4) \\
&= -\left[M(Z+\Delta Z, A+\Delta A) - M(Z,A)\right] - M(2,4) \\
&= -\left[\left.\frac{\partial M}{\partial Z}\right|_{A=\text{cte}} \Delta Z + \left.\frac{\partial M}{\partial A}\right|_{Z=\text{cte}} \Delta A\right] - M(2,4)
\end{aligned}
$$

- On considère un noyau stable pour la désintégration β, donc

$$
Z = Z_A \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial M}{\partial Z}\right|_{A=\text{cte}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = 4\left.\frac{\partial M}{\partial A}\right|_{Z=\text{cte}} - M(2,4)
$$

- Avec la formule semi-empirique de la masse, on obtient

$$
Q_\alpha = \underbrace{4m_n - M(2,4)}_{29.9\ \text{MeV}} - 4a_v + \frac{8}{3}a_s A^{-1/3} - \frac{4}{3}a_C Z_A^2 A^{-4/3} + 4a_a\left[1 - \left(\frac{2Z_A}{A}\right)^2\right]
$$

$$
\text{où} \quad Z_A = \frac{A}{2}\,\frac{1}{1 + \frac{a_C}{4a_a}A^{2/3}} < \frac{A}{2}
$$