Série 1

1 Diffusion élastique coulombienne (dite de Rutherford)

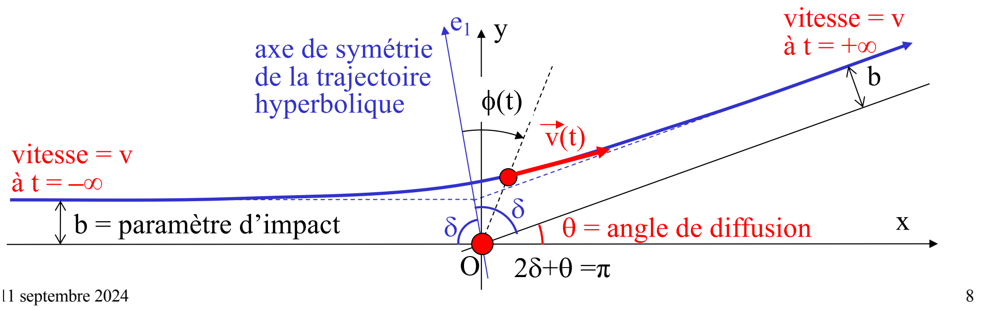
1) Démontrer la formule de Rutherford, c'est-à-dire l'expression de la section efficace différentielle de diffusion élastique d'une particule α (noyau d'hélium) d'énergie cinétique E, de masse m et de charge ze sur un noyau d'or au repos de masse M et de charge Ze,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}\,, \tag{1.1}$$

où θ est l'angle de diffusion. On fera les hypothèses (ou approximations) suivantes:

- les particules en jeu sont ponctuelles;
- le noyau d'or reste quasi immobile car $M \gg m$;
- la seule force en jeu est la répulsion coulombienne de norme $F = zZe^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$;
- on peut traiter le problème dans le cadre de la mécanique classique.

La force de Coulomb $\vec{F}$ s'exerçant sur la particule α étant centrale, le moment cinétique est conservé et le mouvement est plan. De plus, la force étant en $1/r^2$, l'orbite de la particule α est une conique, en l'occurrence une hyperbole. On définit un repère Oe_1e_2 tel que O soit sur le noyau, e_1 est l'axe de symétrie de l'hyperbole et e_2 est un axe perpendiculaire à e_1 dans le plan du mouvement. On repère la position de la particule α par ses coordonnées polaires $r(t)$ (distance à l'origine) et $\phi(t)$ (angle par rapport à l'axe e_1). L'angle θ est défini entre la vitesse de la particule α longtemps avant la diffusion (à $t = -\infty$) et sa vitesse longtemps après la diffusion (à $t = +\infty$). Ces deux vitesses ont la même norme v car la diffusion est élastique. On introduit encore l'angle $\delta = (\pi - \theta)/2$ et le paramètre d'impact b (voir dessin).



Marche à suivre:

a) exprimer la conservation du moment cinétique entre un instant t quelconque et l'instant $t = -\infty$;

b) calculer les projections e_1 et e_2 de l'impulsion $\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \vec{F}(t)dt = \vec{q}$, où $\vec{q}$ est la variation totale de la quantité de mouvement de la particule α;

c) déterminer la relation entre b et θ;

d) considérer un faisceau monochromatique de particules α illuminant uniformément une mince feuille d'or, et que toutes les particules ayant un paramètre d'impact compris entre b et $b + db$ sont déviées d'un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$, c'est-à-dire dans un angle solide $d\Omega = 2\pi \sin\theta |d\theta|$;

e) obtenir la formule de Rutherford.

2) Pourquoi a-t-on pu ignorer les électrons autour du noyau d'or ?

3) Quelle serait l'expression de la section efficace différentielle dans le cas d'une force coulombienne attractive plutôt que répulsive ? L'expérience de Rutherford permet-elle de déterminer le signe de la charge des noyaux d'or ?

4) Calculer la probabilité qu'une particule α soit déviée d'un angle θ supérieur à Θ par une feuille d'or d'épaisseur dx.

   Application numérique:

   - $\Theta = 3\pi/2$
   - particule α: $z = 2$, $m = 3727$ MeV/c^2, $E = 5$ MeV
   - feuille d'or: $Z = 79$, masse volumique $\rho = 19.3$ g/cm^3, masse molaire $A = 197$ g/mol, $dx = 0.6$ μm
   - nombre d'Avogadro $N_\text{A} = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
   - constante de structure fine $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) = 1/137$
   - $\hbar c = 197$ MeV fm

5) Quelle est la longueur de De Broglie d'une particule α d'énergie cinétique de 5 MeV ? Comparer cette longueur à la taille d'un atome d'or (1.44 Å) et à la taille d'un noyau d'or (~ 7 fm). Qu'en penser ?

6) Calculer la valeur numérique de la vitesse v en unité de la vitesse de la lumière dans le vide c, c'est-à-dire v/c. Est-ce que l'expression $E = \frac{1}{2}mv^2$ utilisée dans le calcul de la section efficace était justifiée ? Refaire le calcul de v/c sans l'approximation non-relativiste.