Relativité restreinte (rappels)

	Relativité restreinte	$\xrightarrow[v/c \ll 1]{}$	Mécanique newtonienne
Postulats	c= constante		temps et espace absolus
	$(c\Delta t)^2 - \left(\overrightarrow{\Delta x}\right)^2$ invariant		Δt et $\left\lvert\overrightarrow{\Delta x}\right\rvert$ invariants
Grandeurs physiques	$\vec{\beta}=\vec{v}/c,\ \ \gamma=\left(1-\vec{\beta}^2\right)^{-1/2}$		
	$\vec{p}=m\gamma\vec{\beta}c$	$\rightarrow$	$\vec{p}=m\vec{v}$
	$T=mc^2(\gamma-1)$	$\rightarrow$	$T=\frac{1}{2}mv^2$
	$E=mc^2+T=m\gamma c^2$	$\rightarrow$	$E=E^{\text{interne}}+\frac{1}{2}mv^2$
	$\vec{\beta}=\vec{p}c/E$	$\rightarrow$	$v=2T/p$
	$E^2-\vec{p}^2c^2=m^2c^4$	$\rightarrow$	$T=\vec{p}^2/(2m)$
Lois physiques	$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$
	conservation de $\vec{p}$ conservation de E		conservation de $\vec{p}$ conservation de E

Relativité restreinte (rappels)

- Energie potentielle de masse (Einstein, 1905): $\boxed{E_{masse} = mc^2}$

- Energie totale: $E = T + E_{masse} = mc^2(\gamma - 1) + mc^2 \Rightarrow \boxed{E = m\gamma c^2}$

- Vitesse d'une particule: $p = m\gamma\beta c$ et $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{pc}{E}}$

- Relation entre énergie, quantité de mouvement et masse:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - E^2\beta^2 = \frac{E^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow \boxed{\boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}}$$

- Masse nulle $\Leftrightarrow$ vitesse c: $\boxed{m = 0 \Leftrightarrow E = pc \Leftrightarrow \beta = 1}$

- Unités:

E en Gev
pc en GeV $\Rightarrow$ p en GeV/c
mc^2 en GeV $\Rightarrow$ m en GeV/c^2

(on pose parfois c=1)

Masses nucléaires et atomiques

Noyau ${}^{A}_{Z}X_{N}$: Z protons + N neutrons = A nucléons

$$\boxed{\text{masse noyau } {}^{A}_{Z}X_{N} = m(Z,A) = Zm_p + Nm_n - B(Z,A)/c^2}$$

- m_p = 938.272 MeV/c^2 = masse du proton
- m_n = 939.565 MeV/c^2 = masse du neutron
- B(Z,A) = énergie de liaison du noyau > 0

$$\boxed{\text{masse atome de } {}^{A}_{Z}X_{N} = M(Z,A) = m(Z,A) + Zm_e - L(Z)/c^2}$$

- m_e = 0.511 MeV/c^2 = masse de l'électron
- $L(Z) \approx 15.73\ Z^{7/3}$ eV = énergie de liaison des Z électrons (négligeable)

$$\boxed{\text{masse atome de } {}^{A}_{Z}X_{N} = M(Z,A) = Zm_H + Nm_n - B(Z,A)/c^2}$$

- m_H = masse de l'atome d'hydrogène $\approx m_p + m_e$

Unité de masse atomique

- Définition de l'unité de masse atomique:
  1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 (${}^{12}_{6}C_6$)

$$\boxed{1\ \text{uma} = 1\ \text{u} = \frac{M(6,12)}{12} \approx 931.494\ \text{MeV}/c^2}$$

- Avant la redéfinition de la mole le 20 mai 2019:

$$12\ \text{g de}\ {}^{12}C = 1\ \text{mole de}\ {}^{12}C = N_A\ \text{atomes de}\ {}^{12}C$$

où N_A = nombre d'Avogadro

$$\boxed{1\ \text{uma} = 1\ \text{u} = 1\text{g}/N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

- Après le 20 mai 2019:
  mole redéfinie par $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ (exactement)
  donc

$$\boxed{1\ \text{uma} = 1\ \text{u} \approx 1\text{g}/N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

Modèle de la goutte liquide

Modèle totalement empirique, dû à Von Weizsäcker (1935)

Analogie:

goutte liquide	$\leftrightarrow$	noyau
molécules	$\leftrightarrow$	nucléons
forces de van der Waals	$\leftrightarrow$	force nucléaire

- force à courte portée (saturation)
  - nucléons en interaction seulement avec leurs plus proches voisins
  - énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau indépendante de A
- énergie de liaison diminuée pour les nucléons à la surface; effet proportionnel à l'aire $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ (tension superficielle de la goutte)
- répulsion coulombienne entre les protons
- énergie d'asymétrie et énergie d'appariement

Formule semi-empirique de la masse (1)

Von Weizsäcker (1935)

$$
\begin{aligned}
m(Z,A)c^2 &= Zm_pc^2 + (A-Z)m_nc^2 - B(Z,A) \\
&= Zm_pc^2 + (A-Z)m_nc^2 && \text{masses} \\
&\quad - a_vA && -\text{ énergie de volume} \\
&\quad + a_sA^{2/3} && -\text{ énergie de surface} \\
&\quad + a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} && -\text{ énergie de Coulomb} \\
&\quad + a_a\frac{(A-2Z)^2}{A} && -\text{ énergie d'asymétrie} \\
&\quad - \delta(Z,A) && -\text{ énergie d'appariement}
\end{aligned}
$$

$$
\text{où}\quad \delta(Z,A) = \begin{cases} +a_pA^{-3/4} & \text{si A et Z pairs} \\ 0 & \text{si A impair} \\ -a_pA^{-3/4} & \text{si A pair et Z impair} \end{cases}
$$

N	Z	Nombre noyaux stables
pair	pair	156
pair	impair	48
impair	pair	50
impair	impair	5

Un nombre pair de protons ou neutrons garantit une meilleure stabilité du noyau

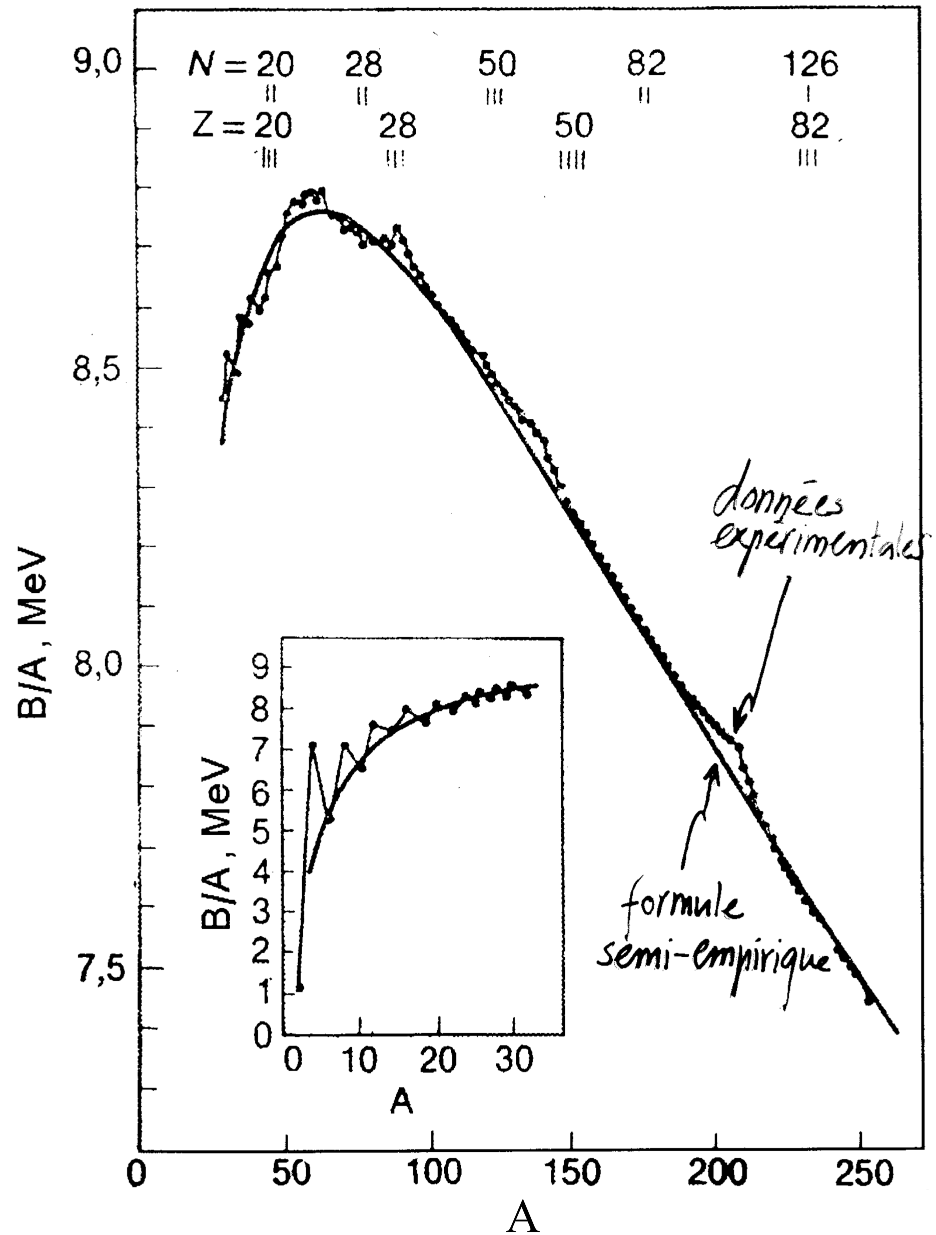
Formule semi-empirique de la masse (2)

- Ajustement des paramètres sur les masses mesurées des noyaux stables:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_v &= 15.75 \text{ MeV}\\
a_s &= 17.8 \text{ MeV}\\
a_C &= 0.71 \text{ MeV}\\
a_a &= 23.7 \text{ MeV}\\
a_p &= 34 \text{ MeV}
\end{aligned}
}
$$

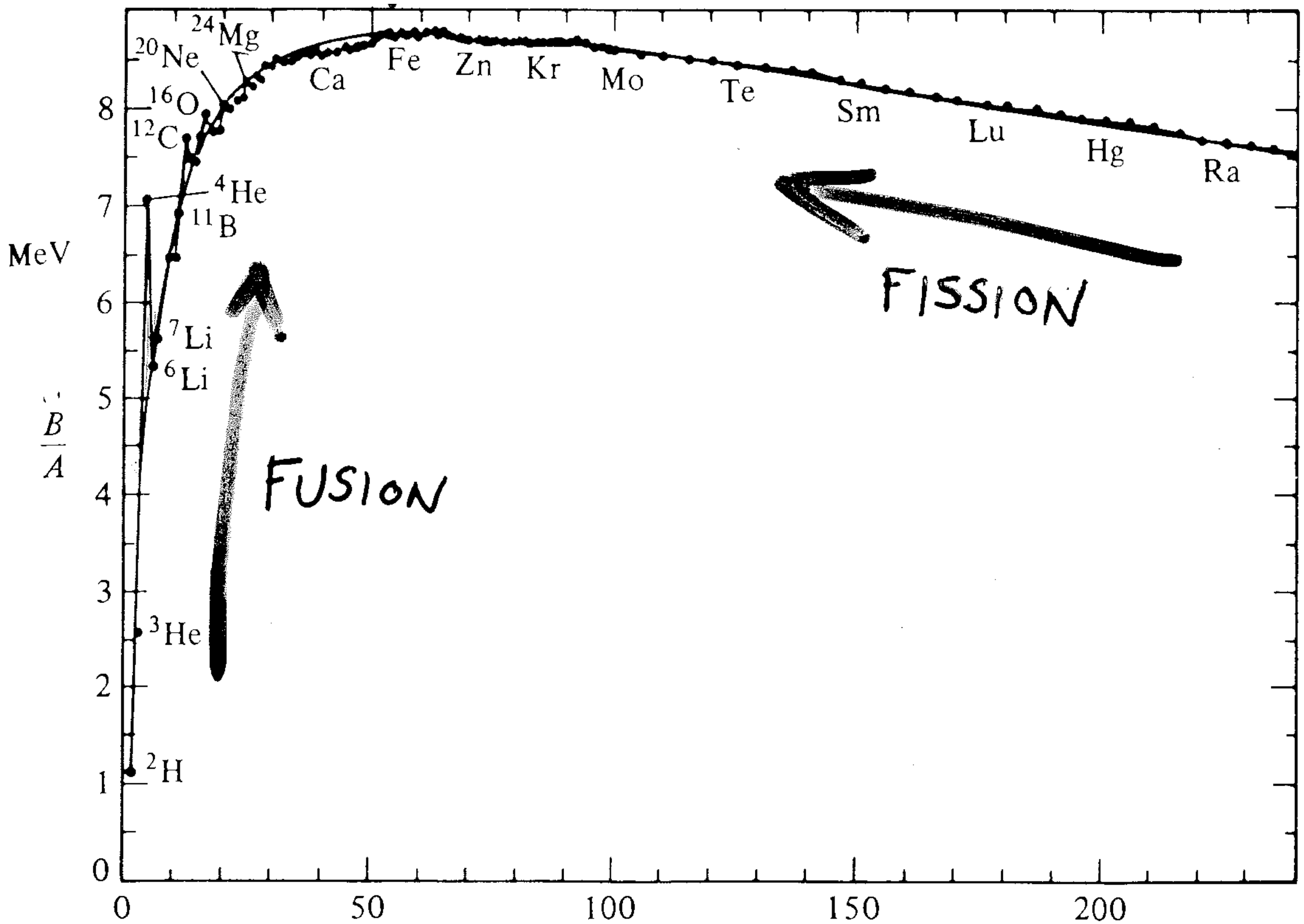
  – Accord relativement bon, mais loin d'être parfait
    - excès d'énergie de liaison pour

    N, Z = 20, 28, 50, 82, 126



Energie de liaison par nucléon (1)

B/A ≈ constante
≈ 8.5 MeV
(pour A > 12)

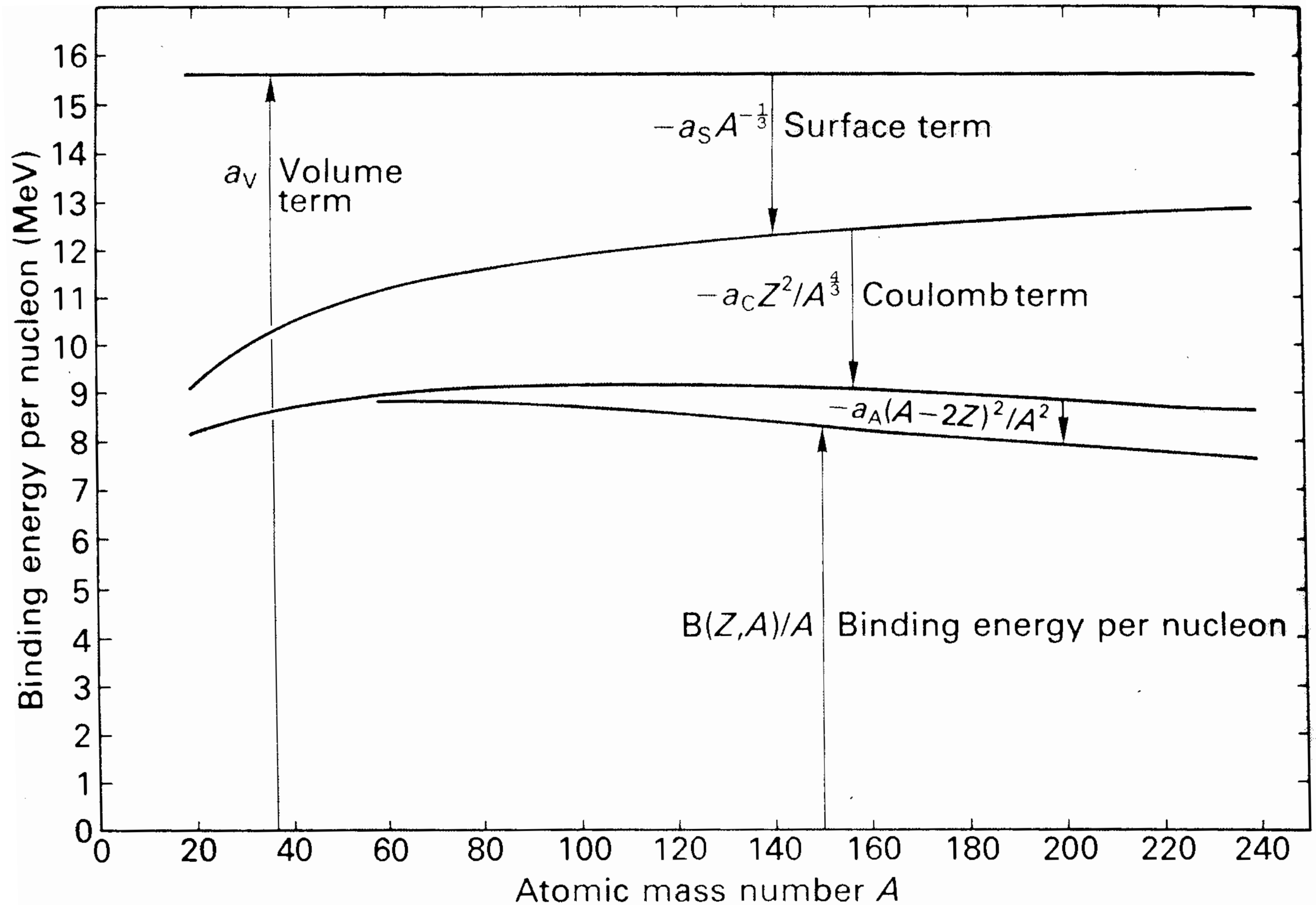


^{56}Fe = noyau dans lequel les nucléons sont le plus liés
= isotope le plus abondant (avec le Si) pour A ≥ 20

Energie de liaison par nucléon (2)

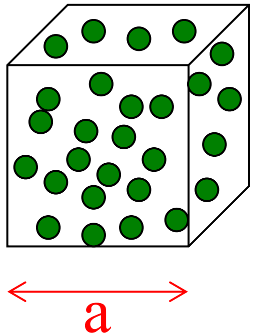
- Formule semi-empirique

$$\frac{B(Z,A)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}$$



Modèle du gaz de Fermi (1)

- Z protons et N neutrons
  - sans interaction entre eux
  - confinés dans une boîte (= noyau)
  - respectant le principe d'exclusion
- Paramètre empirique du modèle:
  a = dimension de la boîte



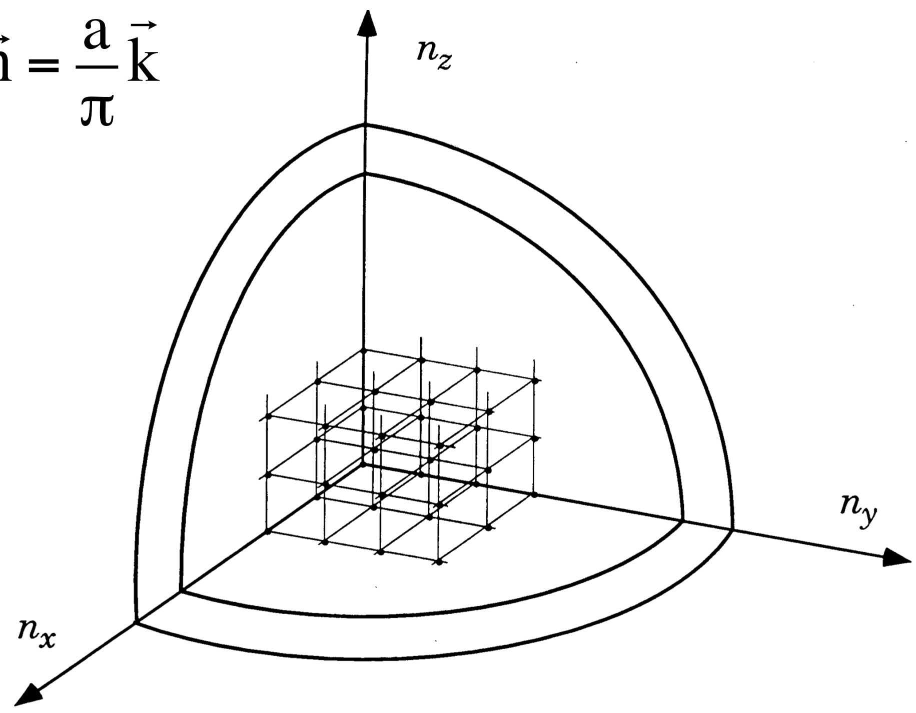
- Pour chaque nucléon:
  - fonction d'onde $\psi = \psi(x, y, z)$ avec $\begin{cases} \int_{\text{boîte}} |\psi|^2 dxdydz = 1 \\ \psi = 0 \ \text{ sauf dans la boîte} \end{cases}$
  - hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
  - équation de Schrödinger (aux valeurs propres) $H\psi = T\psi$

Modèle du gaz de Fermi (2)

Spectre d'énergie:

$$T = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \quad \text{où} \;\; n_x, n_y, n_z \text{ entiers}$$

$$\vec{n} = \frac{a}{\pi}\vec{k}$$



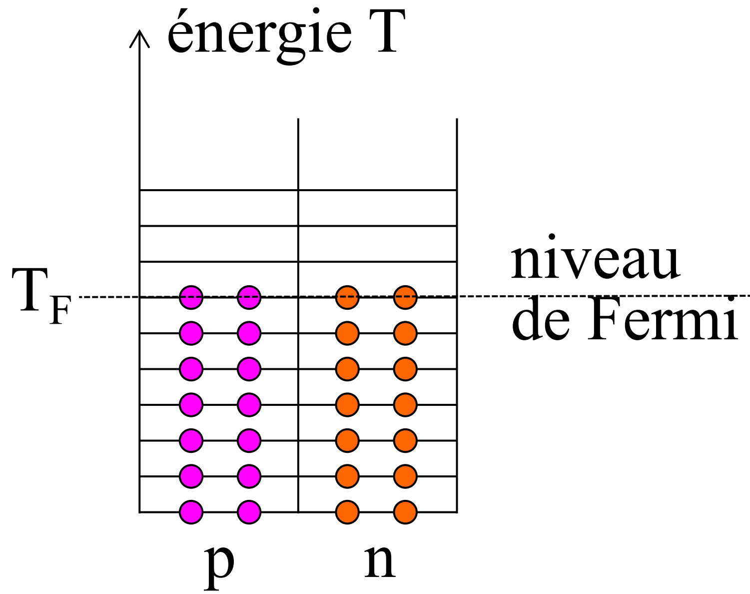
Nombre d'états avec
module de $\vec{n}$ entre n et n+dn
= nombre d'états avec
module de $\vec{k}$ entre k et k+dk:

$$du(k) = \frac{1}{8}\text{coquille} = \frac{1}{8}4\pi n^2 dn$$

$$= \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^3 k^2 dk = \frac{a^3}{2\pi^2}k^2 dk$$

$$\boxed{du(k) = \frac{\Omega}{2\pi^2}k^2 dk} \quad \text{où } \Omega = \text{volume de la boîte}$$

Modèle du gaz de Fermi (3)



- Principe d'exclusion de Pauli:
  - 2 protons + 2 neutrons
    par niveau d'énergie (spin ½)
- Pour un noyau symétrique
  avec Z = N = A/2:
  - nombre d'états tels que le
    module de k soit inférieur à k_F

$$\frac{A}{4} = u(k_F) = \int_0^{k_F} \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2\, dk = \frac{\Omega}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{2R^3}{9\pi} k_F^3$$

$$\Rightarrow k_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{A^{1/3}}{R} \approx \frac{3}{2r_0} \quad \Rightarrow \begin{cases} k_F \approx 1.27\ \text{fm}^{-1} \\ p_F = \hbar k_F \approx 250\ \text{MeV/c} \\ T_F = \hbar^2 k_F^2/(2m) \approx 33\ \text{MeV} \end{cases}$$

$r_0 = 1.2$ fm
paramètre empirique

constantes pour tous les noyaux !