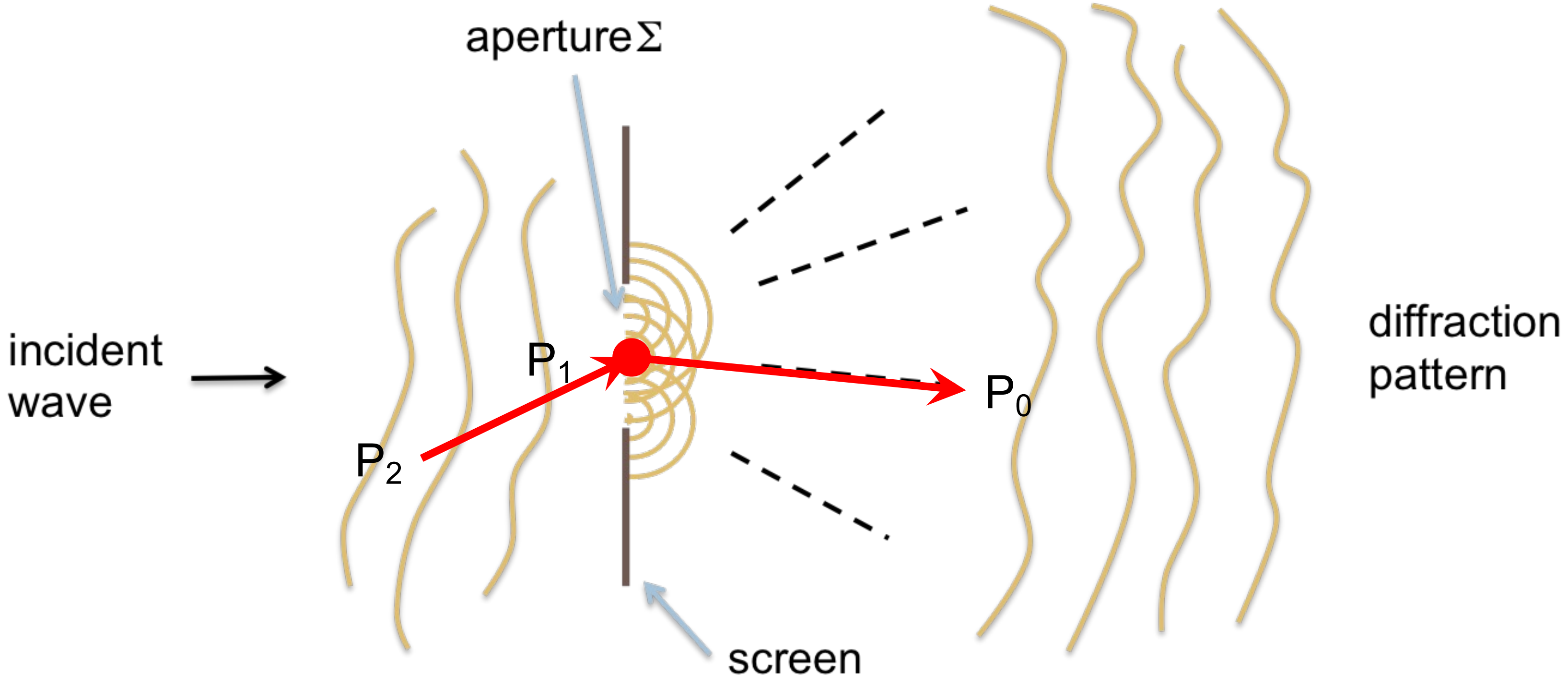
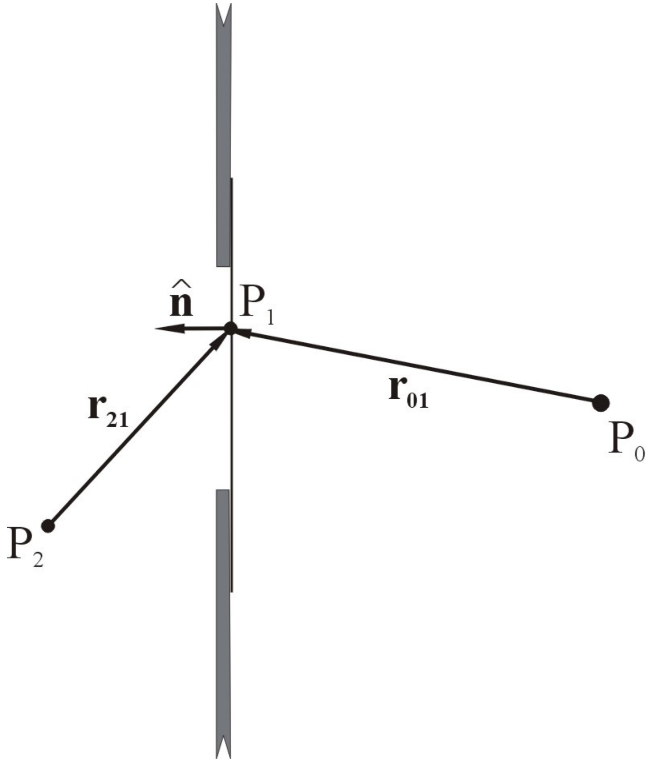
La diffraction - Principes généraux

- Le but est de calculer le champ ***E*** en un point P_0 de l'espace, qui résulte d'une onde (plane ou sphérique) passant par une ouverture Σ dans une parois opaque. L'origine de l'onde sphérique est une source ponctuelle P_2 .
- La méthode: pour chaque point P_1 de l'ouverture illuminé par l'onde venante du point source P_2, on calcule la contribution au champ au point P_0 (par une méthode qui rappelle les ondelettes de Huygens), puis on intègre sur la surface de l'ouverture.

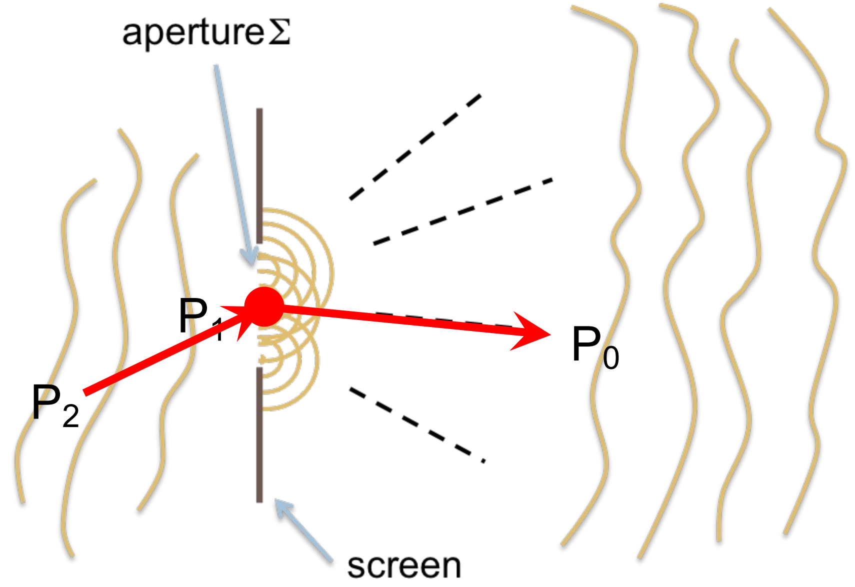


Problème général: onde diffracté par une ouverture Σ

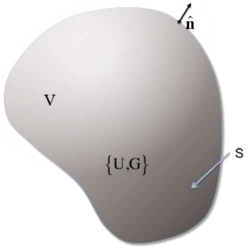


Définitions des points P_0, P_1, P_2

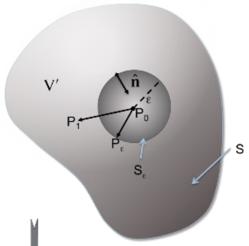
La diffraction - Les étapes du calcul



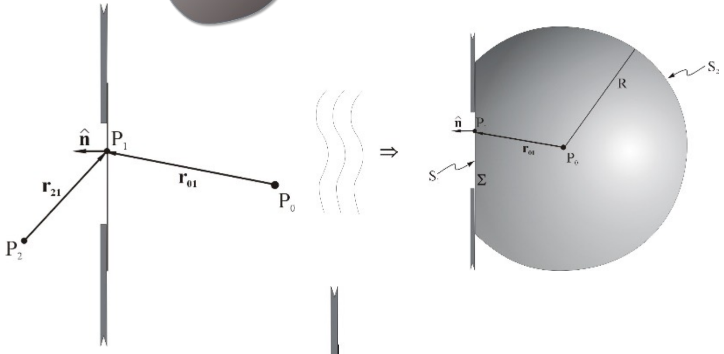
1. Le théorème de Green: Lien entre intégrale de surface et de volume, pour des solutions de l'équation d'onde.



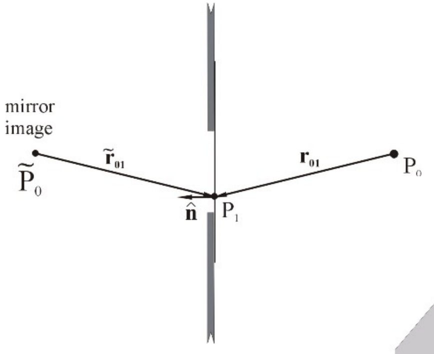
2. L'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff: Lien entre le champ dans un point et sur une surface qui l'entoure.



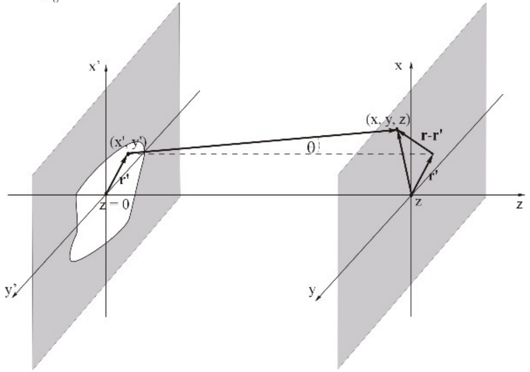
3. La formule de Fresnel-Kirchhoff: Le champ dans un point illuminé par une ouverture



4. La formule de Sommerfeld-Kirchhoff: une correction plus physique de Fresnel-Kirchhoff



5. La diffraction de Fresnel et de Fraunhofer: calcul de la diffraction (dans l'approximation paraxiale)



1. Le théorème de Green

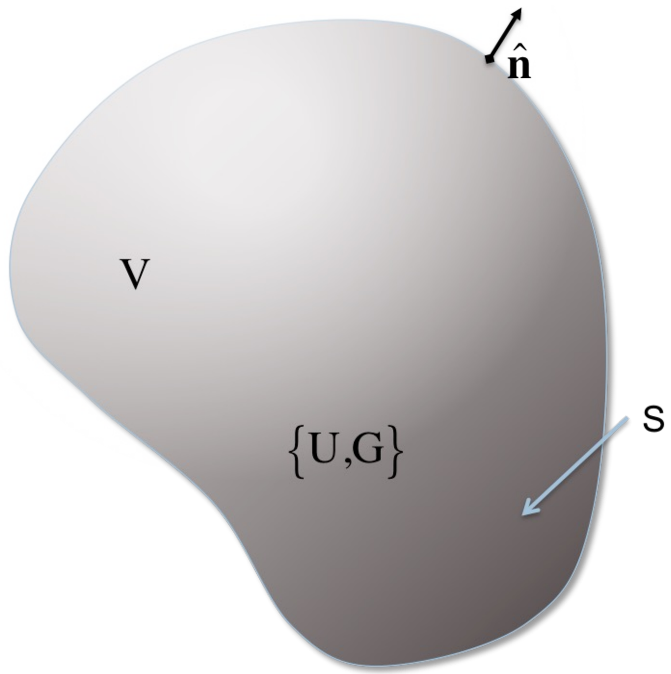
- Nous écrivons le champ $E(\boldsymbol{r},t) = U(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$, où $U(\boldsymbol{r})$ est une solution de l'équation de Helmholtz: $(\nabla^2 + k^2)U(\boldsymbol{r}) = 0$. (k=ω/c).
- Pour développer le théorème de Green, nous prenons la loi de divergence de Gauss: $\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}dV$, S étant une surface close entourant un volume V (sous condition de continuité de la fonction ***A*(*r*)** et de sa dérivée).
- Prenons une fonction: $\boldsymbol{A} = G\boldsymbol{\nabla}U - U\boldsymbol{\nabla}G$, qui donne: $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = G\nabla^2U - U\nabla^2G$. $U(\boldsymbol{r})$ est notre champ électrique, $G(\boldsymbol{r})$ est une fonction "arbitraire", qui est aussi une solution à l'équation de Helmholtz.
- En substituant ce ***A*** dans la loi de Gauss, nous obtenons le **théorème de Green** :

$\int_S (G\boldsymbol{\nabla}U - U\boldsymbol{\nabla}G)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n}\hat{e}_n - U\frac{\partial G}{\partial n}\hat{e}_n\right)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_V (G\nabla^2U - U\nabla^2G)dV$ ($\hat{e}_n$ est le vecteur normal à la surface S).

- Puisse que U et G sont des solutions à l'équation de Helmholtz, avec le même k, nous avons: $G\nabla^2U - U\nabla^2G = -Gk^2U + Uk^2G = 0$, ce qui donne:

$$\int_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n}\hat{e}_n - U\frac{\partial G}{\partial n}\hat{e}_n\right)\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \quad .$$

C'est le théorème de Green pour des solution à l'équation de Helmholtz.



2. Le théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff

- Nous utilisons le théorème de Green, avec le champ *U*(***r***) et la fonction: $G(r_{01}) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$, qui sont des solution à l'équation de Helmholtz. Le point P_1 se trouve sur une surface arbitraire *S* entourant le point P_0 .
- Selon le théorème de Green: $\int_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n - U \frac{\partial G}{\partial n} \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s} = 0$.
- Afin d'éviter la singularité de $G(r_{01})$ au point P_0, nous divisons *S* en deux parties: $S = S' + S_\varepsilon$, S_ε est une sphère de rayon ε autour de P_0. L'intégrale sur la somme de deux surfaces étant nulle, nous avons donc:

$$\int_{S'} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n - U \frac{\partial G}{\partial n} \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n - U \frac{\partial G}{\partial n} \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s} \ .$$

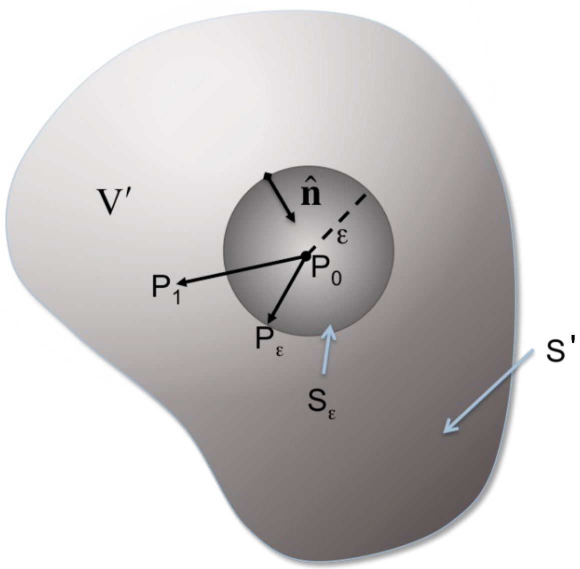
- L'intégrale sur la sphère donne (le sens de $\hat{e}_n$ est vers l'intérieur, d'où une inversion de signe des dérivées):

$$\int_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n - U \frac{\partial G}{\partial n} \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{S_\varepsilon} \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial U(P_\varepsilon)}{\partial n} - U(P_\varepsilon) \left(-\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} + \frac{ike^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right) \varepsilon^2 d\Omega =$$

$$-4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial U(P_\varepsilon)}{\partial n} - U(P_\varepsilon) \left(-\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} + \frac{ike^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right) = -4\pi \left(\varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial U(P_\varepsilon)}{\partial n} + U(P_\varepsilon) \left(e^{ik\varepsilon} - \varepsilon ike^{ik\varepsilon} \right) \right) .$$

- En prenant la limite ε–>0 , nous trouvons: $\int_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} \hat{e}_n - U \frac{\partial G}{\partial n} \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s} \ \overrightarrow{\varepsilon \to 0} \ -4\pi U(P_0)$.

Cela donne: $U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \hat{e}_n - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \hat{e}_n \right) \cdot d\boldsymbol{s}$.



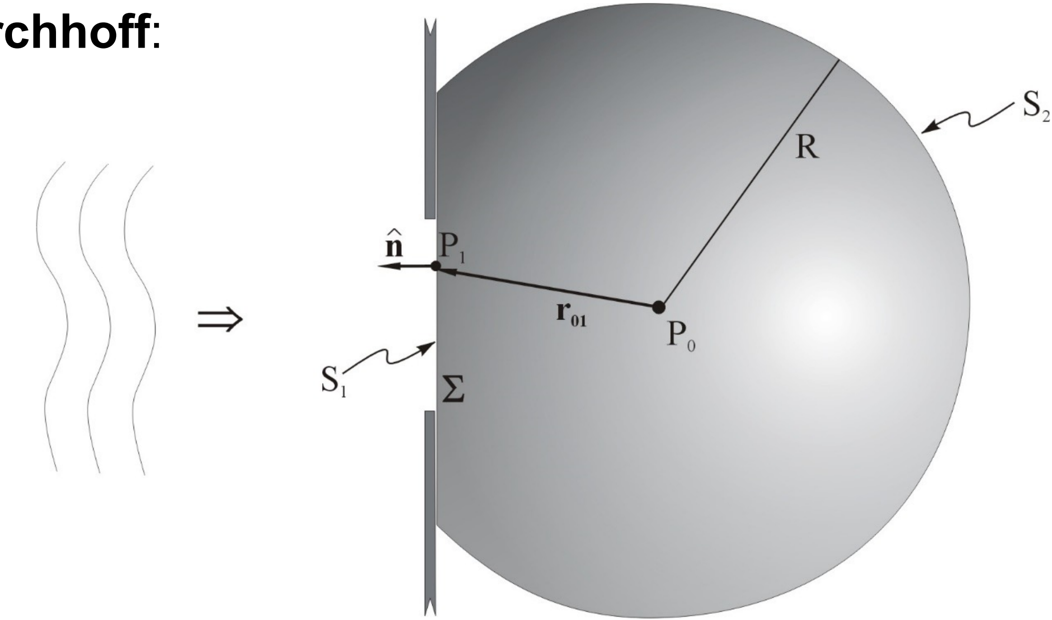
- C'est le **théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff**

3. La formule de Fresnel-Kirchhoff

- On utilise le théorème Helmholtz-Kirchhoff: $U(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$.
- Nous choisissons une surface *S*'=S_1+S_2 : S_2 est une grande sphère de rayon *R*, en partie coupé par la paroi (surface S_1). La fonction $G(r_{01})$ est toujours une onde sphérique centré sur P_0 : $G(r_{01}) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$.
- Sur la surface de la sphère (pour *R*>>1/*k* et *R*>>Σ): $G(R) = \frac{e^{ikR}}{R}$ et: $\frac{\partial G}{\partial n}(R) = \frac{ike^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R^2} \xrightarrow{R\,\gg} ikG(R)$.
- L'intégrale sur S_2 est donc: $\int_{S_2}\left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S_2} G(R)\left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU\right)R^2 d\Omega$.
- Nous aimerions que cette intégrale soit zéro pour $R \to \infty$; puisse que *G*(*R*)≈1/*R*, nous demandons que: $R\left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU\right) \to 0$ pour $R \to \infty$. Cette condition est remplie pour les ondes planes et sphériques.
- Pour la paroi S_1, nous supposons des **conditions de bord de Kirchhoff**: *U* **et** $\frac{\partial U}{\partial n}$ n'ont des valeurs non-nulles **que** dans l'ouverture Σ .
- Le résultat est:

  $U(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$; en utilisant: r_{01}>>1/*k*, on obtient:

  $G = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$, $\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \approx ik\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$



- Donc: $U(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\left(\frac{\partial U}{\partial n} - ik\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\,U\right)ds$.

3. La formule de Fresnel-Kirchhoff (suite)

- Nous avons obtenu: $U(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\left(\frac{\partial U}{\partial n} - ik\cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\, U\right) ds$.
- Si l'ouverture Σ est illuminé par une onde plane: $U = U_0 e^{ikz}$, $\frac{\partial U}{\partial n} = -ikU$ (la direction de z et de $\widehat{\boldsymbol{n}}$ sont opposées), ce qui donne pour l'intégrale:

$U(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} U_0 e^{ikz}(-ik - ik\cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01}))ds = \frac{-ik}{4\pi} U_0 e^{ikz_1}\int_\Sigma \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}(1 + \cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01}))ds$ (z=z_1=constante sur Σ).

- Pour une onde sphérique venant d'un point source P_2 : $U(P_1) = U_0 \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}$, avec la même approximation (r_{21}>>1/k):

$\frac{\partial U}{\partial n} \approx ikU_0\cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{21})\frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}$ et donc:

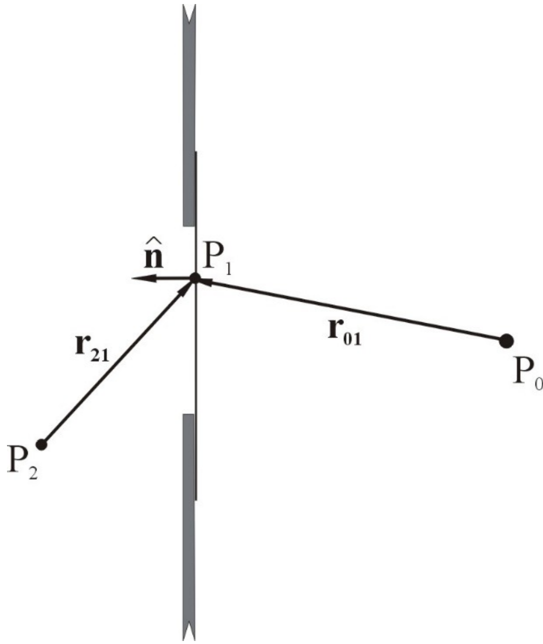
$$U(P_0) = \frac{ik}{4\pi} U_0 \int_\Sigma \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}}[\cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{21}) - \cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})]ds \ .$$

- C'est la **formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff** .
- On peut aussi l'écrire d'une manière succincte:

$$U(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} K(\theta) ds \quad ,$$

avec: $K(\theta) = [\cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{21}) - \cos(\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})]/2$ $(\theta \equiv (\widehat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01}))$.

- On appelle $K(\theta)$ le **facteur d'obliquité** .
- Pour l'onde plane: $U(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} K(\theta) ds$, avec: $K(\theta) = -(\cos(\theta) + 1)$.



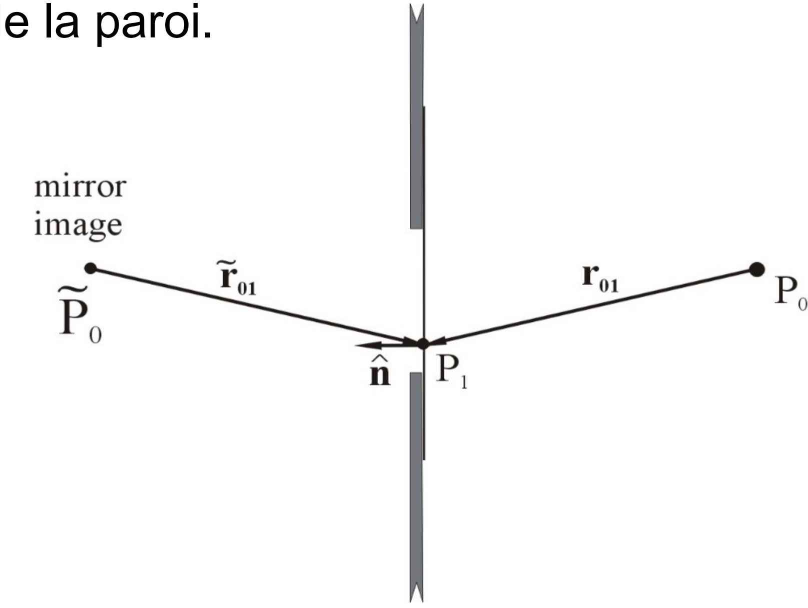
4. La formule de Sommerfeld-Kirchhoff

- La formule de Fresnel-Kirchhoff a un problème: Nous supposons que sur la paroi (hors ouverture), *U* et $\frac{\partial U}{\partial n}$ sont nulles. Or, une fonction analytique qui remplit ces conditions doit être nulle dans toute l'espace à droite de la paroi.
- Pour éviter ce problème, nous devons relaxer cette condition, et demander que seulement *U* **ou** $\frac{\partial U}{\partial n}$ soit nulle.
- Cela implique une nouvelle fonction *G*(*r*), pour assurer que $\left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right)$ soit toujours nulle sur la paroi.
- Nous la construisons en utilisant un point $\tilde{P}_0$, qui est l'image miroir de P_0 par rapport à la paroi.
- Il y a deux possibilités dans le choix de *G*(*r*) :
  - Nous choisissons: $G_-(r_{01}) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}$. Sur la paroi (y compris l'ouverture), $r_{01} = \tilde{r}_{01}$, ce qui donne: $G_-(P_1) = 0$. Nous demandons donc que seul $\mathrm{U} = 0$ sur la partie opaque de la paroi.
  - Nous calculons: $\frac{\partial G_-}{\partial n} \approx ik\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}[\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01}) - \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{r}}_{01})]$

    $= 2ik\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})$, puisse que: $\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01}) = -\cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{r}}_{01})$.
  - D'une manière similaire (avec $\frac{\partial U}{\partial n}$=0 dans la partie opaque),

    on peut utiliser : $G_+(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} + \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}$, ce qui va donner: $\frac{\partial G_+}{\partial n}(P_1) = 0$

    sur la paroi, et: $G_+(P_1) = 2\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$.



4. La formule de Sommerfeld-Kirchhoff (suite)

- En choisissant: $G_{-}(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}$ (donc $G_{-}(P_1) = 0$ sur la paroi et l'ouverture, $U = 0$ sur la paroi (sans l'ouverture), puis $\frac{\partial G_{-}}{\partial n} \approx 2ik \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})$), l'intégral de diffraction donne: $U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{-2ik}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} U(P_1) \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\, ds = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} U(P_1) \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\, ds.$
- Pour une onde plane: $U = U_0 e^{ikz}$, ce qui donne pour l'intégrale (z=z_1=constante sur Σ):

$$U(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda} e^{ikz_1} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\, ds = \frac{U_0}{i\lambda} e^{ikz_1} \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} K(\theta) ds.$$

- Dans le cas d'une source d'onde sphérique: $U(P_1) = U_0 \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}$, nous obtenons la même formule qu'avant:

$$U(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01} r_{21}} \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})\, ds = \frac{U_0}{i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01} r_{21}} K(\theta) ds \ .$$

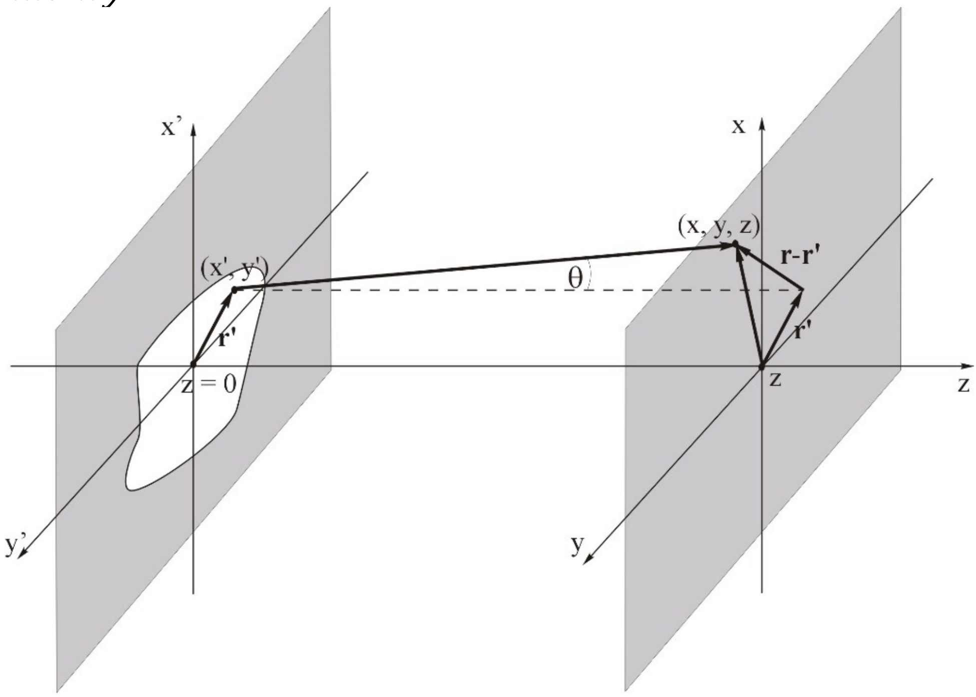
- C'est la **formule de diffraction de Sommerfeld-Kirchhoff**.
- Le facteur d'obliquité: $K(\theta) = \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{r}_{01})$ est différent de celui de la formule de Fresnel-Kirchhoff, mais ne change pas entre une source d'onde plane et sphérique.

5. La diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

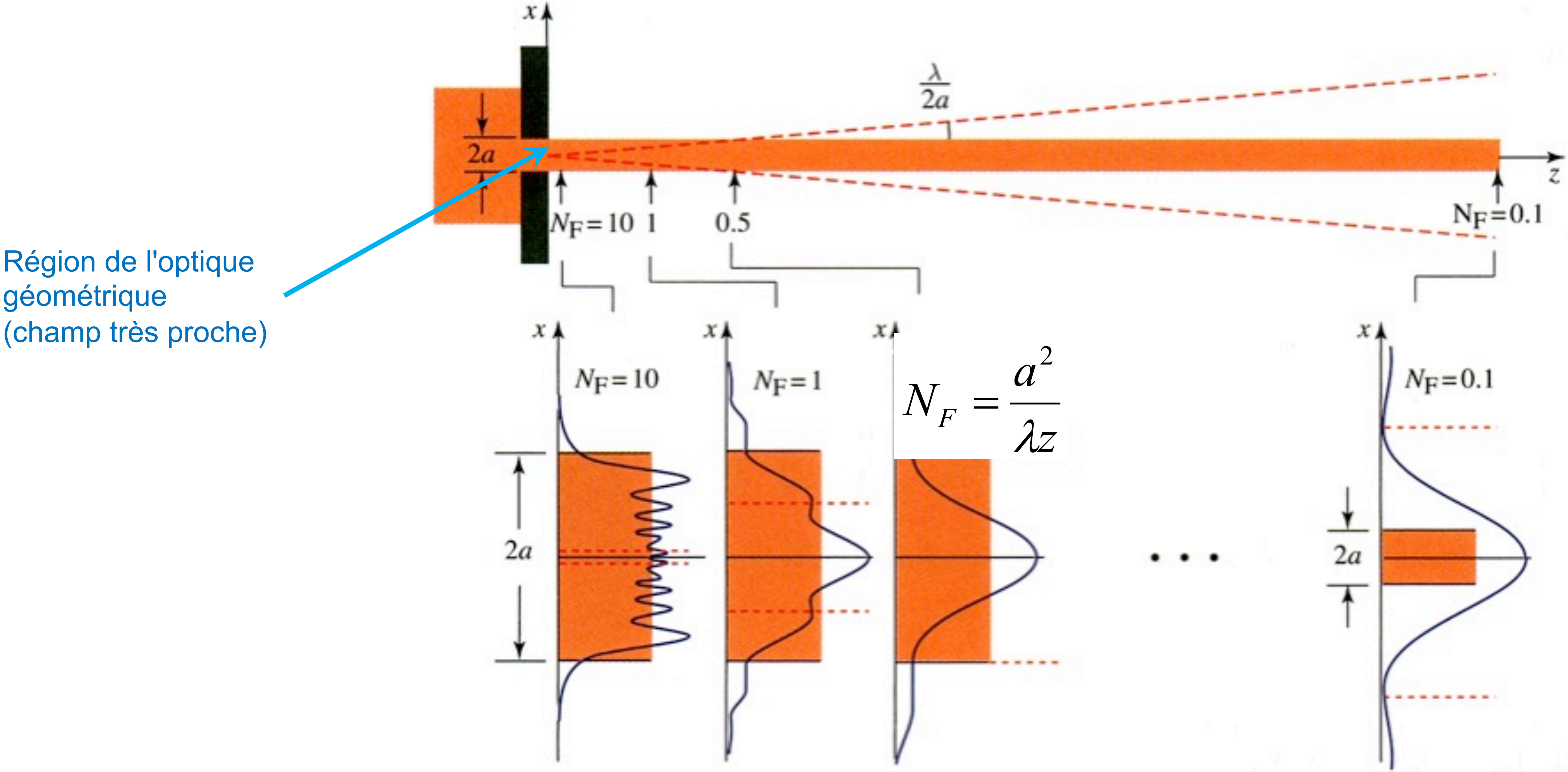
- Nous utilisons ici la formule de diffraction générique: $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ik(\overline{rr'})}}{(\overline{rr'})} U(r')K(\theta)ds'$ pour calculer le champ de la diffraction à un point ***r*** en fonction du champ *U*(***r***') dans le plan de l'ouverture Σ .
- Nous utilisons l'**approximation paraxiale**, qui implique:
  - *K*(θ) ≈ 1 .
  - Dans le dénominateur, on utilise l'expansion à l'ordre zéro: $\overline{rr'} \approx z$.
  - Dans l'exponentiel, l'expansion en 1[er] ordre donne: $\overline{rr'} = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z} + \frac{x'^2+y'^2}{2z}$.
- Le résultat final est donc: $U(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \int_\Sigma U(r') e^{ik\left(\frac{x'^2+y'^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z}\right)} dx'dy'$
- Si on définit: $R_0^2 = \max({x'}^2 + {y'}^2)$, la contribution du terme $\frac{x'^2+y'^2}{2z}$ dans l'exponentiel serait limitée par: $\delta\varphi_{max} = \frac{kR_0^2}{2z} = \frac{\pi R_0^2}{\lambda z} \equiv \pi N_F$.
- $N_F \equiv \frac{R_0^2}{\lambda z}$ s'appelle le **nombre de Fresnel**.
- Nous distinguons entre deux cas:
  - Champ proche, ou **diffraction de Fresnel** : $\delta\varphi_{max} > \pi$, ou: $N_F > 1$.

    Le terme $\frac{x'^2+y'^2}{2z}$ doit être maintenu.
  - Champ lointain, ou **diffraction de Fraunhofer** : $\delta\varphi_{max} < \pi$, ou: $N_F < 1$.

    Le terme $\frac{x'^2+y'^2}{2z}$ peut être ignoré.



De Fresnel à Fraunhofer: question de distance



Région de Fresnel

Région de Fraunhofer

De Fresnel à Fraunhofer: diffraction d’un trou carré

La diffraction change de Fraunhofer à Fresnel quand la taille du trou augmente:

Un trou carrée dans une parois opaque:

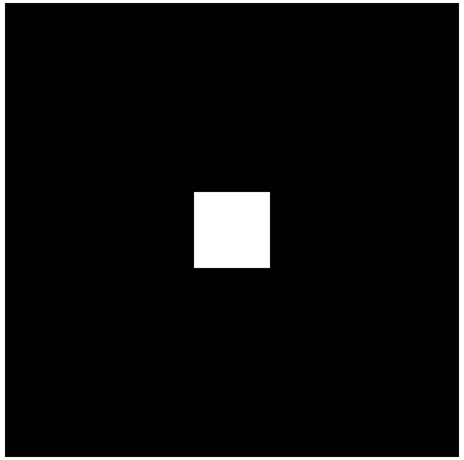
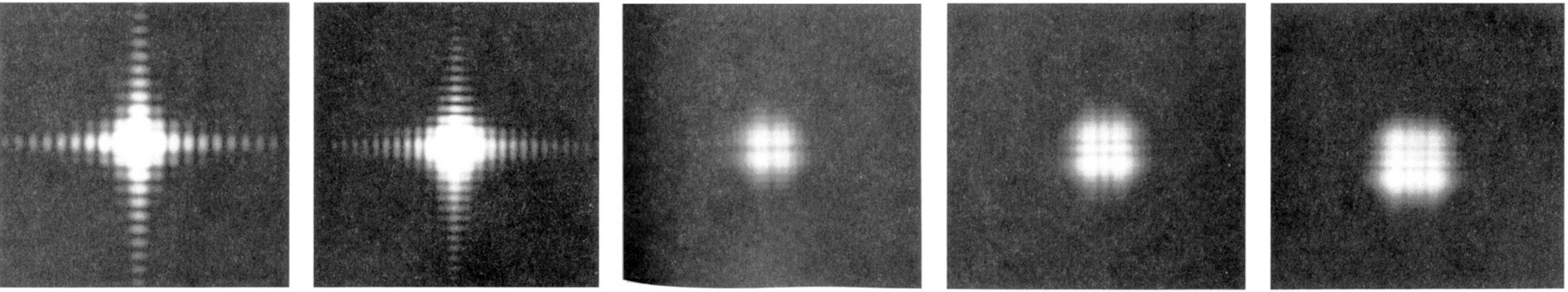


Figure de diffraction correspondante:

Taille croissante du trou →

Fraunhofer

Fresnel



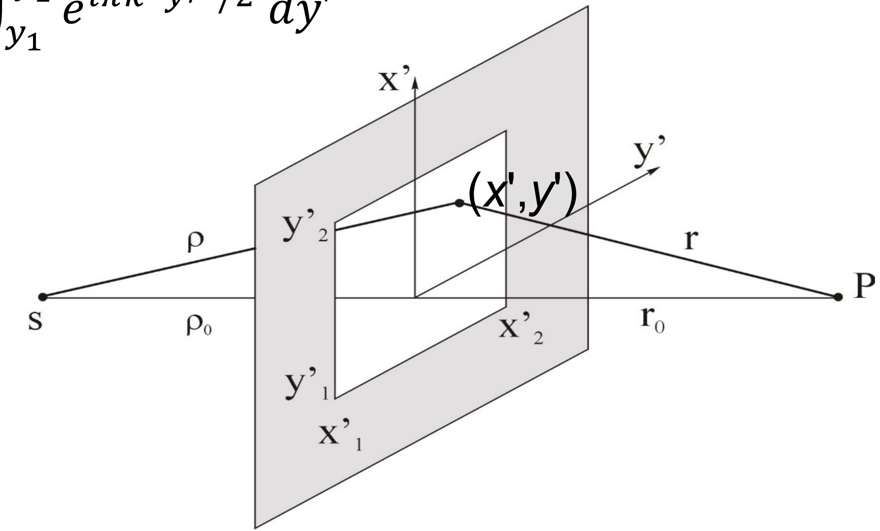
Calcul détaillé de la diffraction de Fresnel (source = point)

- Pour calculer la diffraction de Fresnel, il faut retenir tous les éléments dans l'approximation paraxiale.
- Pour simplifier le calcul, prenons une ouverture rectangulaire (coordonnées x'_1, y'_1 et x'_2,y'_2) et calculons la diffraction entre une source (point *S*) et un écran (point *P*) qui sont **sur l'axe optique** *z*. Nous allons nommer ρ la distance entre la source *S* et le point (x',y') de l'ouverture (appelé r_{21} avant), et ρ_0 la distance entre la source *S* et le point (0,0) de l'ouverture. La même chose pour *r* (appelé r_{01} avant) et r_0 par rapport au point P de l'image.
- En utilisant ces termes, la formule de Sommerfeld s'écrit: $U(P) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ik(r+\rho)}}{r\rho} K(\theta) ds$.
- L'approximation paraxiale serait: $r \approx r_0 + \frac{x'^2+y'^2}{2r_0}$, $\rho \approx \rho_0 + \frac{x'^2+y'^2}{2\rho_0}$ et $K(\theta) \approx 1$ (dans le dénominateur: $r\rho \approx r_0\rho_0$).
- L'intégrale est séparable en x' et y', donnant le champ: $U(P) = \frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{i\lambda r_0\rho_0}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} e^{ik\frac{r_0+\rho_0}{2r_0\rho_0}(x'^2+y'^2)}\, dx'dy' =$

$$\frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{i\lambda r_0\rho_0}\int_{x_1}^{x_2} e^{ik\frac{r_0+\rho_0}{2r_0\rho_0}x'^2} dx' \int_{y_1}^{y_2} e^{ik\frac{r_0+\rho_0}{2r_0\rho_0}y'^2}\, dy' = \frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{i\lambda r_0\rho_0}\int_{x_1}^{x_2} e^{i\pi\kappa^2 x'^2/2} dx' \int_{y_1}^{y_2} e^{i\pi\kappa^2 y'^2/2}\, dy'$$

avec: $\kappa \equiv \frac{2(r_0+\rho_0)}{\lambda r_0\rho_0}$. Définissons les variables: $u \equiv \kappa x'$, $v \equiv \kappa y'$ pour obtenir des intégrales universelles:

$$U(P) = \frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{2i(r_0+\rho_0)}\int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2}\, du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2}\, dv \ .$$

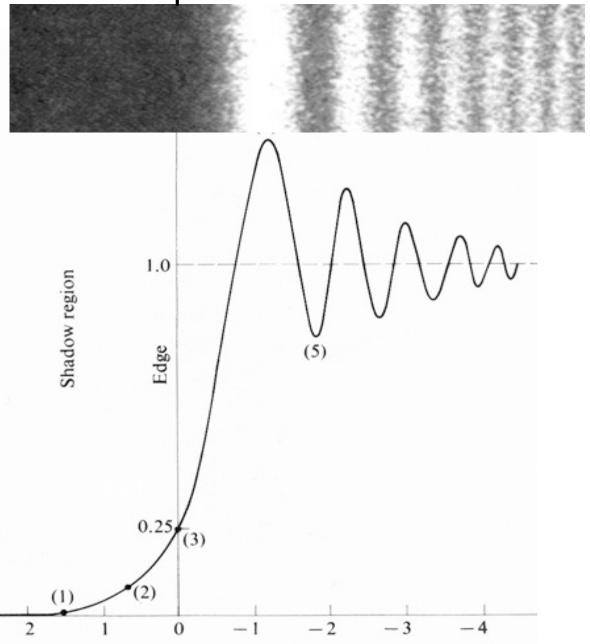


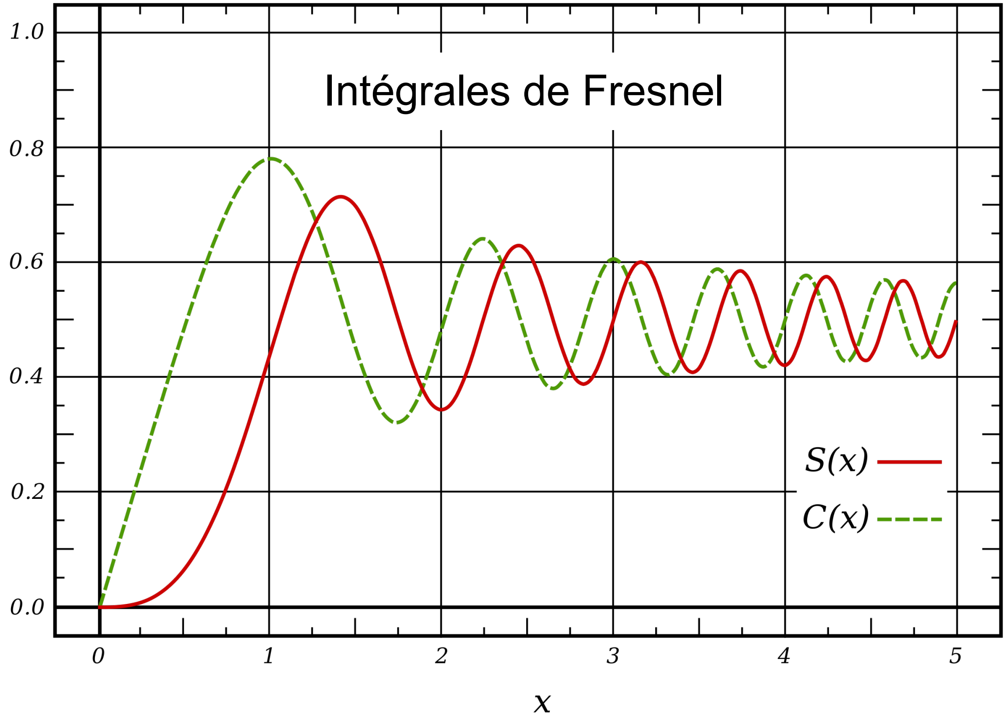
- Il faut toujours calculer deux intégrales, une pour *u* et une pour *v*, avec les limites correspondantes aux dimensions de l'ouverture.

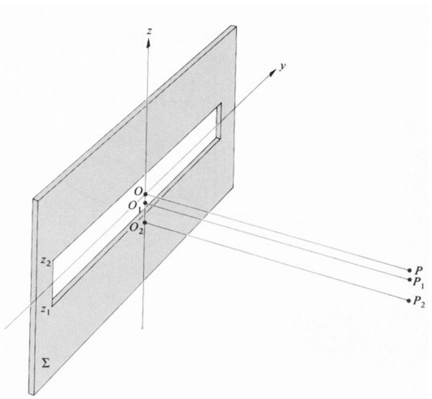
La diffraction de Fresnel: comment calculer les intégrales

- Nous devons calculer des intégrales de type: $Int = \int_{w_1}^{w_2} e^{i\pi w^2/2}\, dw$. Pour le faire, on décompose l'intégrande en une partie réelle et une partie imaginaire, pour obtenir: $Int = \int_{w_1}^{w_2} \left[\cos(\frac{\pi w^2}{2}) + i \sin(\frac{\pi w^2}{2})\right]\, dw = \int_{0}^{w_2} \left[\cos(\frac{\pi w^2}{2}) + i \sin(\frac{\pi w^2}{2})\right]\, du - \int_{0}^{w_1} \left[\cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right)\right]\, dw \equiv [C(w_2) - C(w_1)] + i[S(w_2) - S(w_1)]$.
- Les deux intégrales à calculer sont les **intégrales de Fresnel** : $C(w) = \int_0^w \cos(\frac{\pi w'^2}{2})\, dw'$ et $S(w) = \int_0^w \sin(\frac{\pi w'^2}{2})\, dw'$
- L'intensité diffractée est: $I \propto |[C(u_2) - C(u_1)] + i[S(u_2) - S(u_1)]|^2 = [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2$.
- Ces intégrales peuvent être calculées numériquement, p. ex. en utilisant une série convergente
- Les oscillations des valeurs donnent lieu à des oscillation de l'intensité diffractée.

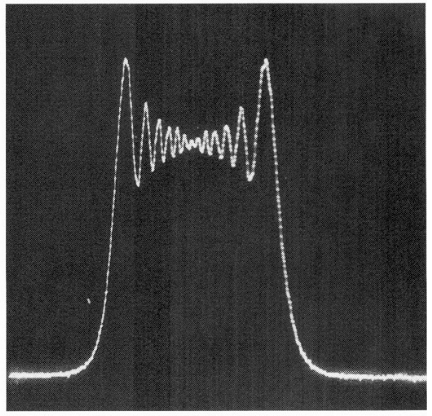
Image et profil de l'intensité d'un plan semi-infini





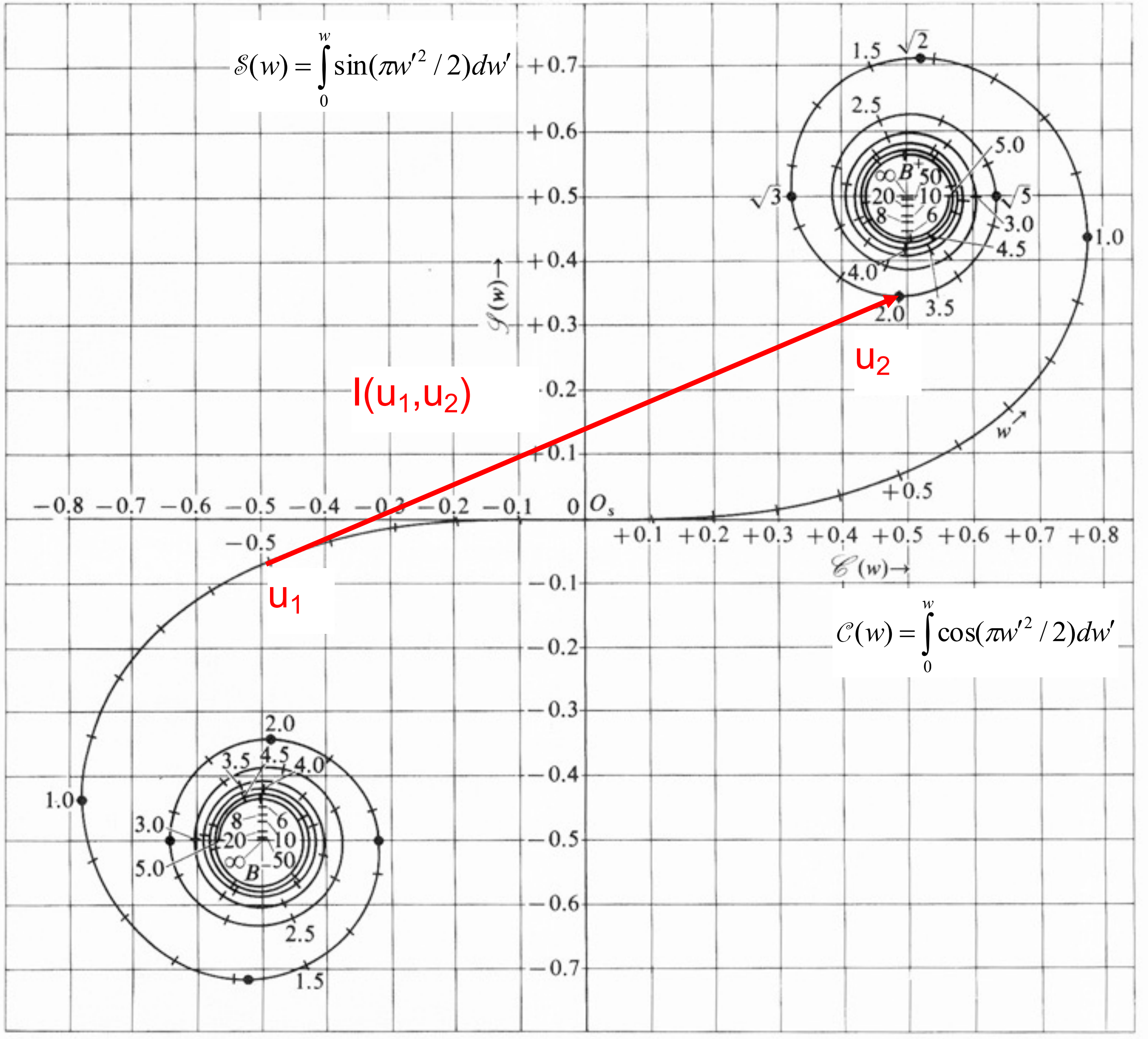


Profil de l'intensité d'une fente



Bonus: La diffraction de Fresnel: méthode géométrique de calcul (1)

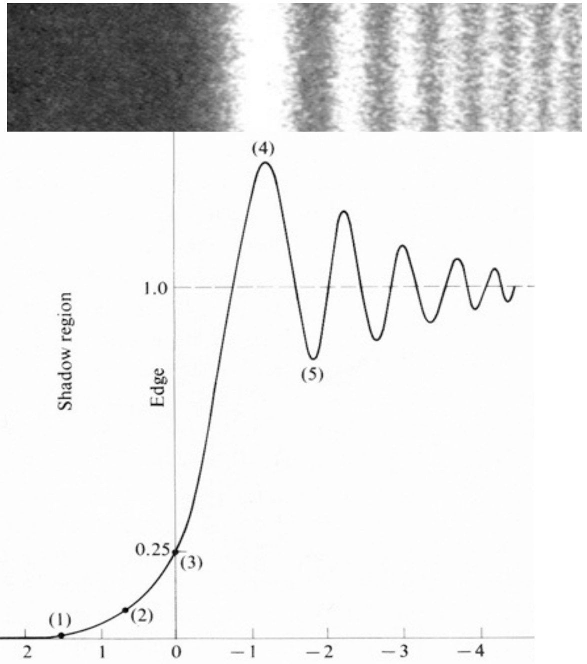
- Nous avons vu que le calcul de l'intensité diffractée est: $I \propto |[C(u_2) - C(u_1)] + i[S(u_2) - S(u_1)]|^2 = [C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2$.
- Nous pouvons dessiner une courbe, dans le plan [*C*(*w*),*S*(*w*)], qui relie les points correspondantes à chaque valeur du paramètre *w*.
- Les valeurs *C*(*u*) et *S*(*u*) ont été calculées numériquement, et le dessin de tous les points (*C*(*u*),*S*(*u*)) s'appelle la **spirale de Cornu**.
- L'intensité corresponde à la longueur d'un vecteur entre le point (*x*,*y*)=[*C*(u_2),*S*(u_2)] et le point: (*x*,*y*)=[*C*(u_1),*S*(u_1)] dans ce plan.



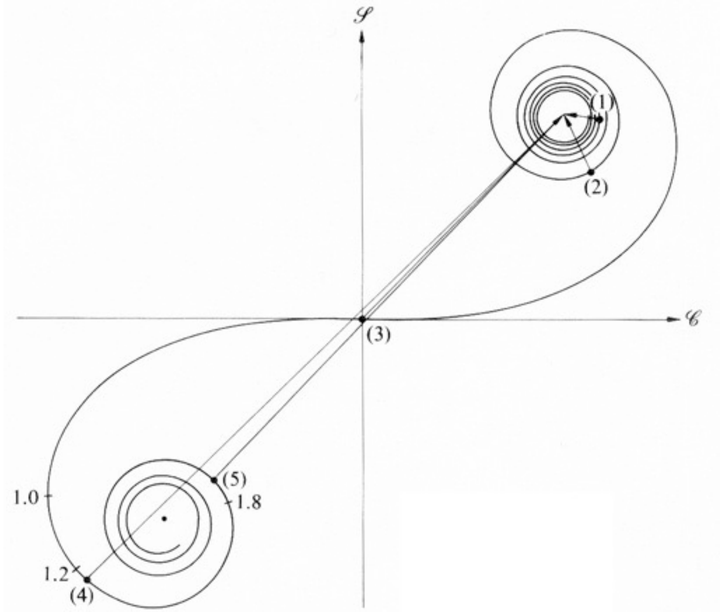
Bonus: La diffraction de Fresnel: méthode géométrique de calcul (2)

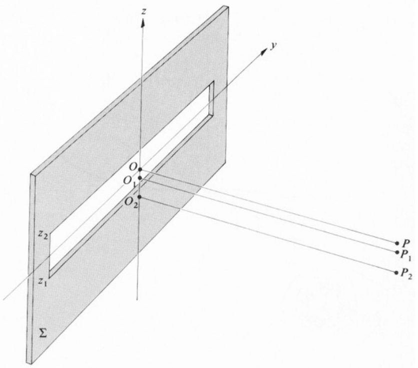
- Rappel: nous voulons calculer l'intensité au point P sur l'axe par: $U(P) = \frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{2i(r_0+\rho_0)} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2}\, du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2}\, dv$.
- Nous avons trouvé une manière de le calculer avec la spirale de Cornu, qu'il faut appliquer deux fois (pour *u* et *v*).
- Pour calculer l'intégrale pour un autre point *P′*, on doit redéfinir l'axe *z* entre *S* et *P′*, ce qui va changer les limites de l'ouverture et donc les limites des intégrales.
- Exemples:
  - La diffraction par un plan semi-infini (un point limite est le point (1) du diagramme, correspondant à *w*=∞).
  - D'une manière similaire, on peut calculer la diffraction d'une fent

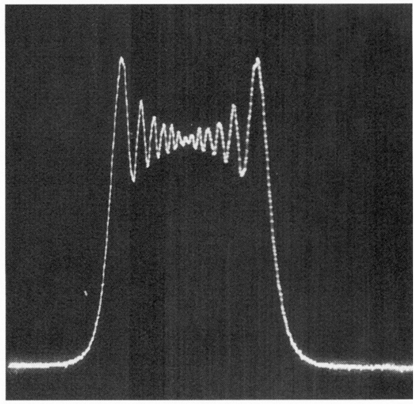
Image et profil de l'intensité:

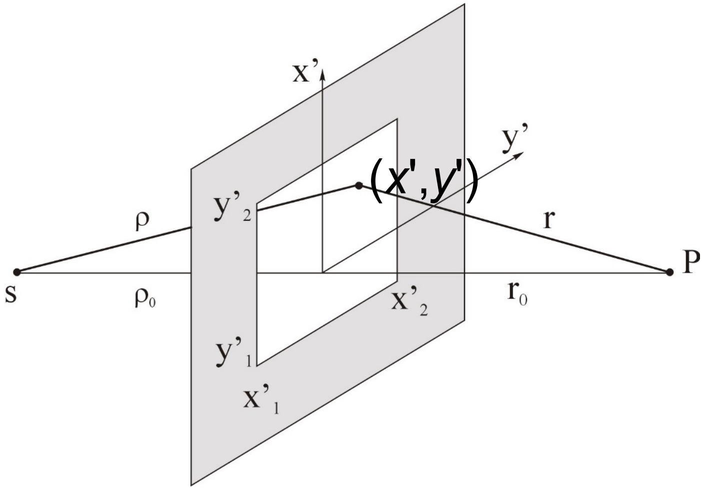


La spirale de Cornu, avec les points correspondants aux points du profil:

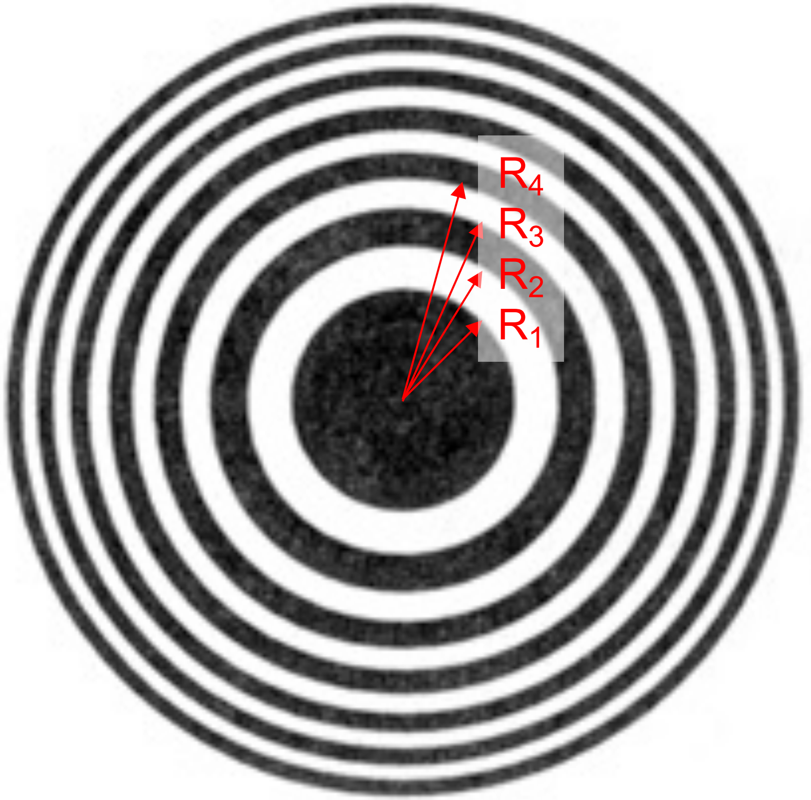








Les zones de Fresnel



- Prenons l'équation de la diffraction de Fresnel avec une source *S* et un plan de diffraction *X*-*Y*. Le champ au point *P* est:

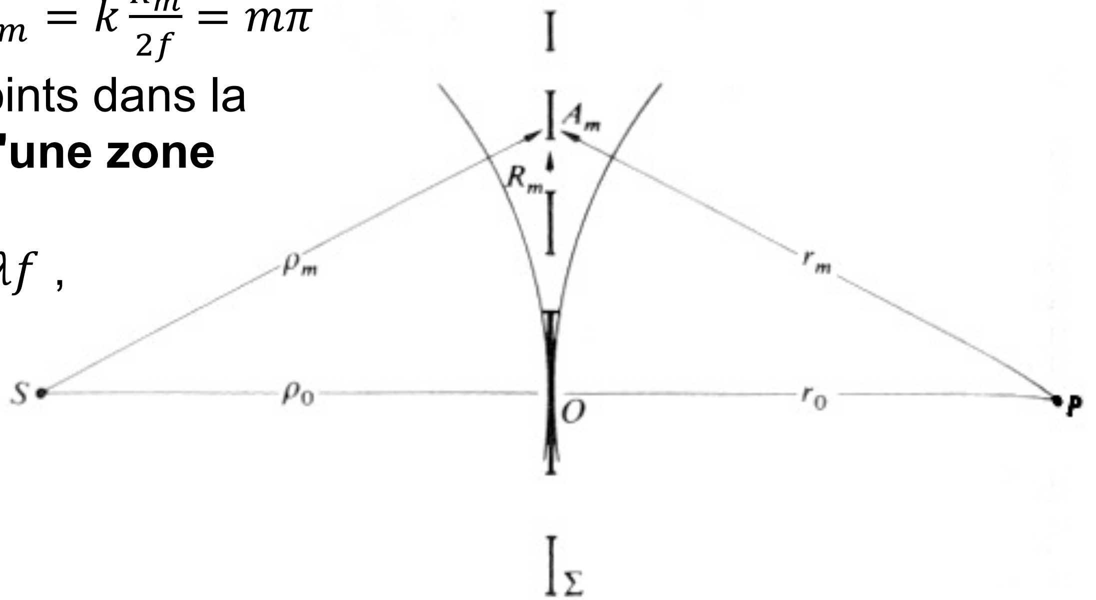
$$U(P) = \frac{U_0 e^{ik(r_0+\rho_0)}}{i\lambda r_0 \rho_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik\frac{(x'^2+y'^2)}{2}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\, dx'dy' \,.$$

- En définissant: $R^2 = x'^2 + y'^2$ et: $\frac{1}{f} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\rho_0}$, nous obtenons:

$$U(P) = \frac{U_0}{i\lambda} \frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik\frac{R^2}{2f}} dx'dy'$$, ou en coordonnées polaires:

$$U(P) = \frac{U_0}{i\lambda} \frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_{0}^{2\pi} e^{ik\frac{R^2}{2f}} R dR d\theta = \frac{2\pi U_0}{i\lambda} \frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0} \int_{R_1}^{R_2} e^{ik\frac{R^2}{2f}} R dR.$$

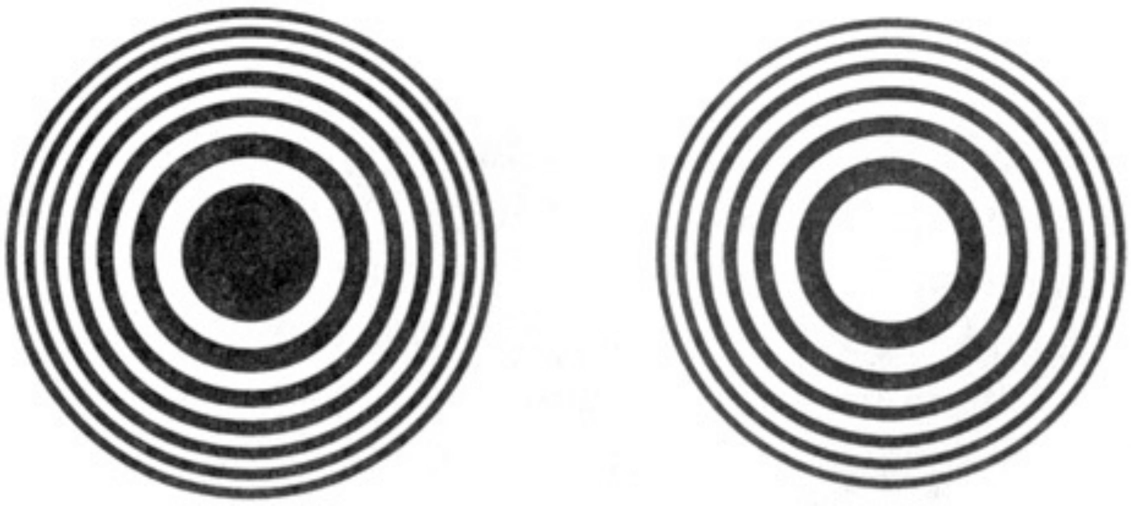
- Nous divisons le plan *x*'-*y*' en anneaux, limités par des cercles de diamètres: $R_m^2 = m\lambda f$ (*m* = 1,2,…). On les appelle les **zones de Fresnel**.
- La phase de l'exponentielle liée aux points sur ces cercles est: $\varphi_m = k\frac{R_m^2}{2f} = m\pi$
- La différence de phase entre les ondes venants des différents points dans la même zone est: $\Delta\varphi \leq \varphi_{m+1} - \varphi_m = \pi$, donc tous ces champs **d'une zone** s'interférent **constructivement** au point *P*.
- La surface de chaque zone est la même: $S = \pi(R_{m+1}^2 - R_m^2) = \pi\lambda f$, ce qui donne la même contribution à l'intensité.

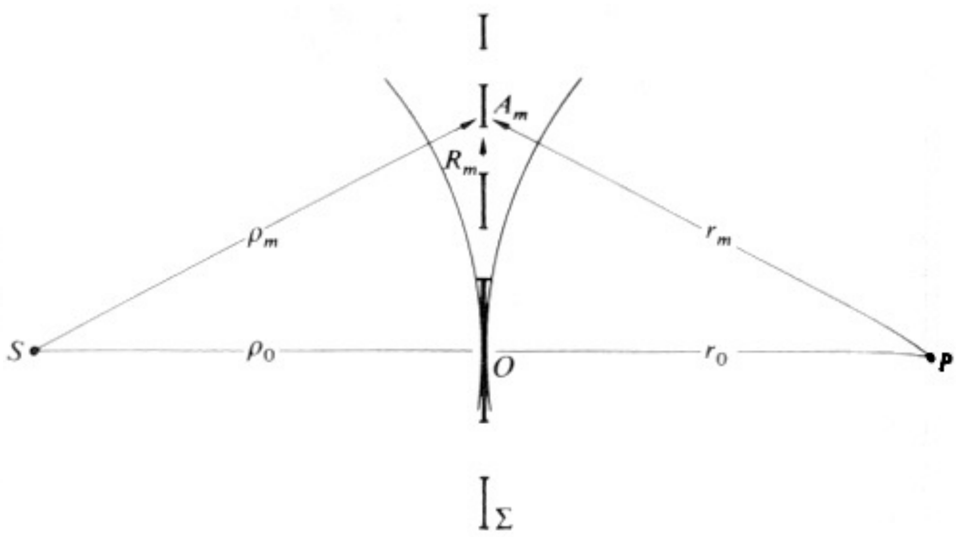


Les zones et la lentille de Fresnel

- Nous pouvons calculer la contribution d'une zone de Fresnel, entre le cercle *m*+1 et le cercle *m*, en utilisant des coordonnées polaires et la définition $R_m^2 = m\lambda f$:
- $U_{m+1}(P) = \frac{2\pi U_0}{i\lambda}\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}\int_{R_m}^{R_{m+1}} e^{ik\frac{R^2}{2f}} RdR = \frac{2\pi U_0}{i\lambda}\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}\frac{f}{ik}\left[e^{ik\frac{R^2}{2f}}\right]_{R_m}^{R_{m+1}} = -U_0 f\,\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}\left[e^{i(m+1)\pi} - e^{im\pi}\right] =$ $2U_0 f\,\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}(-1)^m = C\cdot(-1)^m$, avec: $\mathrm{C} \equiv 2U_0 f\,\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}$
- Chaque zone donne la même contribution au point *P*, mais le signe s'inversé entre zones voisines.
- L'intensité totale set donc: $U(P) = \sum_{m=1}^{N} U_m = C - C + C - C + \cdots = \frac{C}{2} + \left(\frac{C}{2} - C + \frac{C}{2}\right) + \cdots = \frac{C}{2}$. C'est très peu!
- Si on élimine chaque zone paire (ou chaque zone impaire), on trouve: $U(P) = \sum_{m=1,3,\ldots}^{N} U_m = \frac{N}{2}C$ (N>>1).
- C'est la **lentille de Fresnel**: la moitié de l'intensité (ce qui correspond à la moitié transparente de la surface) est concentré au point *P*, qui remplit la condition de focalisation par une lentille: $\frac{1}{f} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\rho_0}$ $(f = R_m^2/m\lambda)$.

Une lentille de Fresnel utilisant les zones paires (à D.) ou impaires (à G.):



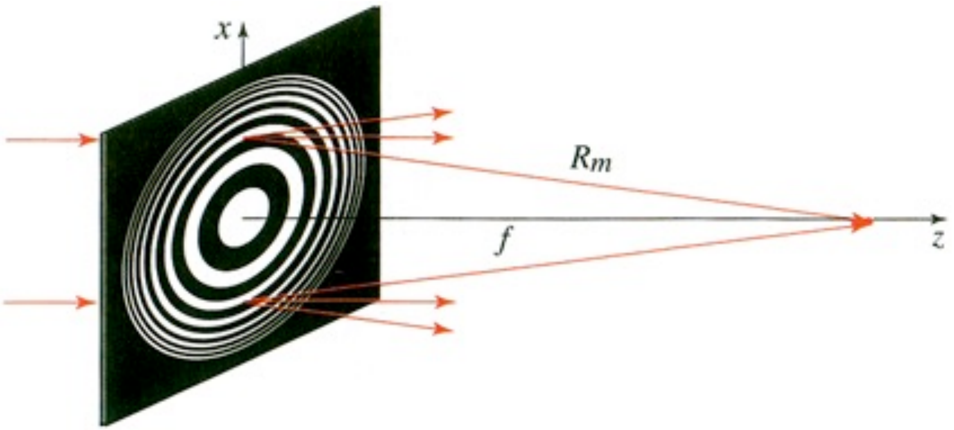


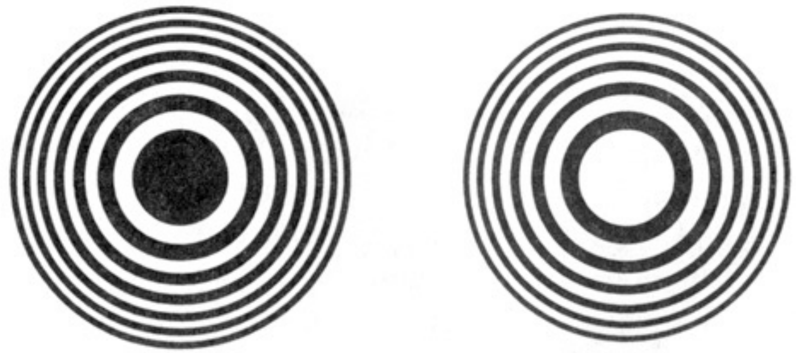
La lentille de Fresnel

- Nous avons vu que si nous construisons une plaque avec obturation d'une zone de Fresnel sur deux, nous focalisons la moitié de la lumière venant d'un point *S* vers un point *P*, qui se trouve à une distance r_0 donnée par:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\rho_0}\ ,\ f = R_m^2/m\lambda\ .$$

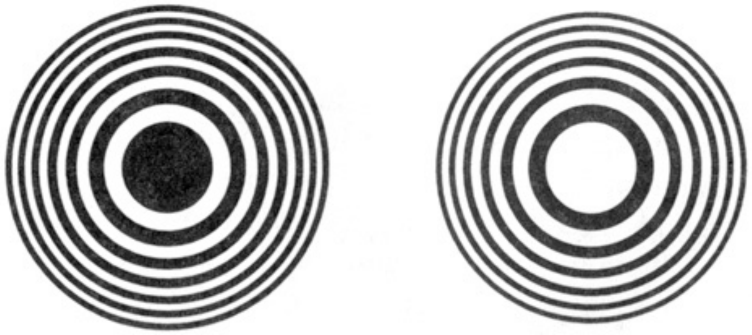
- De la même manière, une onde plane qui arrive à cette plaque est focalisée en un point *P* à la distance *f*.
- Pour l'onde plane, la formule de Sommerfeld-Kirchhoff est: $U(P) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ikr}}{r} ds \approx \frac{U_0}{i\lambda}\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\int_\Sigma e^{ik\frac{R^2}{2r_0}} ds$.
- Nous définissons: $f = r_0$, puis divisons de nouveau le plan *x′,y′* en zones de Fresnel ($R_m = m\lambda f$), en éliminant chaque 2ème zone, pour retrouver: $U(P_0) = \sum_{m=1,3,\ldots}^{N} U_m = \frac{N}{2}C$ (*N*>>1), avec: $C \equiv U_0 f\,\frac{e^{ikf}}{f}$.
- Conclusion: La lentille de Fresnel fonctionne comme une lentille en verre, mais avec les avantages d'être plate.
- Les désavantages: on perd la moitié de l'intensité, et il y a une dépendance à la longueur d'onde ($R_m^2 = m\lambda f$).

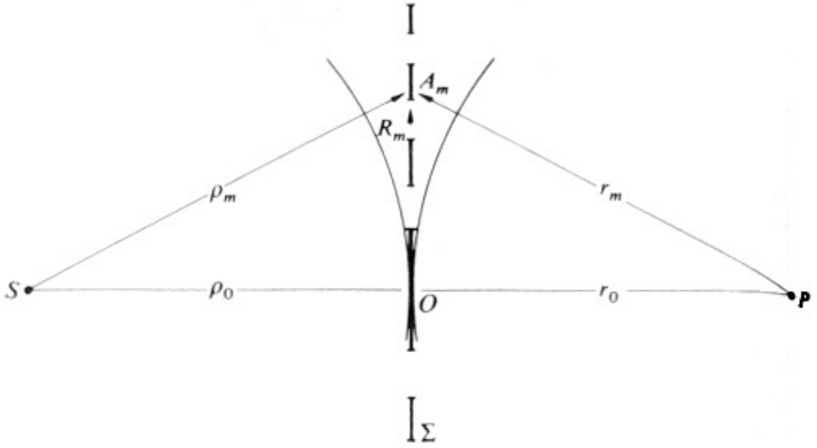




Les limites de la lentille de Fresnel

- Nous avons trouvé le champ total: $U(P) = \frac{2\pi U_0}{i\lambda}\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}\int_{R_1}^{R_2} e^{ik\frac{R^2}{2f}} R dR = \sum_{m=1,3,\ldots}^{N} U_m = \frac{N}{2}C$, avec: $\mathrm{C} \equiv 2U_0 f\,\frac{e^{ik(r_0+\rho_0)}}{r_0\rho_0}$. Mais, si le rayon de la lentille va vers l'infini, l'intégrale va aussi à l'infini → Somme infinie???
- En effet, notre calcul dans le cadre de l'approximation paraxiale, suppose que l'intensité est constante: $\mathrm{I} \propto 1/r_0^2\rho_0^2$. Le champ réel diminue avec la distance *R* du centre, car il dépend du pré-facteur $\mathrm{I} \propto 1/r^2\rho^2$.
- Nous pouvons calculer la distance *R* pour laquelle l'intensité diminue de moitié, c.à.d. $1/r^2\rho^2 = 1/2r_0^2\rho_0^2$. Les distances exactes sont: $r^2 = r_0^2 + R^2$ et $\rho^2 = \rho_0^2 + R^2$, cela donne: $2r_0^2\rho_0^2 = r^2\rho^2 = (r_0^2 + R^2)(\rho_0^2 + R^2)$. C'est une équation quadratique en R^2, sa solution est: $R^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\rho_0^4 + r_0^4 + 6r_0^2\rho_0^2} - \rho_0^2 - r_0^2\right)$.
- Pour le cas simple $r_0 = \rho_0$, nous avons une solution simple: $R^2 = r_0^2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.
- Avec la relation: $R_m^2 = m\lambda f$, cela donne la valeur: $\mathrm{N}_{1/2} = \frac{r_0^2(\sqrt{2}-1)}{\lambda f}$. C'est une indication pour la valeur maximale N qu'il faut garder dans la somme, où l'intensité est déjà la moitié de celle du centre.
- Pour une valeur typique: $r_0 \approx 10\ cm, \lambda \approx 500\ nm$, $\mathrm{N}_{1/2} \approx 10^5$.

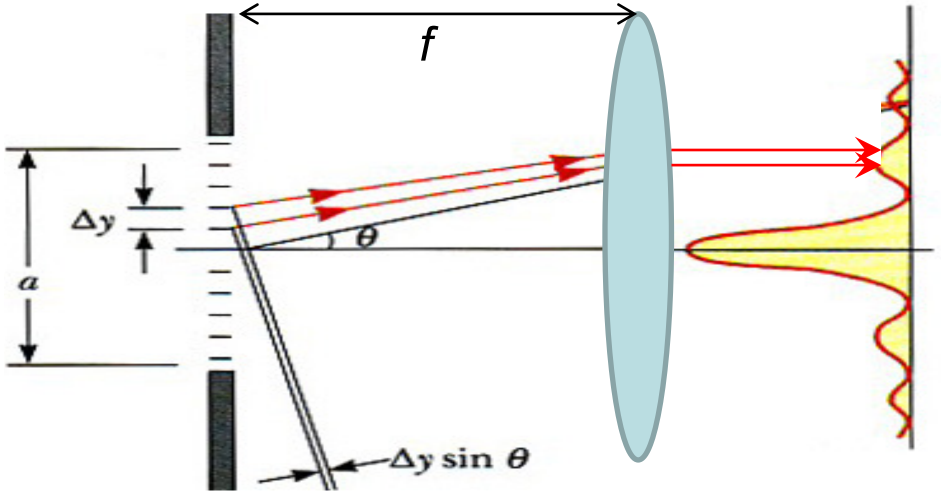


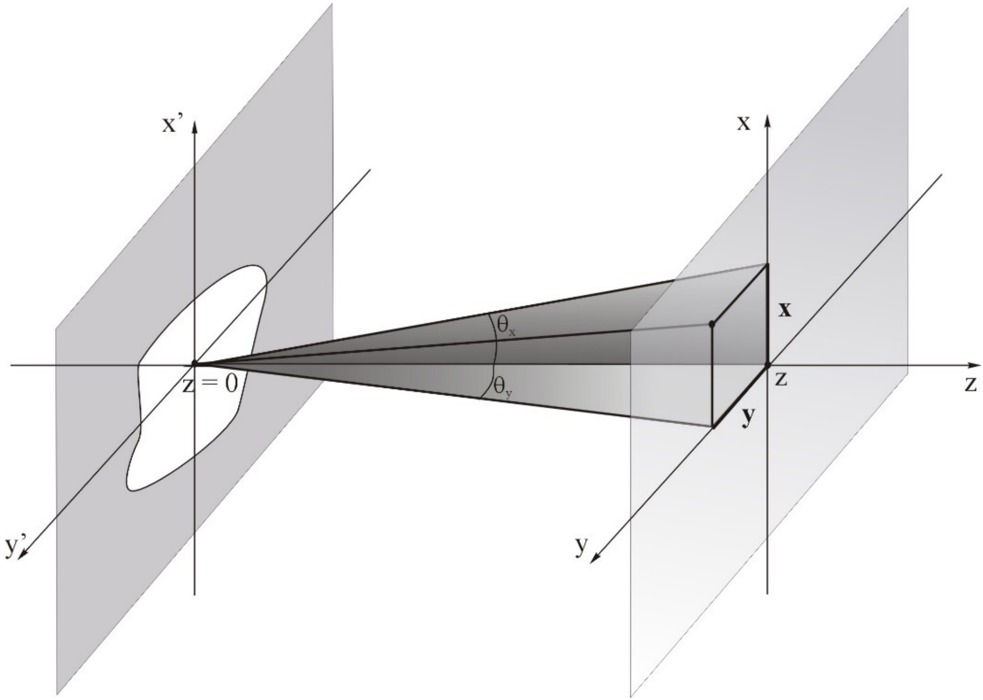


La diffraction de Fraunhofer

- Dans le cas de la diffraction de Fraunhofer, ou champ lointain ($N_F \equiv \frac{R_0^2}{\lambda z} < 1$), on peut négliger la partie $\frac{x'^2+y'^2}{2z}$ dans le calcul de la phase, donc il nous reste: $r \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z}$.
- L'intégrale de diffraction est donc: $U(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \int_\Sigma U(r') e^{-ik\frac{xx'+yy'}{z}} dx'dy'$.
- L'approximation paraxiale nous permet de définir: $\frac{kx}{z} \approx k \sin\theta_x \equiv k_x$, $\frac{ky}{z} \approx k \sin\theta_y \equiv k_y$.

  L'intégrale devient: $U(k_x, k_y) = U(\theta_x, \theta_y) = U(x, y) \approx \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \int_\Sigma U(x', y') e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx'dy'$.
- C'est exactement la transformée de Fourier de $U(x',y')$!
- Conclusion: La **diffraction de Fraunhofer** donne une distribution $U(k_x, k_y) = U(\theta_x, \theta_y)$ qui est la **transformée de Fourier** du champ à l'ouverture $U(x', y')$.
- Avec une lentille, on peut transformer les angles θ_x, θ_y en une position *x,y* sur un écran, pour visualiser la diffraction.





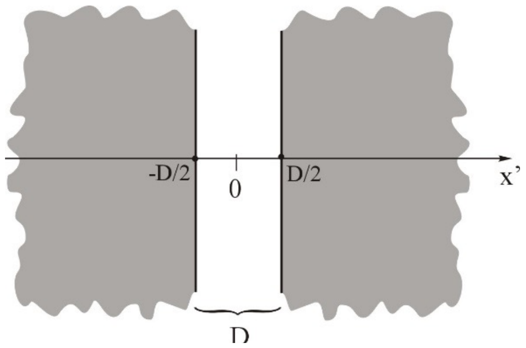
La diffraction de Fraunhofer d'une fente

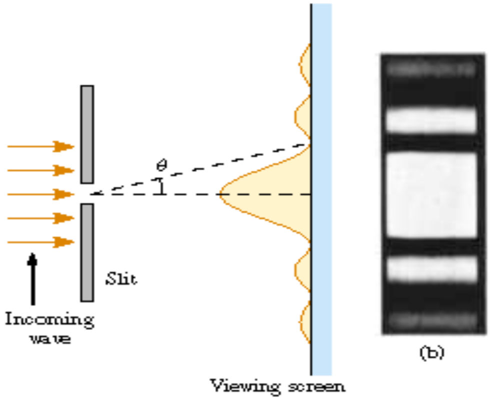
- La diffraction de Fraunhofer d'une fente de largeur *D* en *x* (et infinie en *y*), illuminée par une onde plane, est:

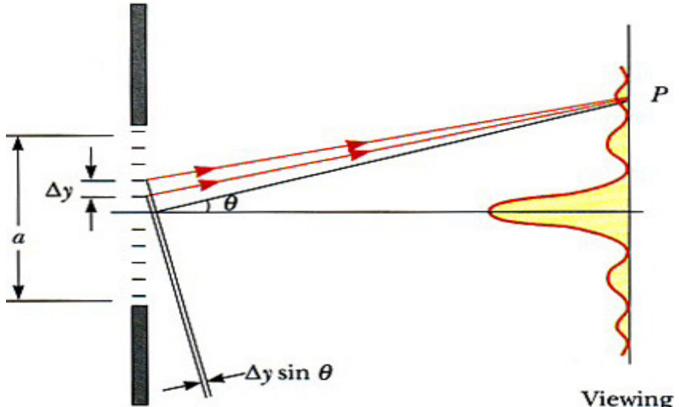
$$U(k_x) = U(\theta_x) = U_0 \int_{-D/2}^{D/2} e^{ik_x x'} dx' = \frac{2U_0}{k_x} \sin\frac{k_x D}{2} = U_0 D \,\mathrm{sinc}\,\beta \text{ , avec: } \beta \equiv \frac{k_x D}{2} = \frac{kD \sin\theta_x}{2} .$$

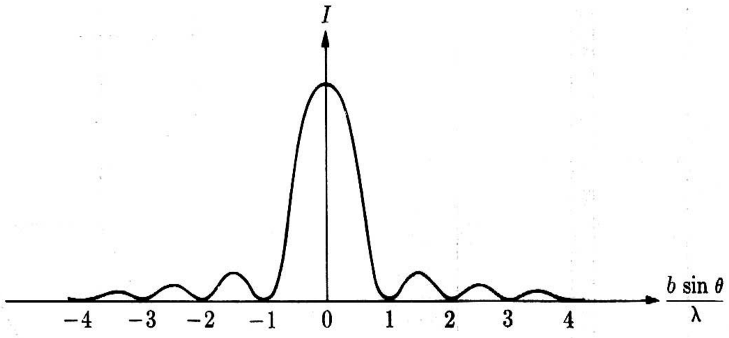
- L'intensité est donné par: $I(\theta_x) = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\,\beta$. Le premier zéro se trouve à: β=π, ou: $\sin\theta_x = \frac{2\pi}{kD} = \frac{\lambda}{D}$.
- La largeur du pic est donc 2λ/*D*, inversement proportionnel à celle de la fente (transformée de Fourier!)
- Une autre manière de calculer: traiter la fente comme un réseau de diffraction, composé de *N* éléments, chacun de taille *d*=*D*/*N*. L'intensité par élément est: I_0/N^2. L'intensité diffractée est: $I(\theta_x) = \frac{I_0}{N^2}\left(\frac{\sin(Nkd/2 \cdot \sin\theta_x)}{\sin(kd/2 \cdot \sin\theta_x)}\right)^2 = \frac{I_0}{N^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{Dk\sin\theta_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{Dk\sin\theta_x}{2N}\right)}\right)^2$, et dans la limite $N \to \infty$, on obtient:

$$I(\theta_x) \approx \frac{I_0}{N^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{Dk\sin\theta_x}{2}\right)}{\frac{kD\sin\theta_x}{2N}}\right)^2 = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\,\beta .$$









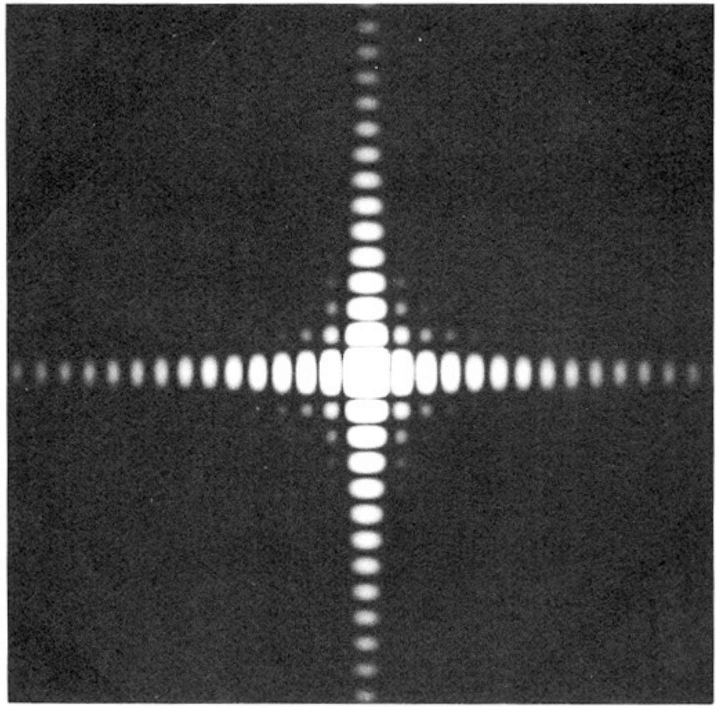
Diffraction de Fraunhofer par un trou rectangulaire

- La diffraction de Fraunhofer d'un trou rectangulaire de taille *a*x*b* le long des axes *x*-*y* respectivement, illuminée par une onde plane, est séparable en deux intégrales:

$$U\left(k_x, k_y\right) = U(\theta_x, \theta_x) = U_0 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\left(k_x x' + k_y y'\right)} dx' dy' = \frac{2U_0}{k_x k_y} \sin\frac{k_x a}{2} \sin\frac{k_y b}{2} = U_0 ab \operatorname{sinc}\alpha \operatorname{sinc}\beta \ ,$$

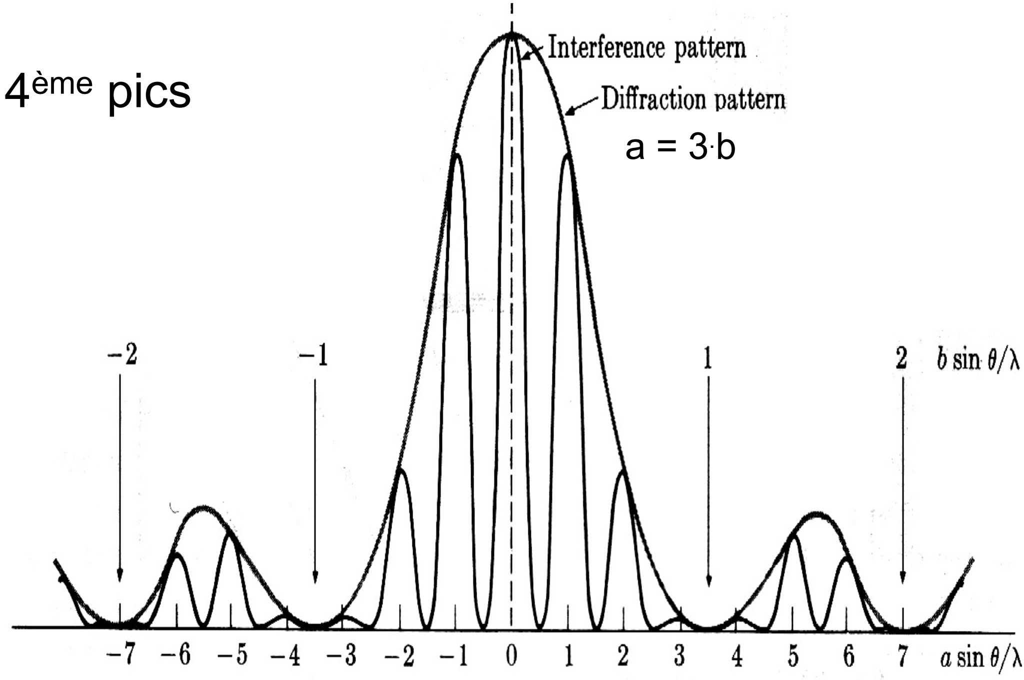
avec: $\alpha \equiv \frac{k_x a}{2} = \frac{ka \sin\theta_x}{2}$ et $\beta \equiv \frac{k_y b}{2} = \frac{kb \sin\theta_y}{2}$.

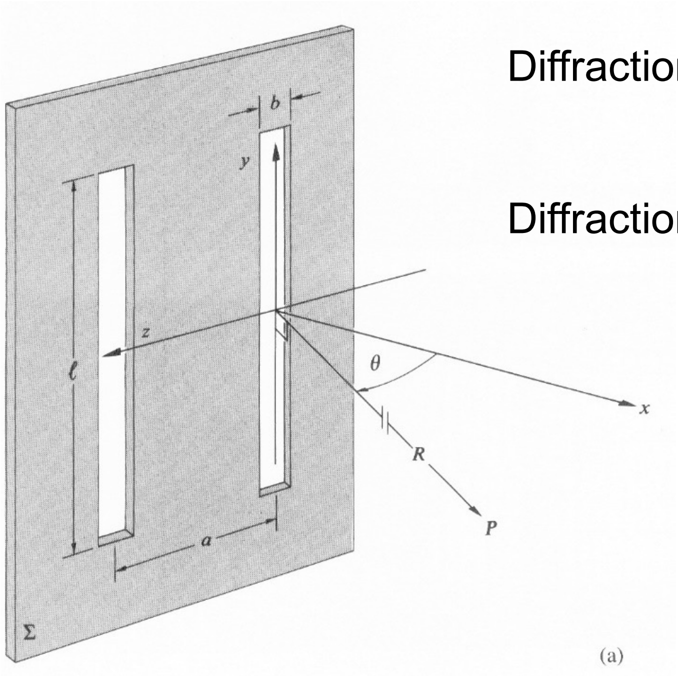
- L'intensité est: $I(\theta_x) = I_0 \operatorname{sinc}^2\alpha \operatorname{sinc}^2\beta$.
- La largeur du pic central est donc (2λ/*a*) *x* (2λ/*b*) .
- Si $b \rightarrow \infty$, il n'y a plus de diffraction le long de l'axe *y* (on revient à l'optique géométrique), et nous revenons à la diffraction d'une fente en *x*.



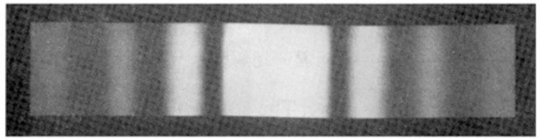
Interférence + diffraction par deux fentes

- L'expérience de Young (interférence entre deux fentes) doit être corrigée par l'effet de la diffraction. Si les fentes ont une largeur *b* et leur distance est *a* (*a*>*b*), le champ sur l'écran est la somme des deux champs, avec leur déphasage $\Delta\varphi = k_x a$. Cela donne un facteur $\cos(k_x a/2)$; le champ total est: $U(\theta_x) = U_0 b \,\mathrm{sinc}\,\frac{kb\sin\theta_x}{2}\cos\frac{ka\sin\theta_x}{2}$.
- L'intensité est: $I(\theta_x) = I_0\,\mathrm{sinc}^2\beta\cos^2\alpha \quad (\beta \equiv \frac{kb\sin\theta_x}{2}$, $\alpha \equiv \frac{ka\sin\theta_x}{2}$).
- Souvent, *a*>>*b*; le pic de diffraction est donc beaucoup plus large que les pics d'interférence: il forme une enveloppe sur les franges d'interférence.
- Dans le cas spécial *a*=3*b*, le 1er zéro de diffraction annule les 3ème + 4ème pics d'interférence, le 2ème pic annule le 7ème, etc. .

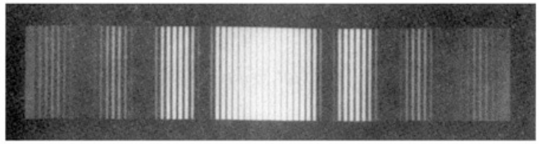


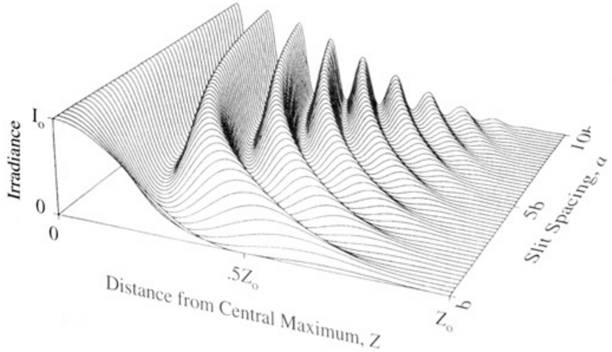


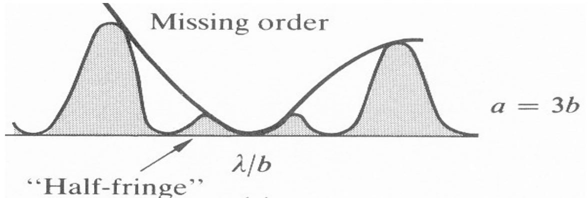
Diffraction d'une fente:



Diffraction de 2 fentes:



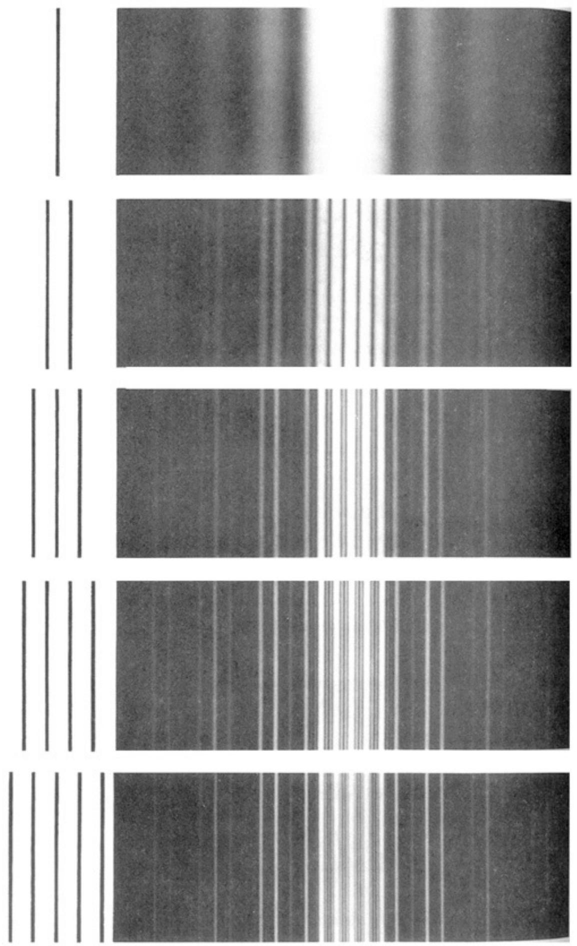


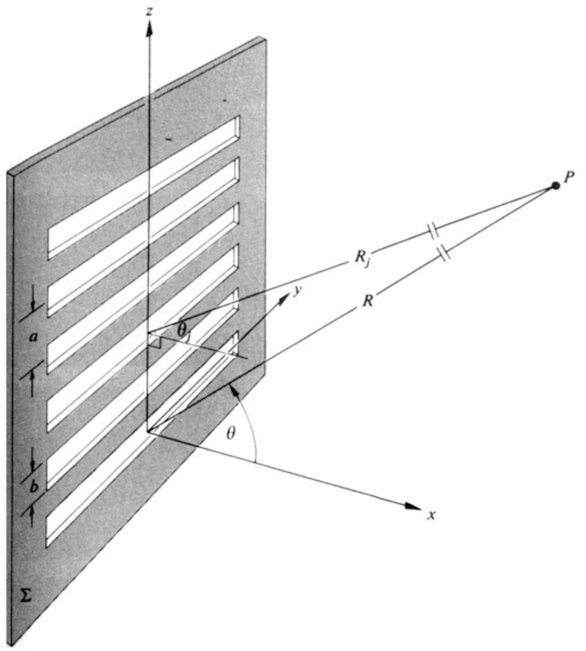


Interférence + diffraction par un réseau de fentes

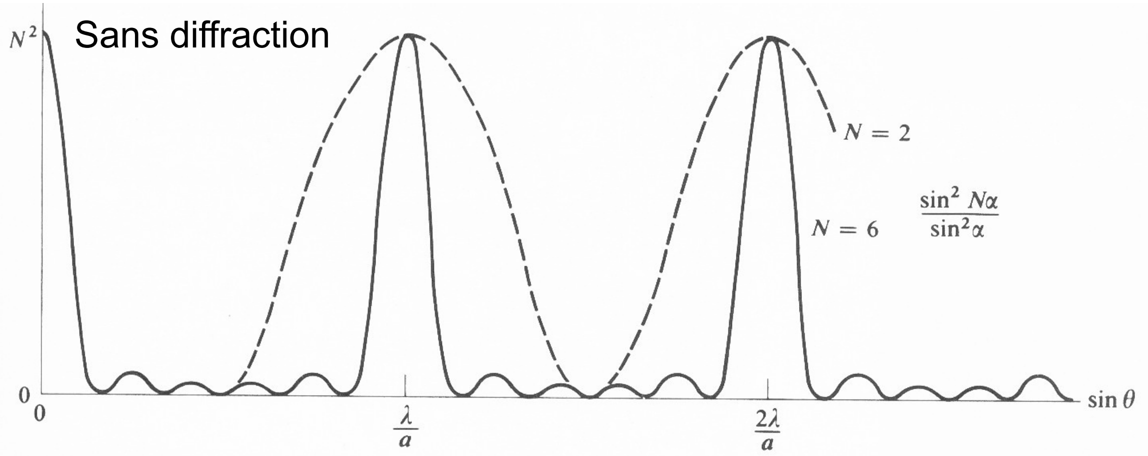
- Dans un réseau de diffraction, on a un grand nombre N de fentes, qui génèrent une figure d'interférence. Elle doit être multiplié par l'effet de la diffraction, ce qui donne: $I(\theta_x) = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\,\beta \cdot \frac{\sin^2 N\alpha}{\sin^2 \alpha}$ ($\beta \equiv \frac{kb \sin\theta_x}{2}$, $\alpha \equiv \frac{ka \sin\theta_x}{2}$).
- De nouveau, *Na>>b*, donc l'enveloppe de la diffraction est beaucoup plus large que les pics de l'interférence.

Fentes Bandes d'interférence

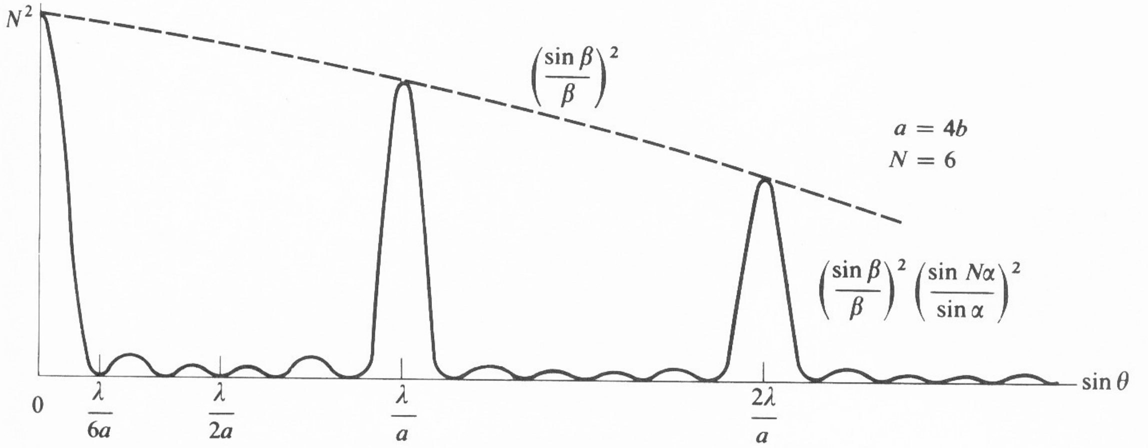




Sans diffraction

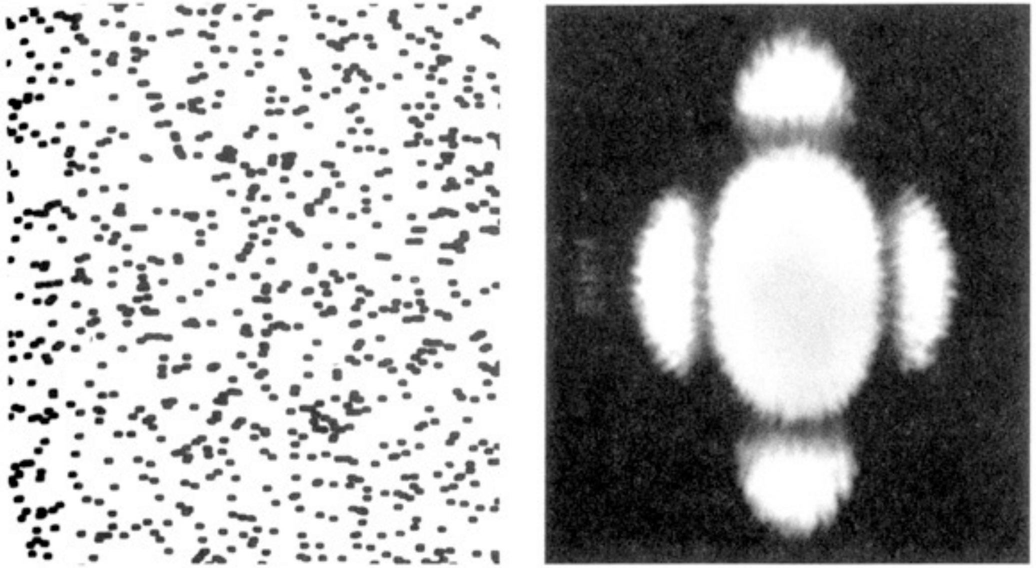


Avec diffraction

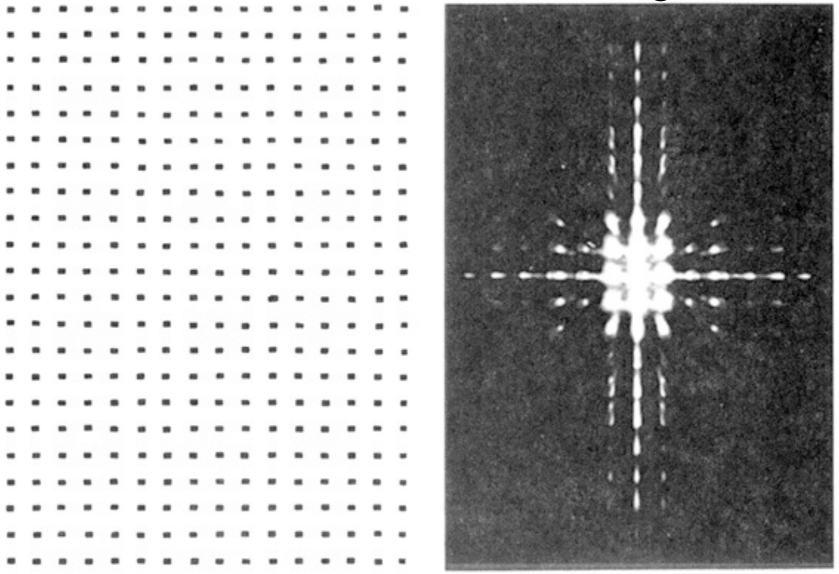


Diffraction de Fraunhofer: Effets de la forme des trous

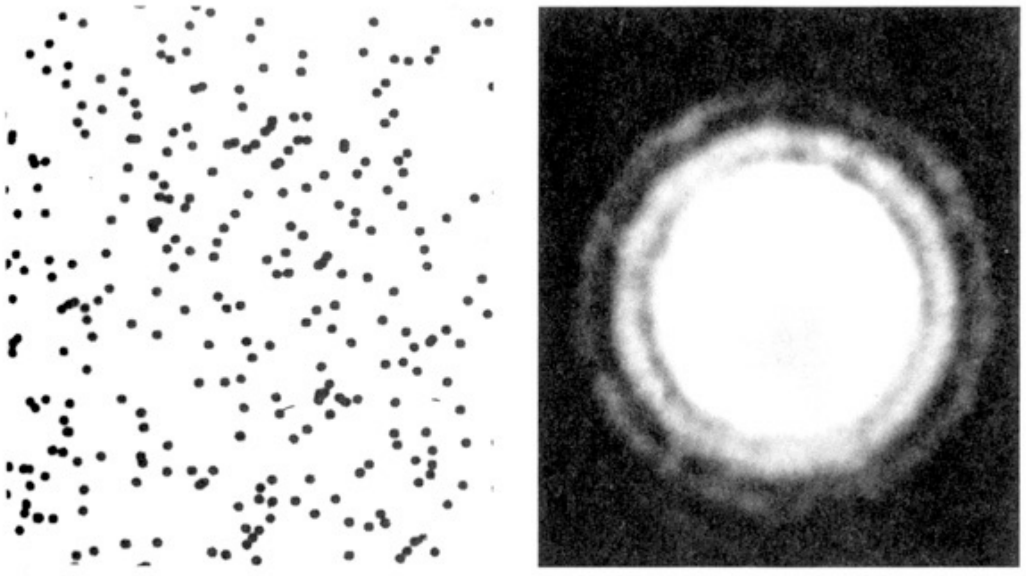
Ensemble aléatoire de trous rectangulaires:



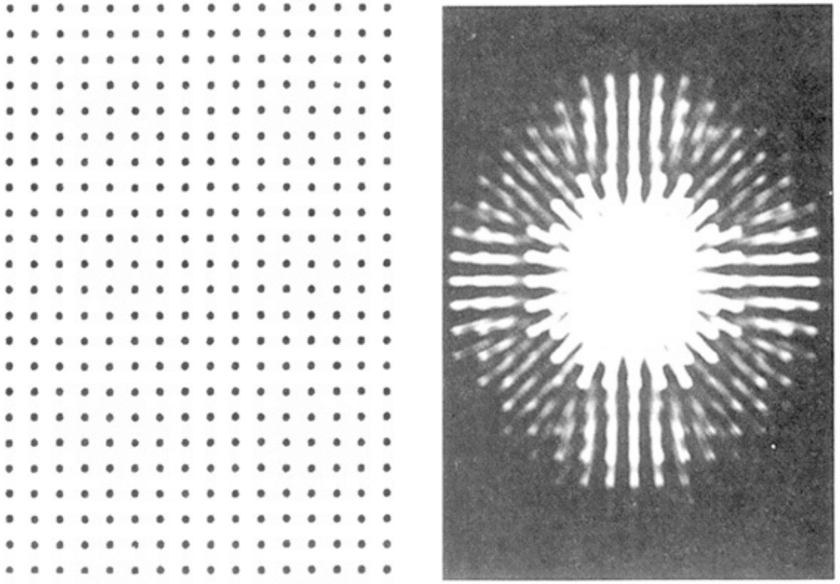
Réseau carré des trous rectangulaires:



Ensemble aléatoire de trous circulaires:

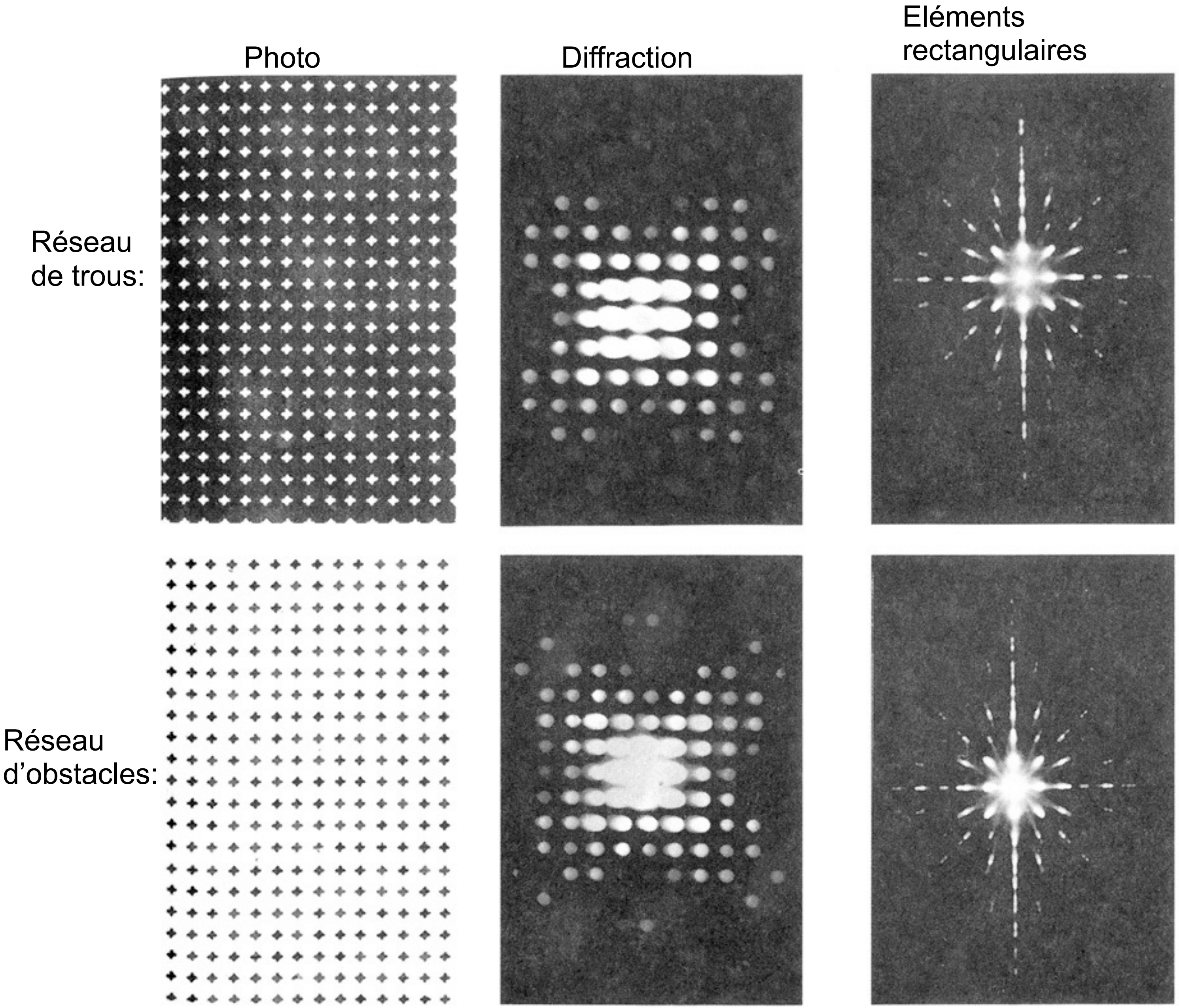


Réseau carré des trous circulaires:



Le principe de Babinet

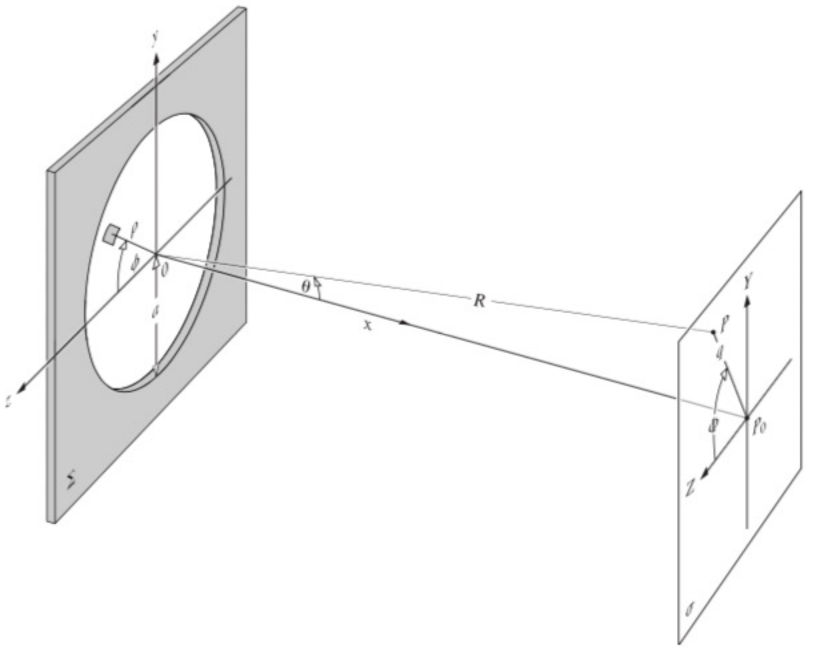
- Prenons la formule de Sommerfeld-Kirchhoff: $U_\Sigma(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} K(\theta) ds$, dans le cas d'une ouverture Σ et de son complémentaire (une obstruction) Σ'.
- La somme des deux structures donne une parois entière, qui ne laisse rien passer, donc: $U_\Sigma(P_0) + U_{\Sigma'}(P_0) = 0$, ou: $U_\Sigma(P_0) = -U_{\Sigma'}(P_0)$.
- L'intensité est donc: $I_\Sigma(P_0) = U_\Sigma^2(P_0) = I_{\Sigma'}$.
- C'est le **principe de Babinet**: la diffraction d'une forme Σ est égale à celle de son complément Σ'.

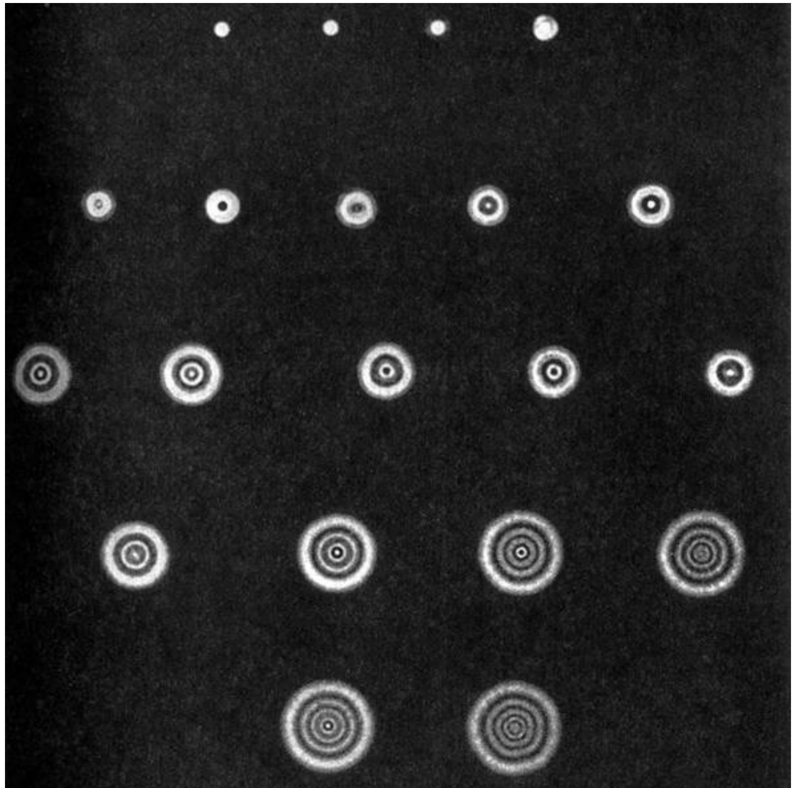


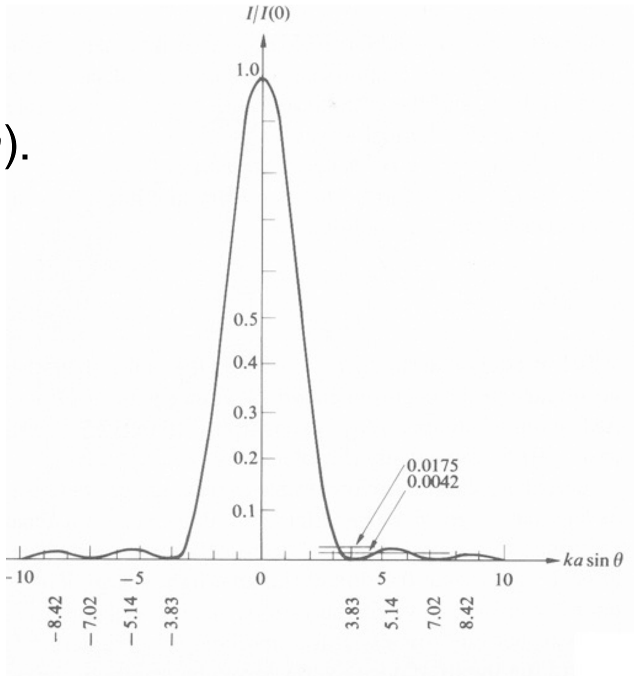
Diffraction de Fraunhofer d’un trou circulaire

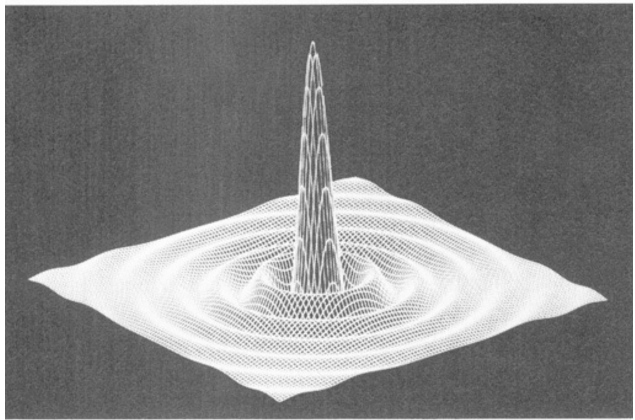
- Dans le cas d'un trou circulaire, la diffraction de Fresnel est donnée par: $U_\Sigma(P_0) = \frac{2\pi U_0}{i\lambda z}\int_0^a J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) e^{ikr^2/2z} r dr$
- La diffraction de Fraunhofer est la transformée de Fourier de l'ouverture circulaire, qui est la fonction de Bessel.
- L'intensité de la diffraction d'un trou de rayon *a* est donc: $I(\theta) = 4I_0\left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2$.
- Le premier zéro de cette fonction est à: $ka\sin\theta = 3.83$, ou: $\sin\theta \approx \theta = 1.22\lambda/D$ (*D*=2*a*).

Une série de trous de taille croissante:
Passage de la diffraction de Fraunhofer
(haut Gauche) à Fresnel (bas)



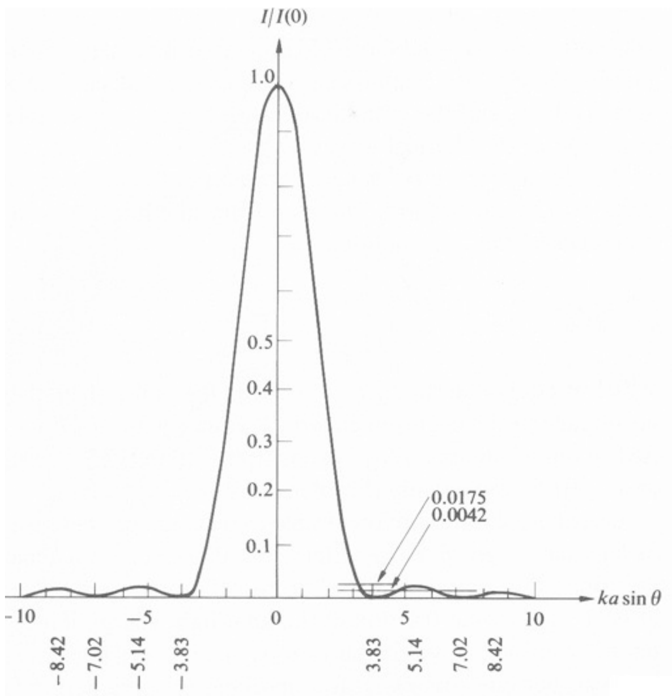




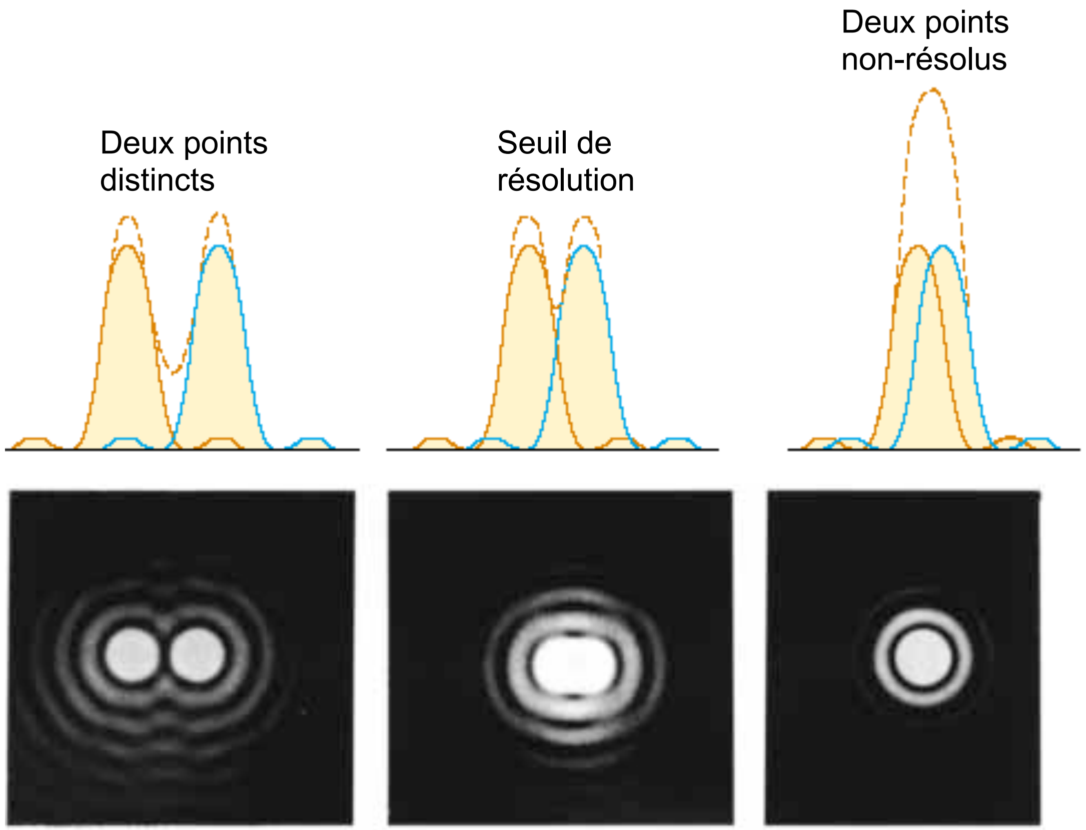


La résolution d’un microscope optique

- Prenons un objectif de microscope, sans aberrations, avec un diamètre *D* et de longueur focale *f* . L'image d'un point forme un cercle de diffraction, de rayon: $R \approx f\theta = \frac{1.22\lambda f}{D} = \frac{1.22\lambda}{\#/F} \approx \frac{0.61\lambda}{NA}$ (*NA* ≡ sin(α) , #/*F* ≡*D*/*f*=2tg(α)).
- Pour distinguer dans l'image entre deux points de l'objet, on utilise le critère de Rayleigh: Le maximum de l'image d'un point doit coïncider avec le premier zéro du point voisin.
- La résolution du microscope est donc égale au rayon décrit ci-dessous: $R = \frac{1.22\lambda}{\#/F} \approx \frac{0.61\lambda}{NA}$. C'est une limite fondamentale de la résolution d'un microscope, due à la diffraction.



Le critère de Rayleigh:

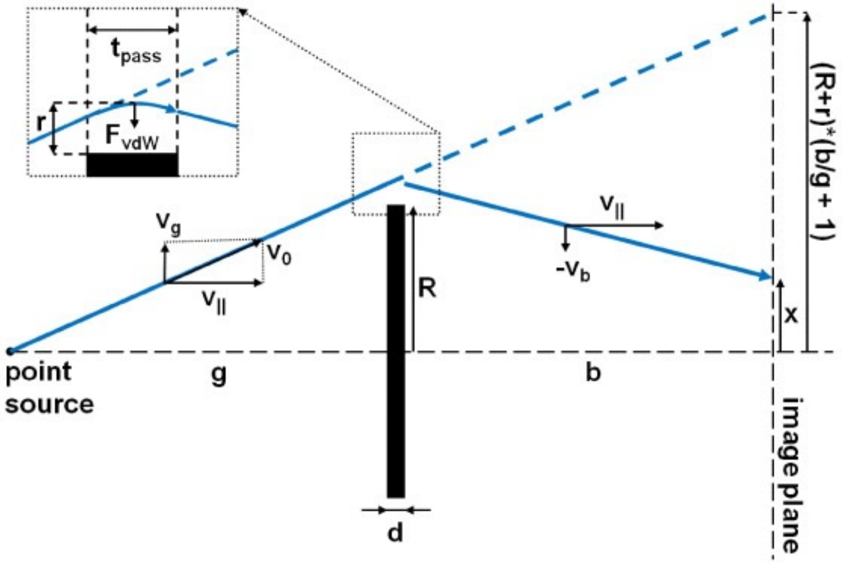


Bonus: Le point d'Arago (de Poisson)

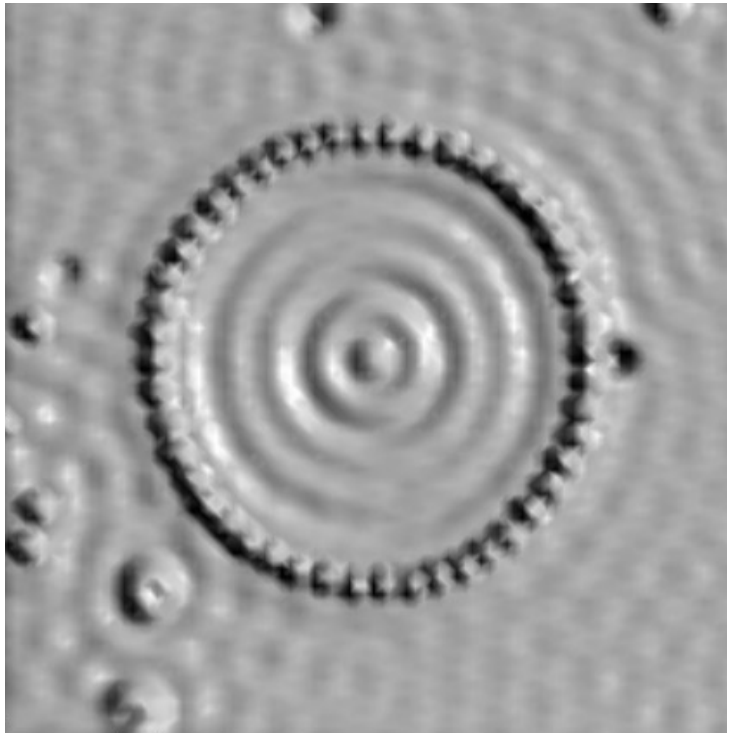
- Selon le principe de Babinet, la diffraction de Fresnel d'un objet circulaire est donnée par:

$$U_\Sigma(P_0) = -\frac{2\pi U_0}{i\lambda z}\int_0^a J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) e^{ikr^2/2z} r dr$$

- Le même principe s'applique à diffraction de Fraunhofer, qui donne: $I(\theta) = 4I_0\left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2$.
- Le résultat est qu'au centre de l'ombre d'un cercle / d'une bille il y a un point lumineux, appelé le point d'Arago (ou de Poisson).
- Cela a été aussi démontré pour des fonctions d'ondes quantiques.

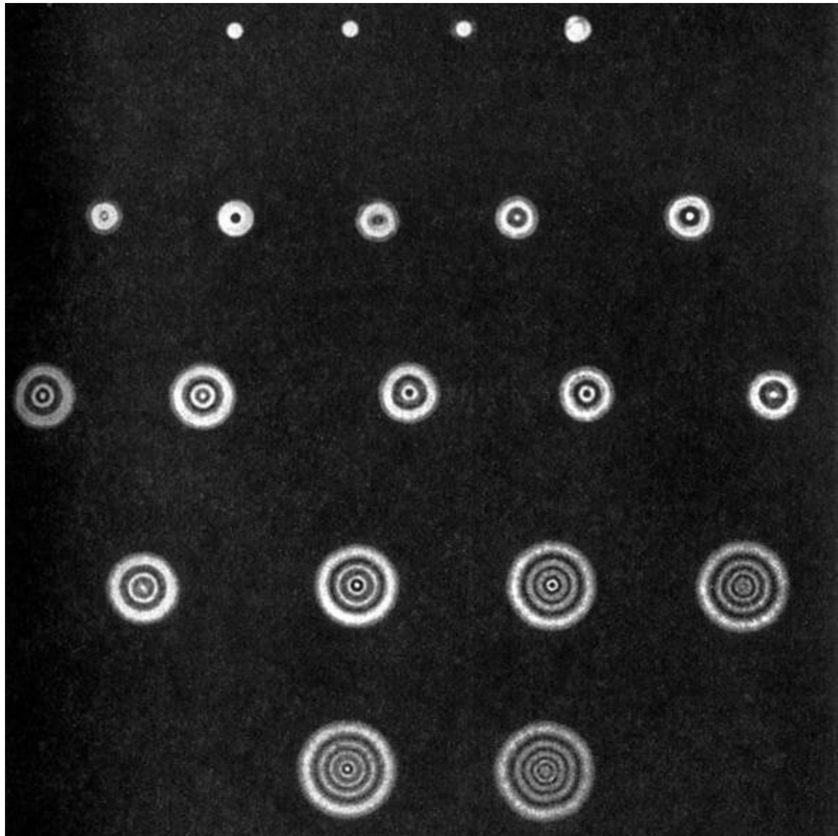


https://vanderbei.princeton.edu/PoissonSpot/PoissonSpot.html



https://www.researchgate.net/figure/Schematic-diagram-of-the-Poisson-spot-experiment-and-notation-for-the-classical_fig7_231153832

Une série de trous de taille croissante:
Passage de la diffraction de Fraunhofer à Fresnel

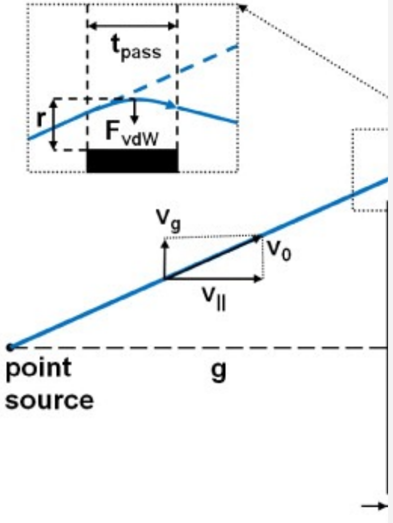


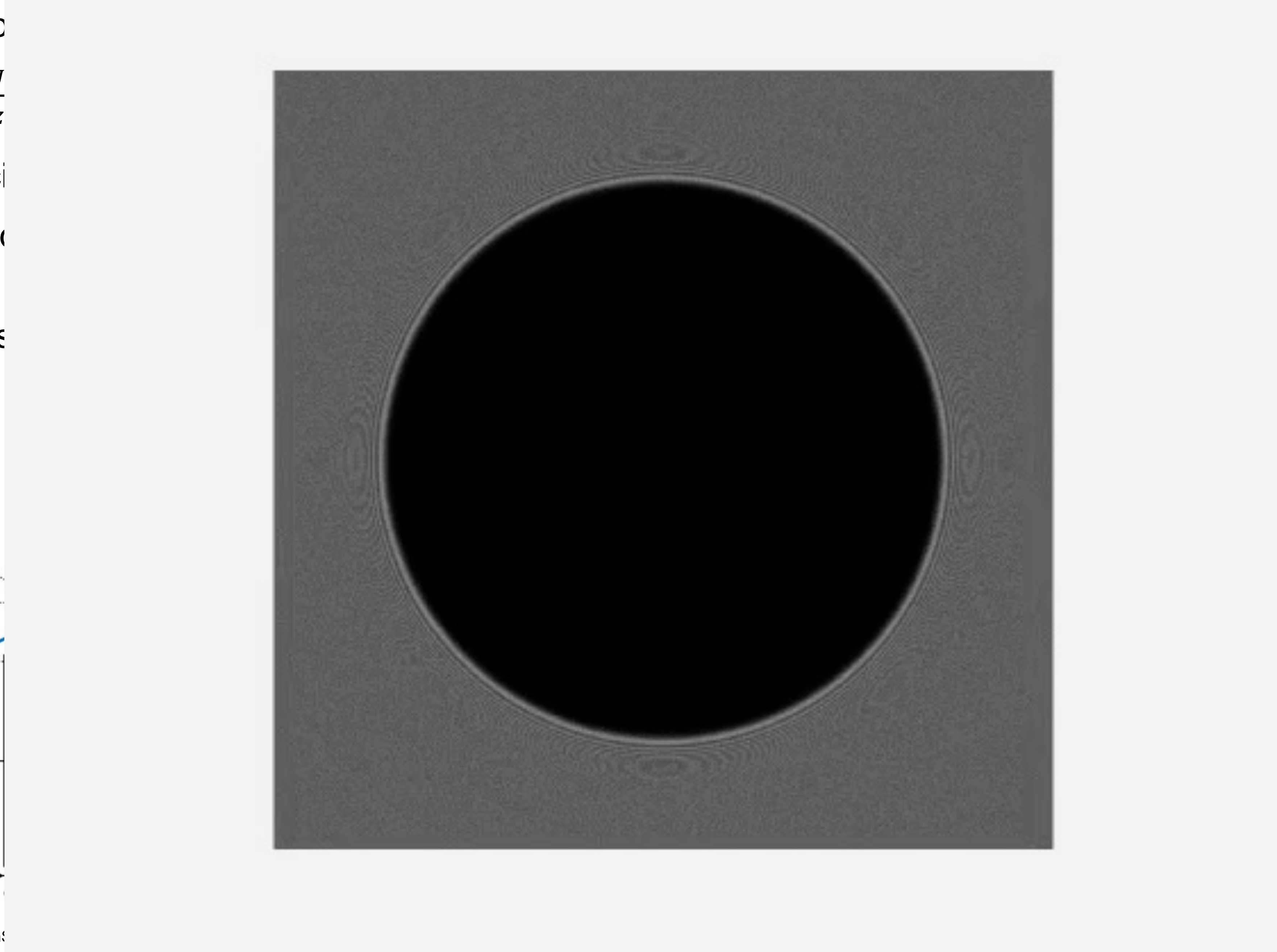
Bonus: Le point d'Arago (de Poisson)

- Selon le princip

$$U_\Sigma(P_0) = -\frac{2\pi U}{i\lambda z}$$

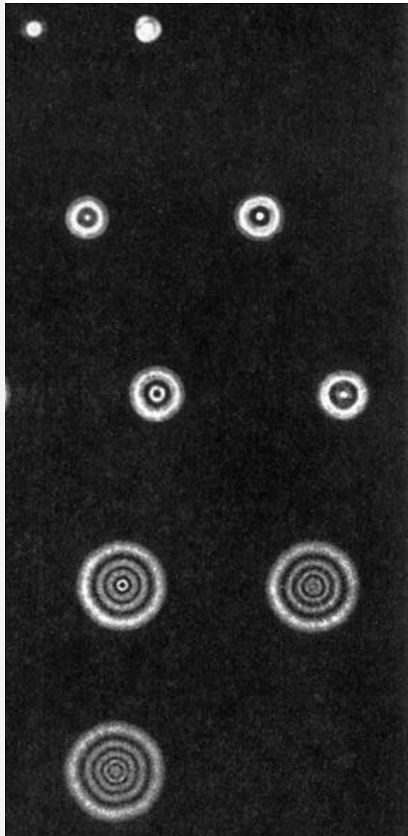
- Le même princi
- Le résultat est
  de Poisson).
- Cela a été auss





oint d'Arago (ou

e croissante:
le Fraunhofer à Fresnel



https://vanderbei.princeton.edu/Poisson

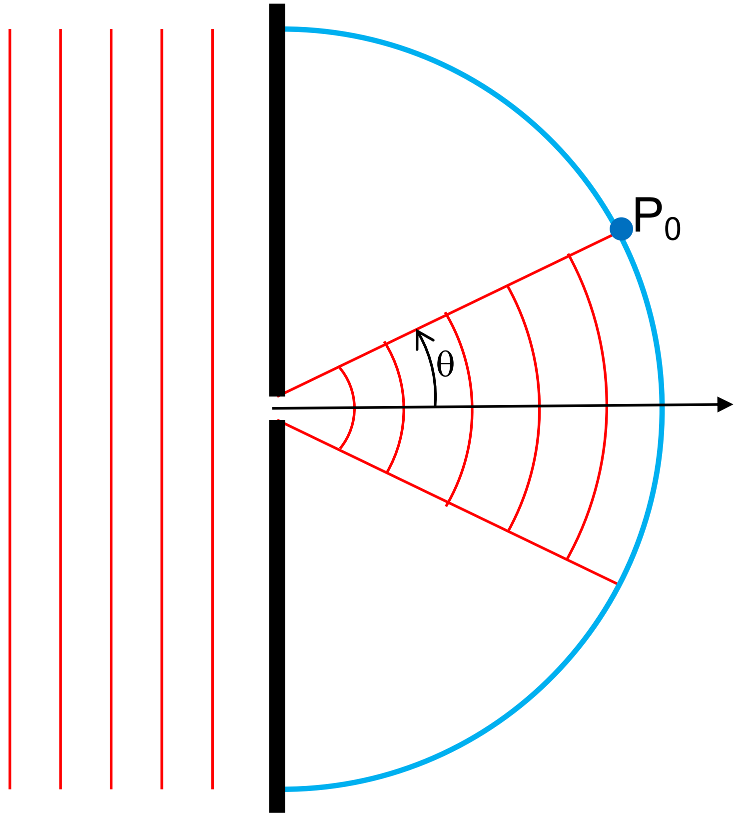
La diffraction d'un petit trou $d<<\lambda$

- Imaginons une ouverture Σ dont le diamètre est $d<<\lambda$, illuminée par une onde plane; $U_0 e^{ikz}$. Le champ qui arrive sur un point P_0 est donné par la formule de Sommerfeld: $U(P_0) = \frac{U_0}{i\lambda}\int_\Sigma \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\cos(\hat{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{r}_{01})\, ds$.
- Puisse que $d<<\lambda<<r_{01}$, r_{01} peut être considéré comme constant sur la surface Σ. L'intégrale est donc triviale, donnant: $U(P_0) = \frac{U_0 e^{ikr_{01}}}{i\lambda r_{01}} S\cos(\hat{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{r}_{01})$ (S=surface de l'ouverture Σ). C'est une source ponctuelle d'une onde sphérique, modulé par l'angle. L'intensité est: $I(P_0) = I_0\left(\frac{S}{\lambda r_{01}}\right)^2 \cos^2(\hat{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{r}_{01})$.
- L'intensité totale (intégrée sur une demi-sphère) est:

$$I_{tot} = I_0\left(\frac{S}{\lambda r_{01}}\right)^2 \iint_0^{\frac{\pi}{2}}\,_0^{2\pi} r_{01}^2 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

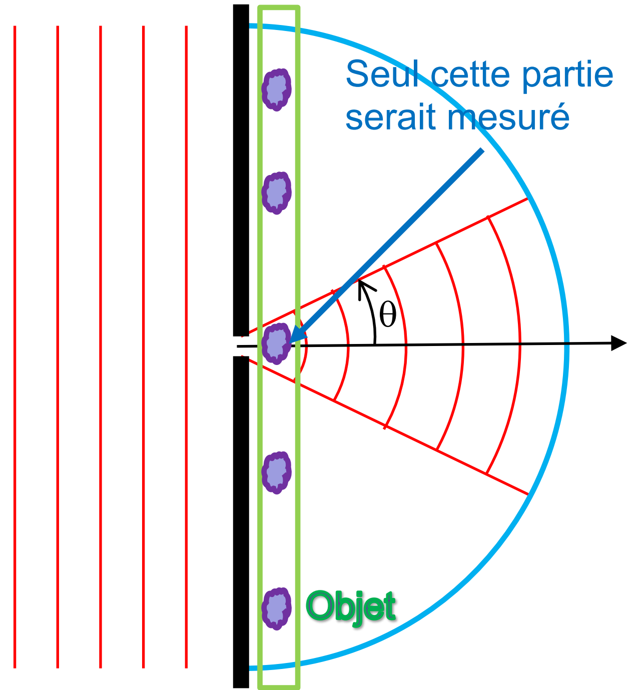
$$= I_0\left(\frac{S}{\lambda r_{01}}\right)^2 2\pi r_{01}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = I_0 \frac{2\pi}{3}\left(\frac{S}{\lambda}\right)^2.$$

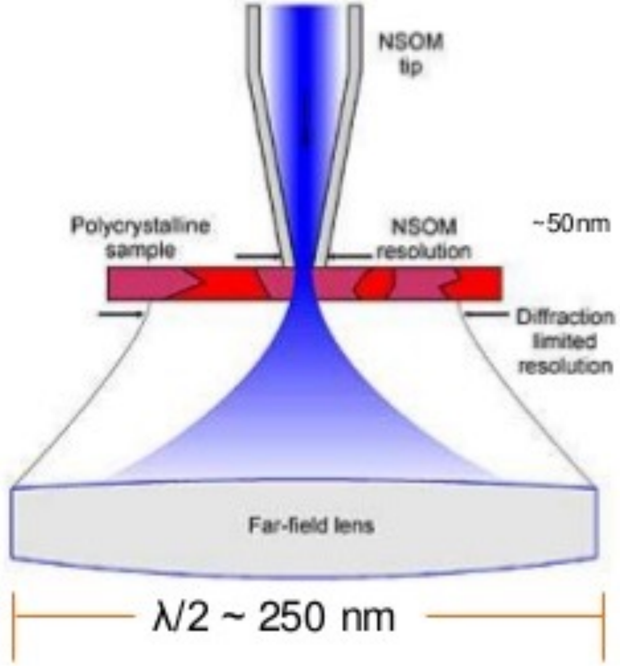
- En effet, notre petit trou mesure un échantillon de l'onde plane, donc l'intensité mesuré est proportionnelle à la surface du trou.

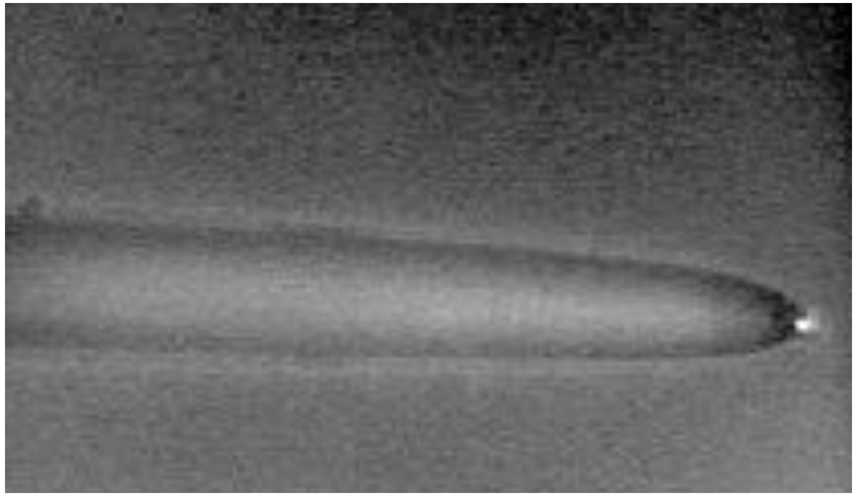


Bonus: Imagerie en champ proche: le SNOM/NSOM

- Si nous mettons un échantillon partiellement transparent à proximité immédiate d'un petit trou ($d \ll \lambda$), l'intensité qui passe est multipliée par la transmission de la (petite) partie de l'échantillon qui se trouve derrière le trou.
- Nous mesurons l'intensité totale qui passe, qui représente la transmission de l'échantillon sur une échelle de la taille du trou, qui est $\ll \lambda$. On n'est plus limité par la diffraction! Mais, c'est une mesure d'un seul point de l'échantillon…
- On dit que la mesure est faite **en champ proche**.
- Pour obtenir une image complète, il faut balayer la position de l'objet semi-transparent (en *x*-*y*) par rapport au système optique (trou, lentille de focalisation, détecteur…), tout en restant à proximité de l'ouverture.
- C'est le principe du microscope à champ proche, le SNOM/NSOM.
- Souvent, on remplace la paroi opaque par une fibre optique couverte de métal, avec un trou au bout.



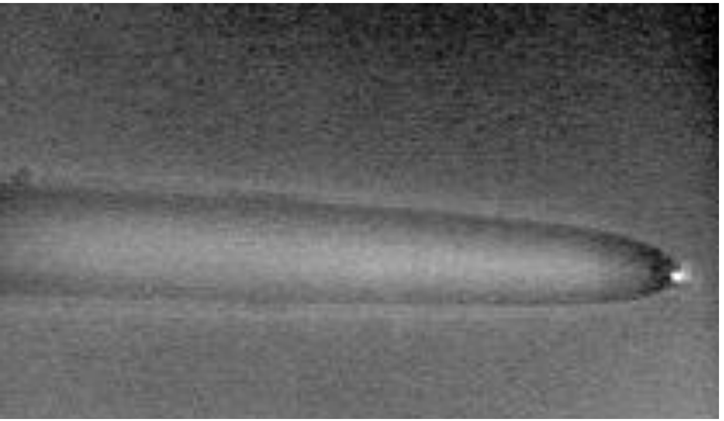


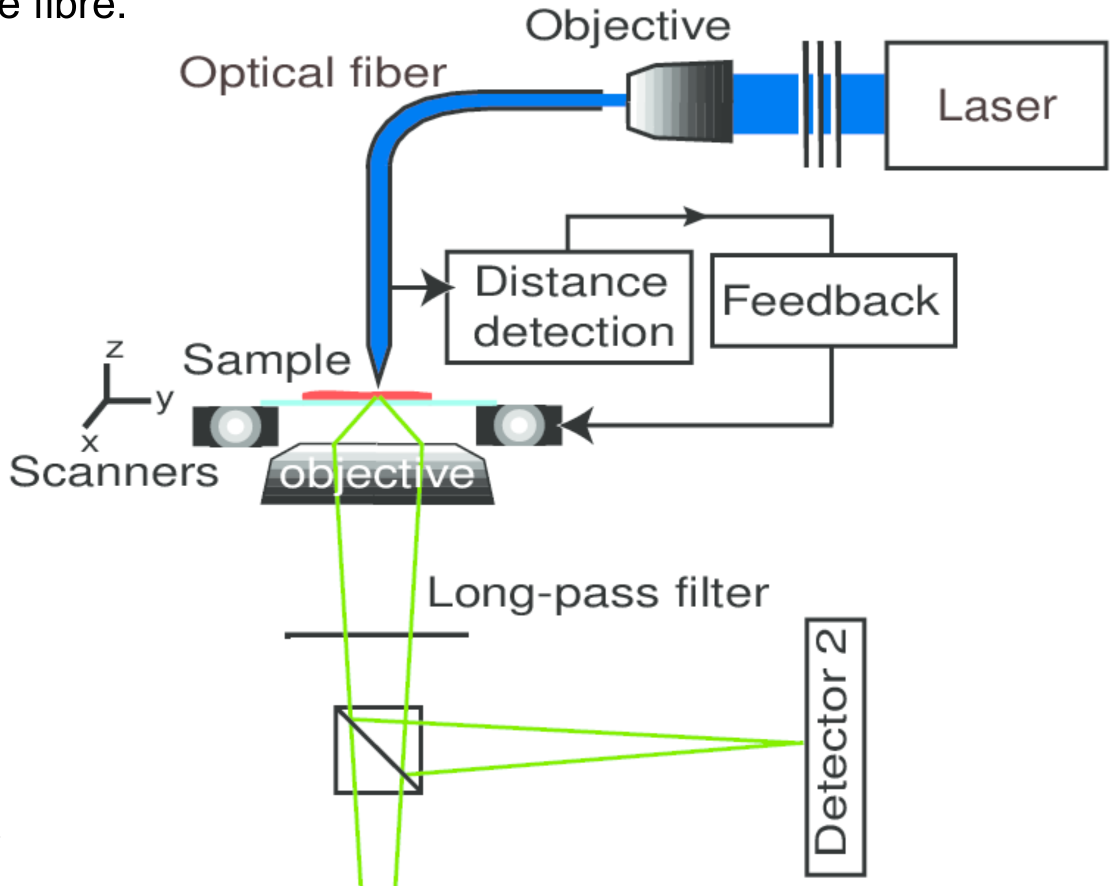


https://www.slideshare.net/Dhanyarajesh2/near-field-scanning-optical-microscopy

Bonus: Imagerie en champ proche: structure du SNOM/NSOM

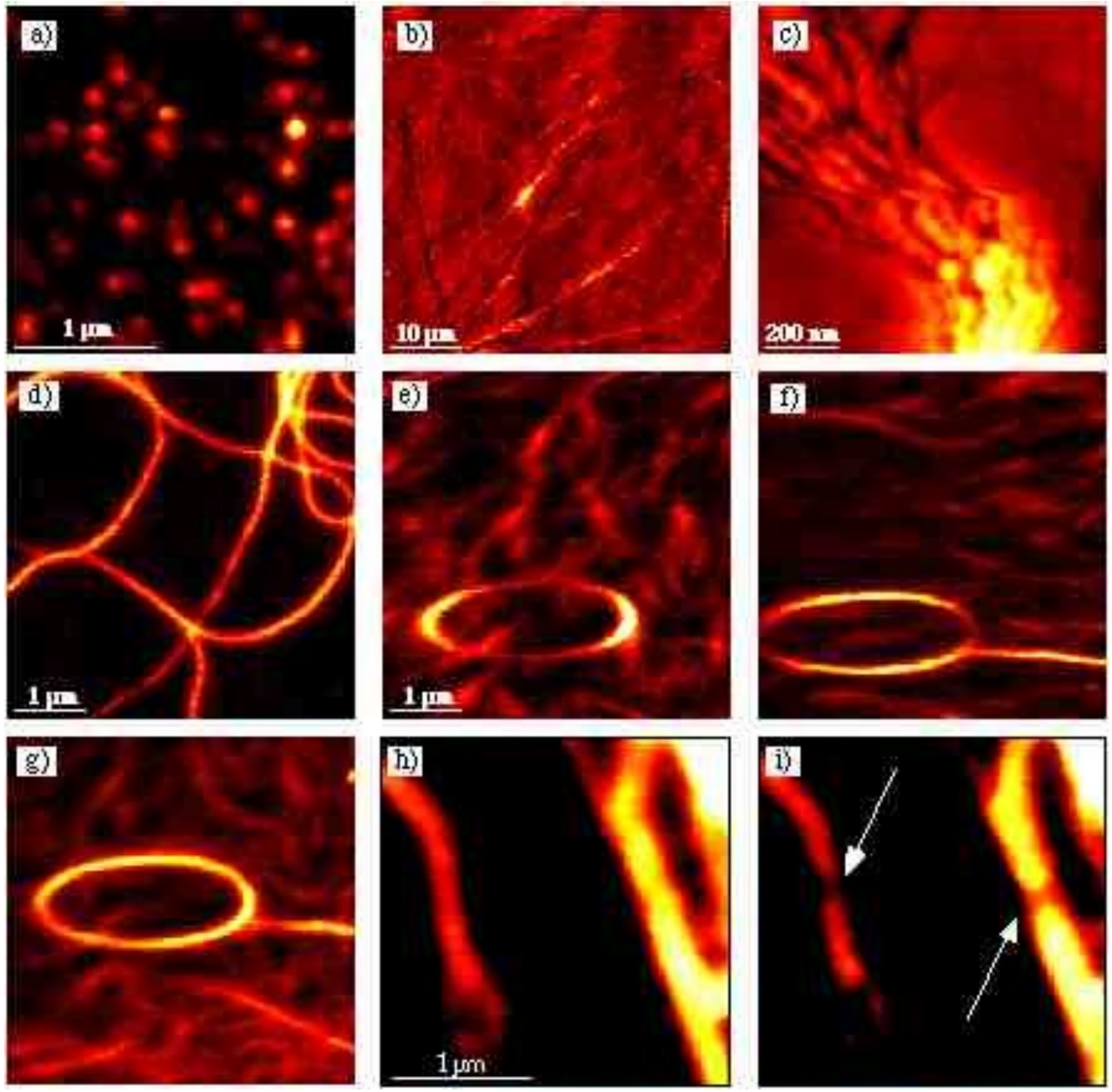
- On utilise un système de positionnement *x-y-z* de haute résolution. Un système de feedback en *z* maintient une distance constante de 1-10 nm entre la fibre et la surface de l'échantillon pendant le balayage de la surface.
- La lumière transmise est collecté par un objectif de microscope et un détecteur, pour former une image numérisée.
- Il y a plusieurs méthodes de SNOM:
  - Transmission entre fibre et lentille (montré ici)
  - Réflexion entre fibre et lentille, ou vers la même fibre
  - Couplage par des ondes évanescentes d'un prisme, détecté par une fibre.
  - Perturbation locale du champ électrique par un point métallique, créant une onde secondaire
- On peut obtenir une résolution optique de 50-100 nm.
- A cause du balayage, ce microscope est lent: >5min. par image.





https://www.researchgate.net/profile/Niek_Van_Hulst2/publication/11616312/figure/fig2/AS:394544186183684@1471078072334/Schematic-lay-out-of-a-near-field-scanning-optical-microscope-The-NSOM-probe-is-a.png

Bonus: Images des molécules fluorescentes par SNOM



J. Kerimo et al., Inter-Amer. Photochem. Soc. Newslett., 19, (1996)

L'holographie - but

- L'**holographie** a comme but de répliquer à l'identique l'image d'un objet en 3D, c.à.d. reconstruire toutes les ondes émises par un objet dans toutes les directions.
- Les ondes émises par l'objet peuvent être décomposées, par la transformée de Fourier, en un ensemble d'ondes planes partantes dans différentes directions.
- Pour reconstruire une onde plane qui se propage dans un angle (θ_x, θ_y), nous pouvons faire passer une onde plane $U = U_0 e^{ikz}$ au travers d'un transparent $f(x, y) = e^{i\left(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y\right)}$.
- Malheureusement, une photographie n'est sensible qu'à l'intensité, donc toute l'information de la phase est perdue…

http://www.swinburne.edu.au/media/swinburneeduau/media-centre/images/news-articles/republished/star-wars-hologram-ls-oo.jpg

L'holographie – comment ça marche

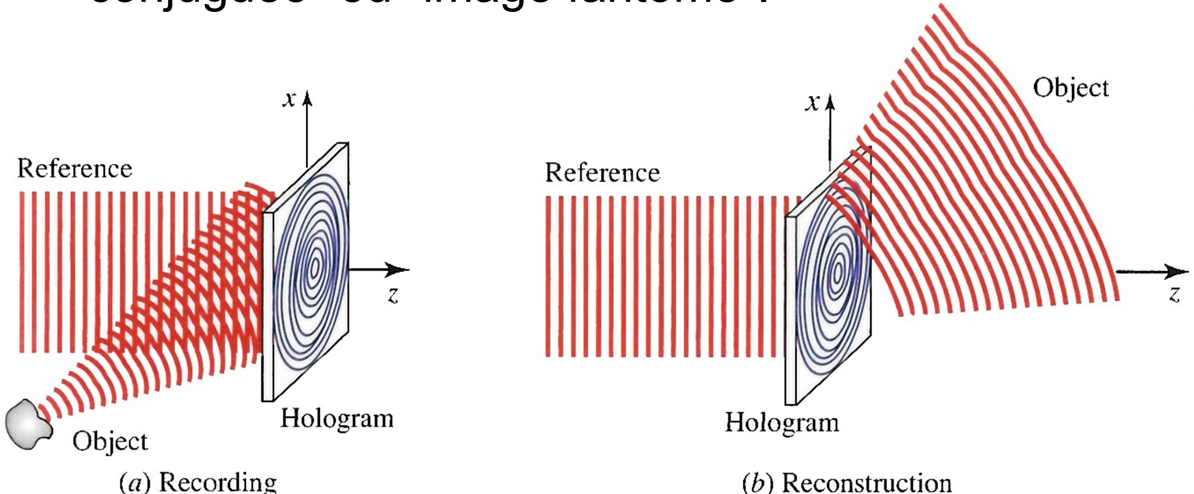
- Pour préserver la phase, il faut la transformer en intensité, en utilisant l'interférence.
- Pour enregistrer un hologramme, on expose un film photographique (ou une couche de substance photosensible) à l'interférence créée entre la lumière réfléchie par l'objet U_o et un faisceau de référence U_r (il faut une longueur de cohérence suffisante pour couvrir tout le chemin optique).
- La transmission du film développé est proportionnelle à l'intensité de l'exposition initiale:

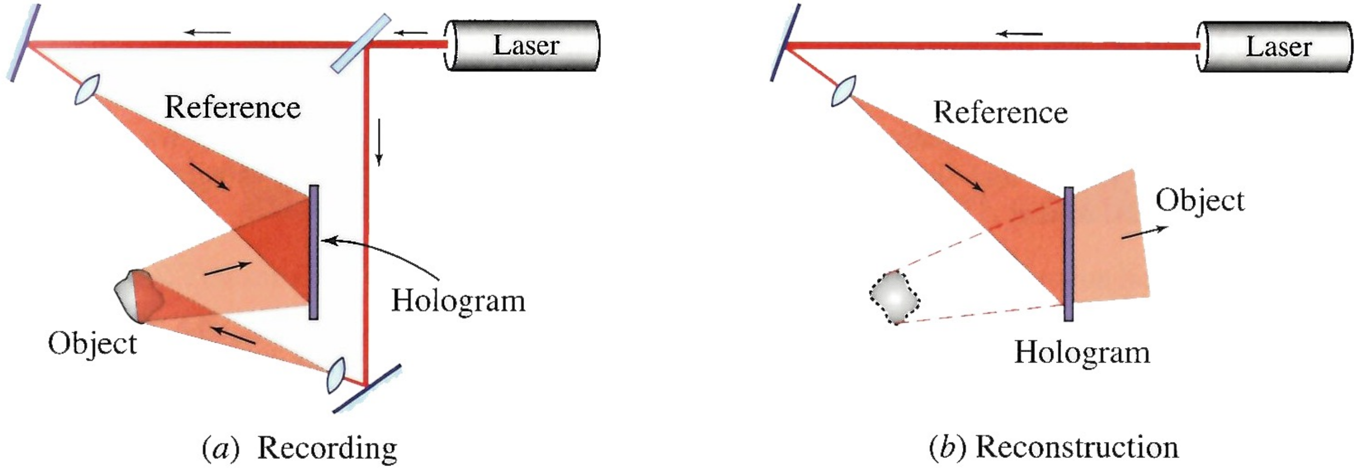
$$T \propto I = |U_o + U_r|^2 = |U_o|^2 + |U_r|^2 + U_r^* U_o + U_o^* U_r = (I_o + I_r) + U_r^* U_o + U_o^* U_r = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r}\cos(\varphi_o - \varphi_r).$$

- Pour la reconstruction, on illumine le film par le même faisceau de référence U_r, pour obtenir:

$$U = TU_r = (I_o + I_r)U_r + U_r^* U_o U_r + U_o^* U_r U_r = (I_o + I_r)U_r + I_r U_o + U_r^2 U_o^*$$

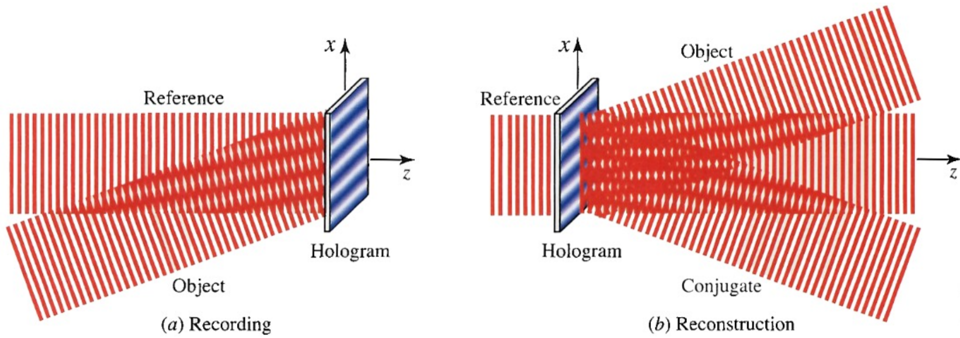
- Le premier terme est proportionnel à l'illumination, dans la direction du faisceau de référence.
- Le deuxième terme est proportionnel à l'onde original venant de l'objet – c'est la reconstitution fidèle !
- Le troisième terme est le conjugué de l'onde de l'objet, qui va dans un sens opposé. On l'appelle "image conjuguée" ou "image fantôme".



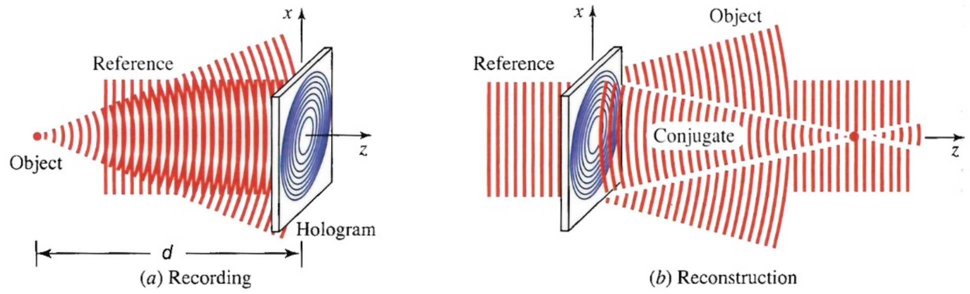


L'holographie – exemples simples

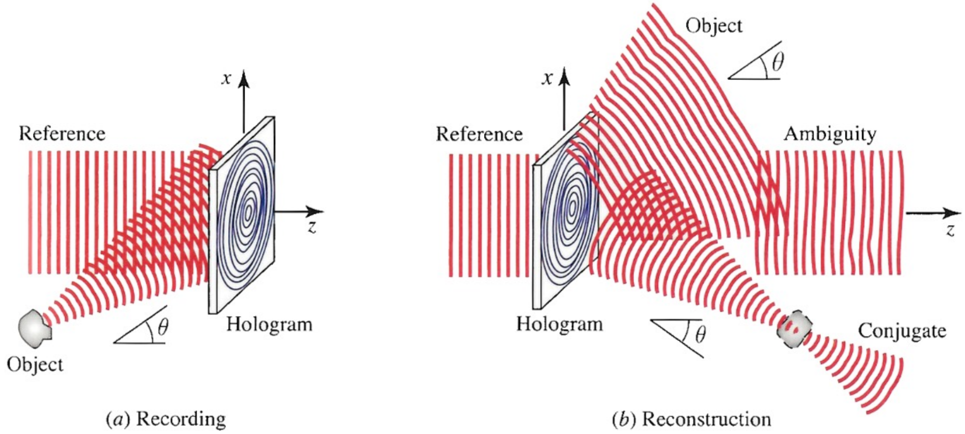
- Pour une onde plane à un angle θ: l'enregistrement donne un réseau régulier.
- La reconstruction donne trois ondes, aux angles: θ, 0, $-\theta$.



- Pour une onde sphérique, venant d'un point (0,0,-d): l'enregistrement donne une série de cercles concentriques.
- La reconstruction donne trois ondes, une qui continue l'expansion de l'onde sphérique, une onde plane (la référence), et une onde qui se focalise sur un point (0,0,d).

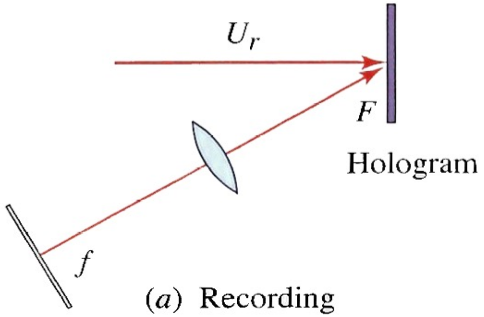


- Pour un objet fortement désaxé par un angle θ qui est plus grand que la gamme des angles contenus dans la réflexion de l'objet: il y aura une nette séparation entre la reconstruction (centrée sur l'angle de propagation θ), la référence (onde plane à l'angle 0) et l'onde conjuguée, centrée sur l'angle $-\theta$.

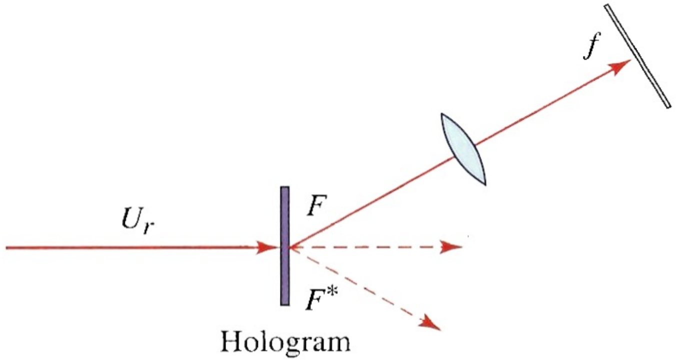


Bonus: L'holographie de Fourier

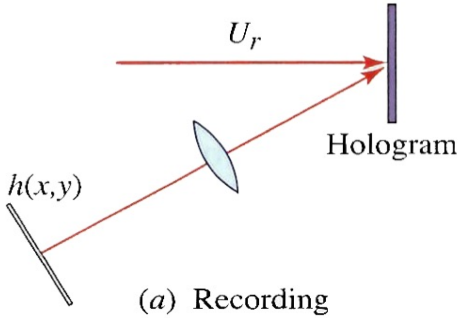
- En utilisant une lentille de longueur focale *f*, nous pouvons enregistrer l'hologramme de la transformée de Fourier d'un transparent *f*(*x*,*y*): $U_o(x,y) = \mathcal{F}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$.
- La reconstruction avec une lentille donnera la transformée inverse, revenant à la fonction d'origine *f*(*x*,*y*).
- Nous pouvons aussi enregistrer l'hologramme de la transformée de Fourier $\mathcal{H}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$ d'un filtre *h*(*x*,*y*), puis l'utiliser entre deux lentilles pour le multiplier par la transformées $\mathcal{F}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$ d'un objet *f*(*x*,*y*) ; la transformée inverse donnera l'image *g*(*x*,*y*) ,qui est la convolution du filtre et de l'objet.



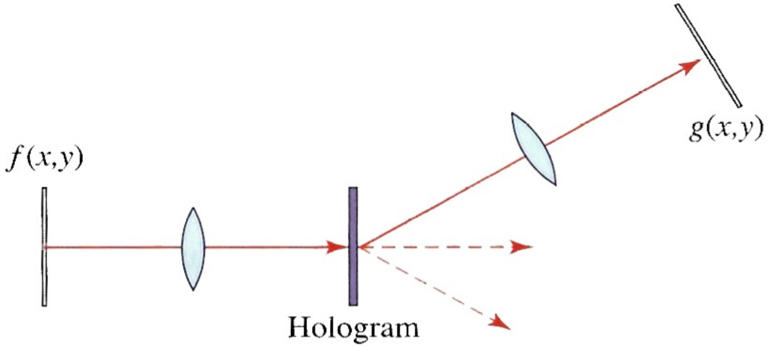
(*a*) Recording



(*b*) Reconstruction



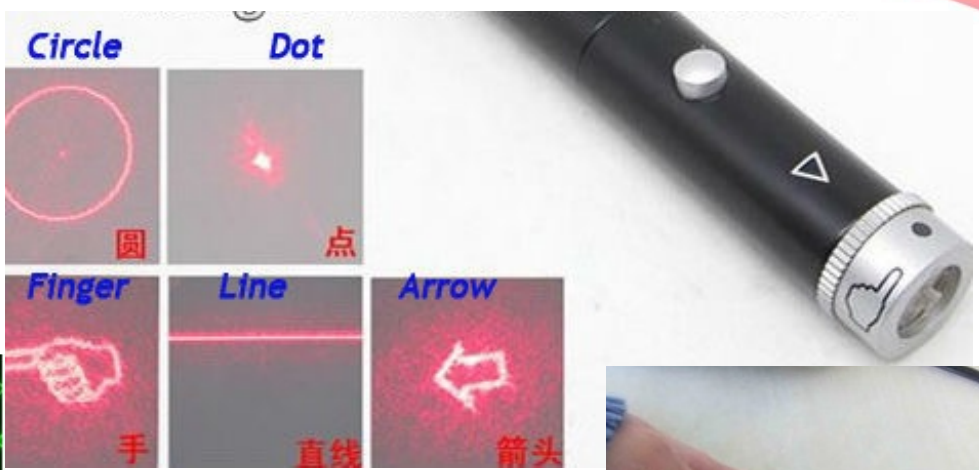
(*a*) Recording



(*b*) Reconstruction

L'hologramme produit par ordinateur

- On peut calculer l'hologramme des structures simples par moyens informatique, puis l'imprimer sur un transparent comme un hologramme classique. On peut ainsi générer un faisceau avec une forme spécifique:
  - Générer une image spécifique pour les pointeurs laser.
  - Générer une ligne pour les "niveau à laser" pour la construction.
  - Générer des multiples faisceaux pour les scanneurs des code-barres.



https://www.indiamart.com/proddetail/barcode-reader-21748345988.html

https://www.amazon.in/Diffrent-Shape-Professional-Laser-Pointer/dp/B07CTJ6Z7J

https://www.indiamart.com/proddetail/omni-directional-barcode-scanner-10695419530.html

https://www.bccourier.com/wp-content/uploads/2020/02/Laser-Level.jpg

https://www.alibaba.com/product-detail/5-in-1-Red-Laser-Projector_717360307.html