# Relativité restreinte (rappels)

| | Relativité restreinte | $\xrightarrow[v/c \ll 1]{}$ | Mécanique newtonienne |
|---|---|---|---|
| Postulats | c= constante | | temps et espace absolus |
| | $(c\Delta t)^2 - \left(\overrightarrow{\Delta x}\right)^2$ invariant | | $\Delta t$ et $\left\|\overrightarrow{\Delta x}\right\|$ invariants |
| Grandeurs physiques | $\vec{\beta}=\vec{v}/c,\ \gamma=\left(1-\vec{\beta}^2\right)^{-1/2}$ | | |
| | $\vec{p}=m\gamma\vec{\beta}c$ | $\rightarrow$ | $\vec{p}=m\vec{v}$ |
| | $T=mc^2(\gamma-1)$ | $\rightarrow$ | $T=\frac{1}{2}mv^2$ |
| | $E=mc^2+T=m\gamma c^2$ | $\rightarrow$ | $E=E^{\text{interne}}+\frac{1}{2}mv^2$ |
| | $\vec{\beta}=\vec{p}c/E$ | $\rightarrow$ | $v=2T/p$ |
| | $E^2-\vec{p}^2c^2=m^2c^4$ | $\rightarrow$ | $T=\vec{p}^2/(2m)$ |
| Lois physiques | $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ | | $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ |
| | conservation de $\vec{p}$ | | conservation de $\vec{p}$ |
| | conservation de E | | conservation de E |



# Relativité restreinte (rappels)

- Energie potentielle de masse (Einstein, 1905): $\boxed{E_{\text{masse}} = mc^2}$
- Energie totale: $E = T + E_{\text{masse}} = mc^2(\gamma-1) + mc^2 \ \Rightarrow\ \boxed{E = m\gamma c^2}$
- Vitesse d'une particule: $p = m\gamma\beta c$ et $E = m\gamma c^2 \ \Rightarrow\ \boxed{\beta = \frac{pc}{E}}$
- Relation entre énergie, quantité de mouvement et masse:

$$1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \ \Leftrightarrow\ E^2 - E^2\beta^2 = \frac{E^2}{\gamma^2} \ \Leftrightarrow\ \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$$

- Masse nulle ⇔ vitesse c: $\boxed{m = 0 \ \Leftrightarrow\ E = pc \ \Leftrightarrow\ \beta = 1}$
- Unités:

E en Gev
pc en GeV ⇒ p en GeV/c
$mc^2$ en GeV ⇒ m en GeV/$c^2$

(on pose parfois c=1)

# Masses nucléaires et atomiques

Noyau ${}^{A}_{Z}X_{N}$ : Z protons + N neutrons = A nucléons

$$\boxed{\text{masse noyau } {}^{A}_{Z}X_{N} = m(Z,A) = Zm_p + Nm_n - B(Z,A)/c^2}$$

- $m_p = 938.272$ MeV/$c^2$ = masse du proton
- $m_n = 939.565$ MeV/$c^2$ = masse du neutron
- $B(Z,A)$ = énergie de liaison du noyau > 0

$$\boxed{\text{masse atome de } {}^{A}_{Z}X_{N} = M(Z,A) = m(Z,A) + Zm_e - L(Z)/c^2}$$

- $m_e = 0.511$ MeV/$c^2$ = masse de l'électron
- $L(Z) \approx 15.73\, Z^{7/3}$ eV = énergie de liaison des Z électrons (négligeable)

$$\boxed{\text{masse atome de } {}^{A}_{Z}X_{N} = M(Z,A) = Zm_H + Nm_n - B(Z,A)/c^2}$$

- $m_H$ = masse de l'atome d'hydrogène $\approx m_p + m_e$



# Unité de masse atomique

- Définition de l'unité de masse atomique:
  1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 ( ${}^{12}_{6}C_{6}$ )

$$\boxed{1 \text{ uma } = 1 \text{ u} = \frac{M(6,12)}{12} \approx 931.494 \text{ MeV}/c^2}$$

- Avant la redéfinition de la mole le 20 mai 2019:

$$12 \text{ g de } {}^{12}C = 1 \text{ mole de } {}^{12}C = N_A \text{ atomes de } {}^{12}C$$

où $N_A$ = nombre d'Avogadro

$$\boxed{1 \text{ uma } = 1 \text{ u } = 1\text{g}/N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

- Après le 20 mai 2019:
  mole redéfinie par $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ (exactement)
  donc $\boxed{1 \text{ uma } = 1 \text{ u } \approx 1\text{g}/N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}}$

# Modèle de la goutte liquide

Modèle totalement empirique, dû à Von Weizsäcker (1935)

Analogie:

| | | |
|---|---|---|
| goutte liquide | $\leftrightarrow$ | noyau |
| molécules | $\leftrightarrow$ | nucléons |
| forces de van der Waals | $\leftrightarrow$ | force nucléaire |

- force à courte portée (saturation)
  - nucléons en interaction seulement avec leurs plus proches voisins
  - énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau indépendante de A
- énergie de liaison diminuée pour les nucléons à la surface; effet proportionnel à l'aire $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ (tension superficielle de la goutte)
- répulsion coulombienne entre les protons
- énergie d'asymétrie et énergie d'appariement



# Formule semi-empirique de la masse (1)

Von Weizsäcker (1935)

$$\boxed{\begin{aligned} m(Z,A)c^2 &= Zm_pc^2 + (A-Z)m_nc^2 - B(Z,A) \\ &= Zm_pc^2 + (A-Z)m_nc^2 && \text{masses} \\ &\quad - a_v A && \text{– énergie de volume} \\ &\quad + a_s A^{2/3} && \text{– énergie de surface} \\ &\quad + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} && \text{– énergie de Coulomb} \\ &\quad + a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} && \text{– énergie d'asymétrie} \\ &\quad - \delta(Z,A) && \text{– énergie d'appariement} \end{aligned}}$$

$$\text{où} \quad \delta(Z,A) = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{si A et Z pairs} \\ 0 & \text{si A impair} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{si A pair et Z impair} \end{cases}$$

| N | Z | Nombre noyaux stables |
|---|---|---|
| pair | pair | 156 |
| pair | impair | 48 |
| impair | pair | 50 |
| impair | impair | 5 |

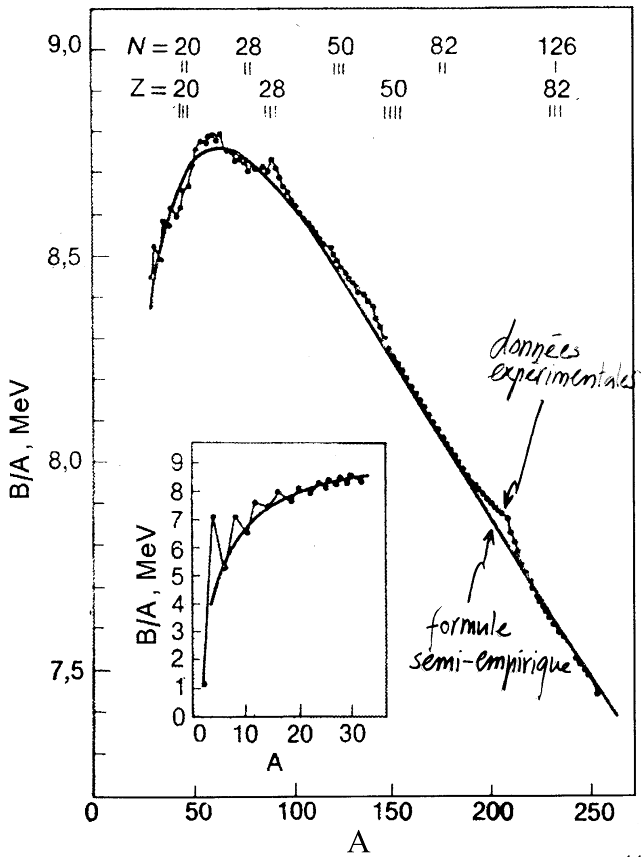
Un nombre pair de protons ou neutrons garantit une meilleure stabilité du noyau

# Formule semi-empirique de la masse (2)

- Ajustement des paramètres sur les masses mesurées des noyaux stables:

| | |
|---|---|
| $a_v =$ | 15.75 MeV |
| $a_s =$ | 17.8 MeV |
| $a_C =$ | 0.71 MeV |
| $a_a =$ | 23.7 MeV |
| $a_p =$ | 34 MeV |

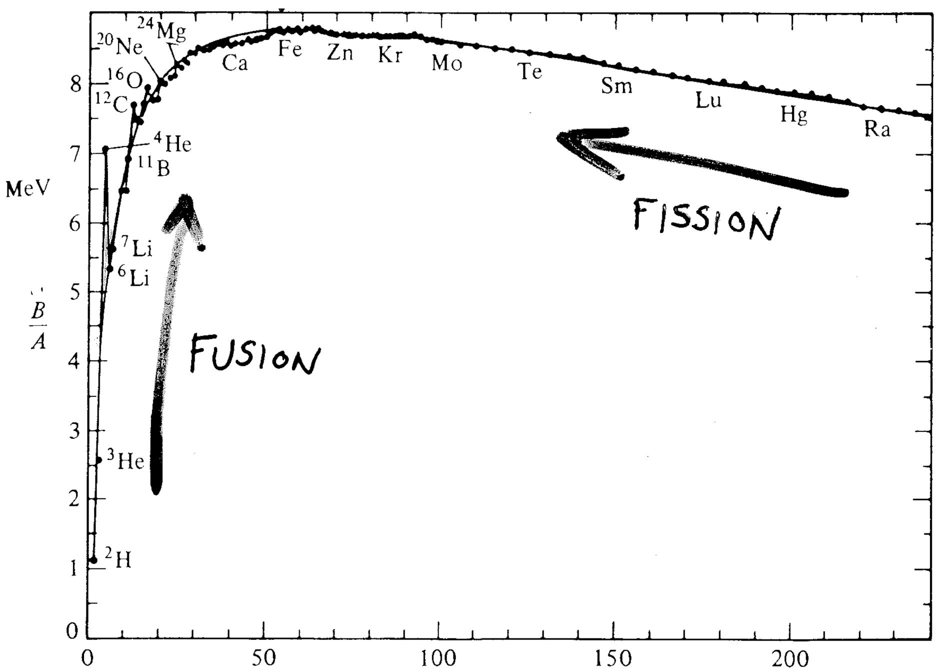
  – Accord relativement bon, mais loin d'être parfait
    - excès d'énergie de liaison pour N, Z = 20, 28, 50, 82, 126






# Energie de liaison par nucléon (1)

B/A ≈ constante
≈ 8.5 MeV
(pour A > 12)

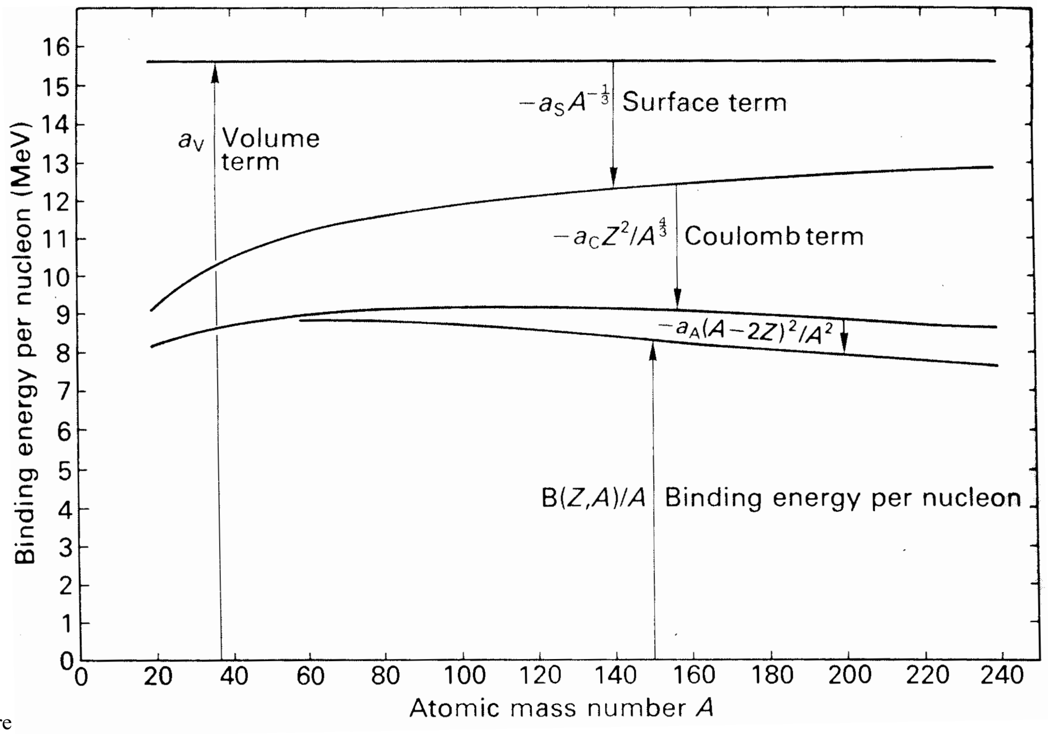



$^{56}$Fe = noyau dans lequel les nucléons sont le plus liés
= isotope le plus abondant (avec le Si) pour A ≥ 20

# Energie de liaison par nucléon (2)

- Formule semi-empirique

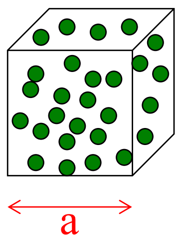
$$\boxed{\frac{B(Z,A)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}}$$






# Modèle du gaz de Fermi (1)

- Z protons et N neutrons
  - sans interaction entre eux
  - confinés dans une boîte (= noyau)
  - respectant le principe d'exclusion
- Paramètre empirique du modèle:
  a = dimension de la boîte



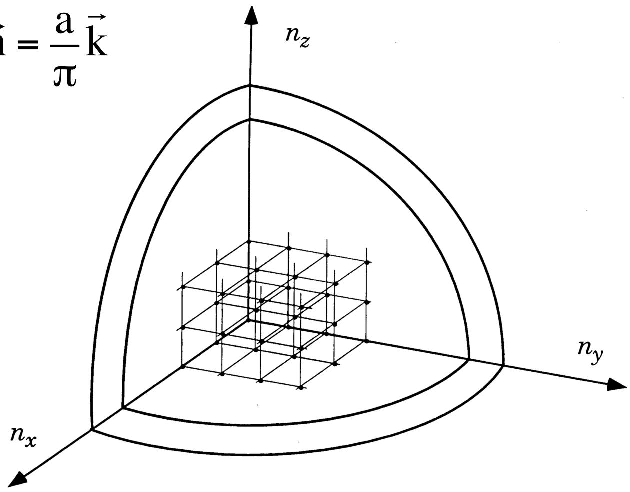

- Pour chaque nucléon:
  - fonction d'onde $\psi = \psi(x,y,z)$ avec $\begin{cases} \int_{\text{boîte}} |\psi|^2 dxdydz = 1 \\ \psi = 0 \ \text{ sauf dans la boîte} \end{cases}$
  - hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
  - équation de Schrödinger (aux valeurs propres) $H\psi = T\psi$

# Modèle du gaz de Fermi (2)

Spectre d'énergie:

$$T = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \quad \text{où } n_x, n_y, n_z \text{ entiers}$$

$$\vec{n} = \frac{a}{\pi}\vec{k}$$




Nombre d'états avec module de $\vec{n}$ entre n et n+dn = nombre d'états avec module de $\vec{k}$ entre k et k+dk:

$$du(k) = \frac{1}{8}\text{coquille} = \frac{1}{8}4\pi n^2 dn$$

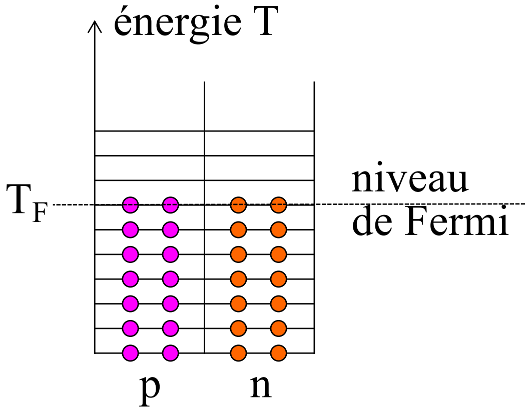
$$= \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^3 k^2 dk = \frac{a^3}{2\pi^2}k^2 dk$$

$$\boxed{du(k) = \frac{\Omega}{2\pi^2}k^2 dk} \quad \text{où } \Omega = \text{volume de la boîte}$$



# Modèle du gaz de Fermi (3)

- Principe d'exclusion de Pauli:
  - 2 protons + 2 neutrons par niveau d'énergie (spin ½)
- Pour un noyau symétrique avec Z = N = A/2:
  - nombre d'états tels que le module de k soit inférieur à $k_F$




$$\frac{A}{4} = u(k_F) = \int_0^{k_F}\frac{\Omega}{2\pi^2}k^2 dk = \frac{\Omega}{6\pi^2}k_F^3 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6\pi^2}k_F^3 = \frac{2R^3}{9\pi}k_F^3$$

$$\Rightarrow k_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{A^{1/3}}{R} \approx \frac{3}{2r_0} \quad \Rightarrow \begin{cases} k_F \approx 1.27\ \text{fm}^{-1} \\ p_F = \hbar k_F \approx 250\ \text{MeV/c} \\ T_F = \hbar^2 k_F^2/(2m) \approx 33\ \text{MeV} \end{cases}$$

$r_0 = 1.2$ fm

paramètre empirique

constantes pour tous les noyaux !