

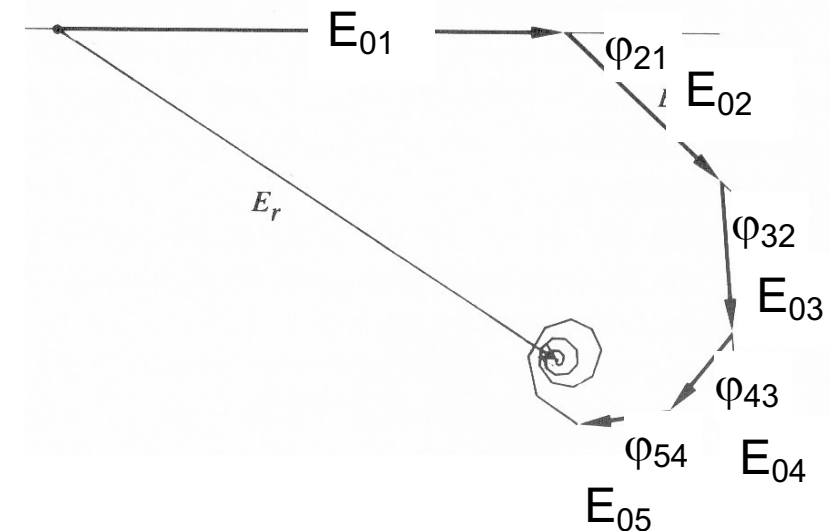
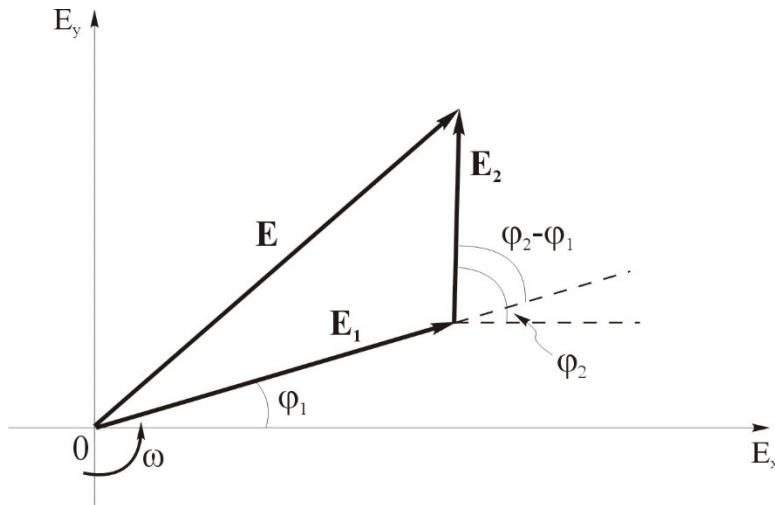
# La superposition spatiale: $\omega_1 = \omega_2$

- Prenons deux ondes:  $E_j = E_{0j} \cos \varphi_j$ , avec la même polarisation, et supposons:  $E_{01} = E_{02}$  (pas toujours!) et  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Il faut dériver les deux champs de la même source!
- Comme pour les battements, nous définissons la différence de phase:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_2) + (\phi_1 - \phi_2)$$

- L'intensité est:  $I \propto \langle (E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2)^2 \rangle_T = \langle (E_{01} \cos \varphi_1)^2 \rangle_T + \langle (E_{02} \cos \varphi_2)^2 \rangle_T + 2\langle E_{01} E_{02} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle_T = E_{01}^2 \langle \cos^2 \varphi_1 \rangle_T + E_{02}^2 \langle \cos^2 \varphi_2 \rangle_T + E_{01} E_{02} \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_T = \frac{1}{2} E_{01}^2 + \frac{1}{2} E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \cos(\Delta\varphi) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi)) = 4I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2)$ .
- L'intensité ne dépend que de la différence de parcours optique  $\Delta\varphi$ .
- Pour une multitude d'ondes planes  $E_j = E_{0j} \cos \varphi_j$ , le champ est:  $E = \sum_{j=1}^N E_{0j} \cos \varphi_j$ , et l'intensité est:

$$I \propto \sum_{j=1}^N I_j + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{k>j}^N E_{0j} E_{0k} \cos \Delta\varphi_{jk}, \text{ avec: } \Delta\varphi_{jk} \equiv \varphi_j - \varphi_k.$$

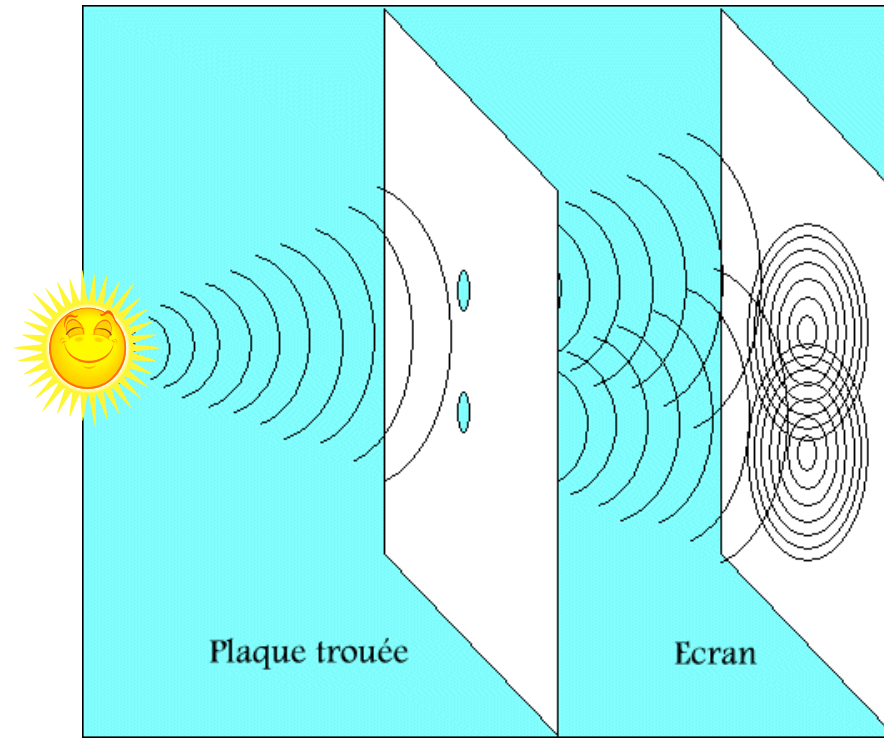
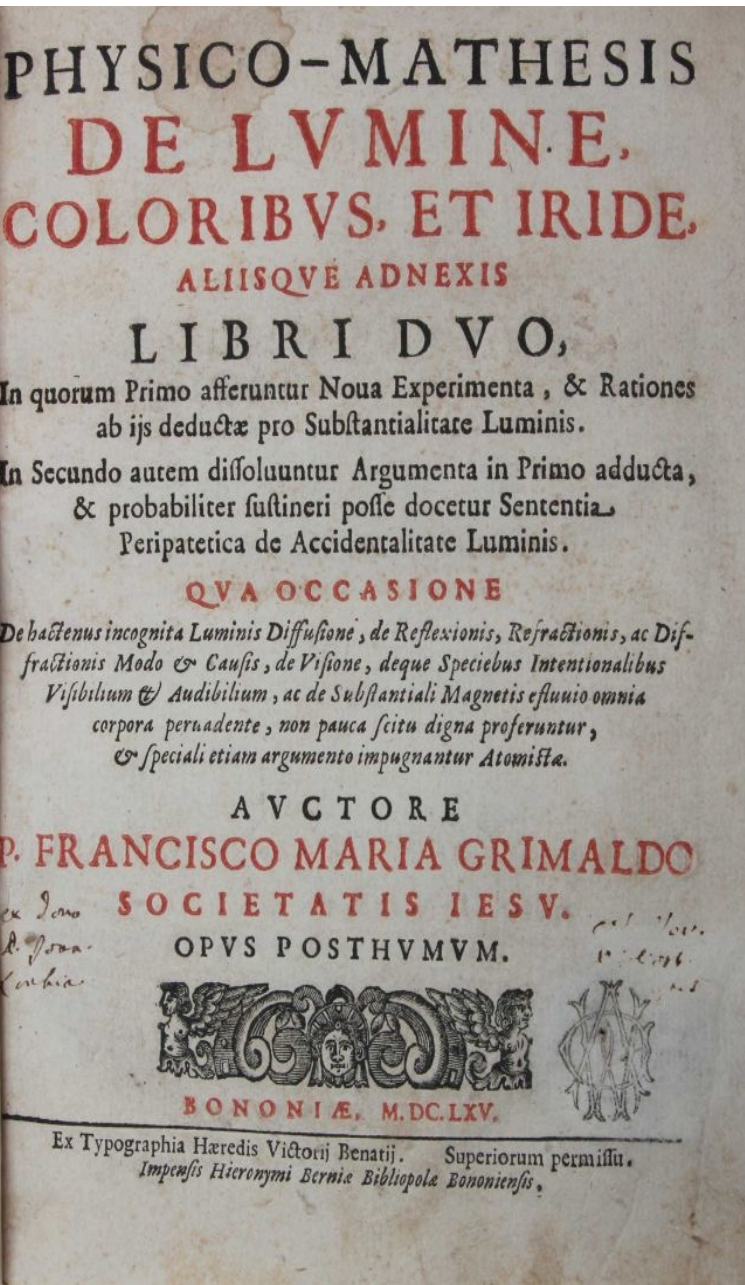


# Interférence: superposition des ondes de la même fréquence

Nous allons traiter plusieurs cas, selon le nombre des faisceaux et la direction de propagation:

	Deux faisceaux	Multiples faisceaux
	$I \propto 2I_0(1 + \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T)$	$I \propto \sum_{j=1}^N I_j + \langle \sum_{j=1}^N \sum_{k>j}^N E_{0j} E_{0k} \cos \Delta\varphi_{jk} \rangle_T$
Propagation directe:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Expérience de Young</li><li>• Interféromètres de:<ul style="list-style-type: none"><li>- Michelson</li><li>- Mach-Zhender</li><li>- Sagnac</li></ul></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Réseau de diffraction (en transmission)</li></ul>
Réflexion:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Couches minces (simples)</li><li>• La cale</li><li>• Bulles de savon</li><li>• Anneaux de Newton</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Réseau de diffraction (en réflexion)</li><li>• Interféromètre de Fabri-Perrot</li><li>• Couches minces (multiples)</li></ul>

# L'expérience de Grimaldi (publié en 1665): deux trous sous le soleil



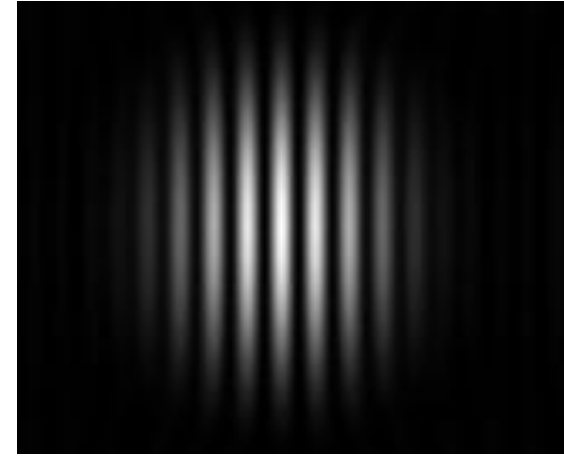
- C'est le premier à traiter (et à nommer) la diffraction de la lumière
- Il essaye de démontrer l'interférence entre la lumière passant par deux trous proches.
- Le résultat n'est pas génial...
- Le soleil n'a pas la **cohérence** nécessaire pour obtenir une bonne interférence



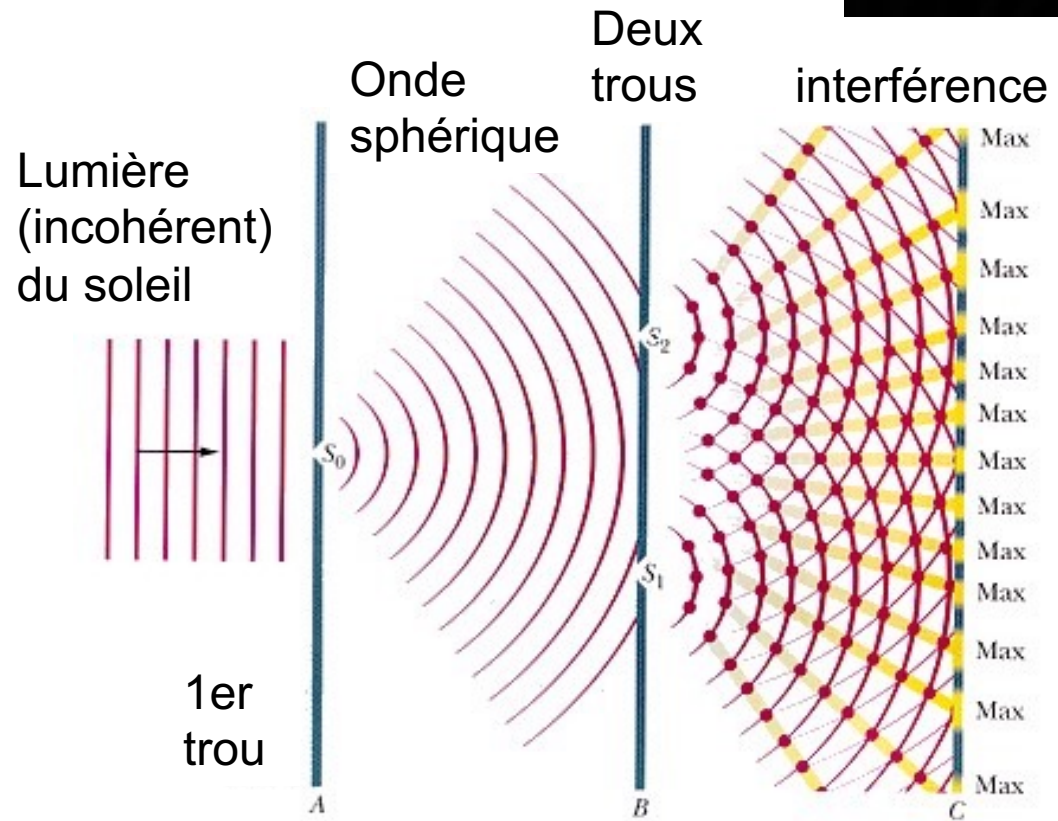
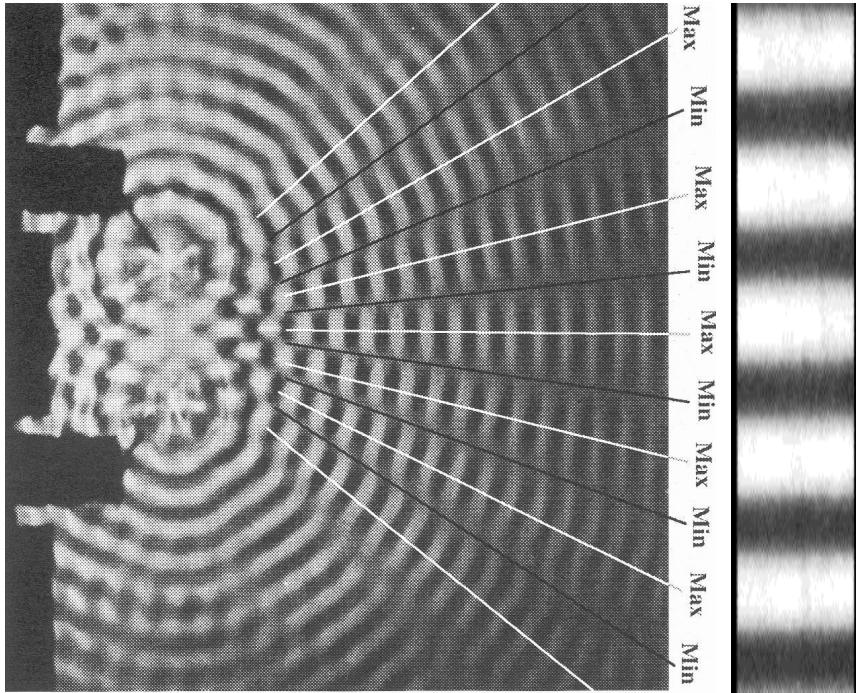
# L'expérience de Young (1805): trois trous font mieux que deux



- Pour améliorer la cohérence, un premier trou transforme la lumière du soleil à une source ponctuelle
- L'expérience de deux trous peut donc réussir
- On préfère aujourd'hui démontrer cette expérience avec des fentes – ou avec un bain d'ondes



Bain d'ondes avec deux sources



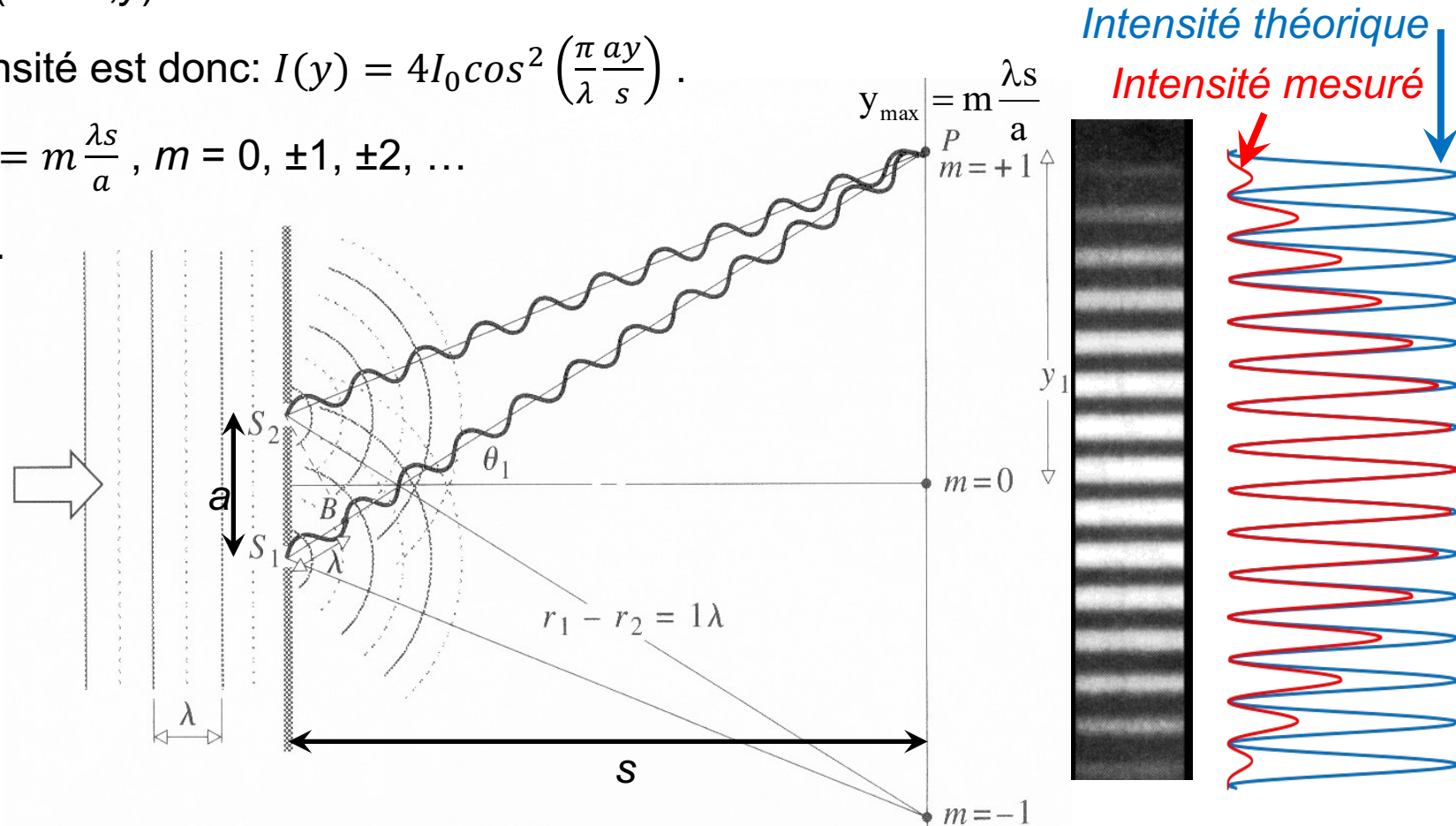


# L'expérience de Young : analyse simple avec des fentes

- Les deux sources ont la même intensité  $I_0$ , l'intensité totale est donc:  $I = 2I_0(1 + \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T) = 4I_0 \langle \cos^2(\Delta\varphi/2) \rangle_T$
- La différence de phase vient de la différence du chemin optique entre les deux ondes.
- Les maxima d'intensité correspondent à:  $\Delta\varphi = 2m\pi$ , et les minima à:  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ . Cela se traduit par une différence de parcours qui est un multiple de  $m\lambda$  pour un maximum et de  $(m+1/2)\lambda$  pour un minimum.
- En utilisant l'approximation paraxiale ( $S \gg a, y$ ) on obtient:

$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{s}; \text{ L'intensité est donc: } I(y) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \frac{ay}{s} \right).$$

- Les positions des maxima sont:  $y_{max} = m \frac{\lambda s}{a}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Les minima sont à:  $y_{min} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda s}{a}$ .
- Pourquoi la brillance diminue-t-elle quand  $m$  est grand?
  - Cohérence
  - Diffraction (Ch.9)

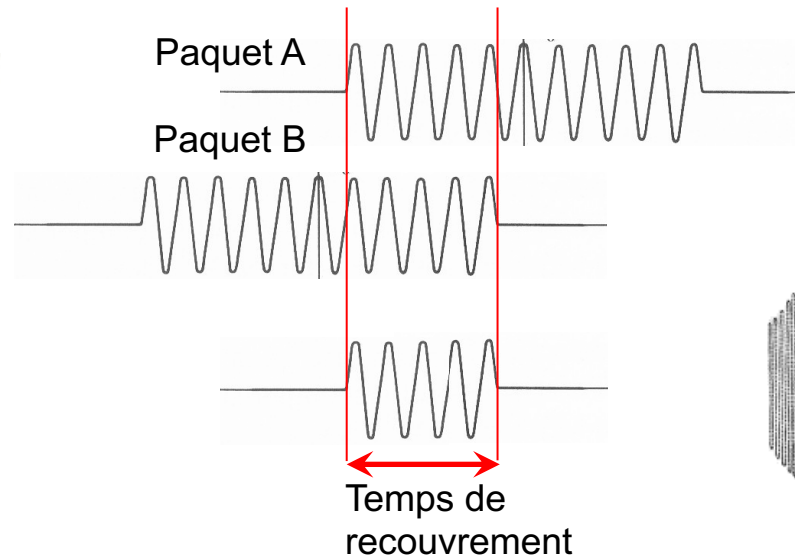


# L'effet de la cohérence temporelle sur l'intensité (généralités)

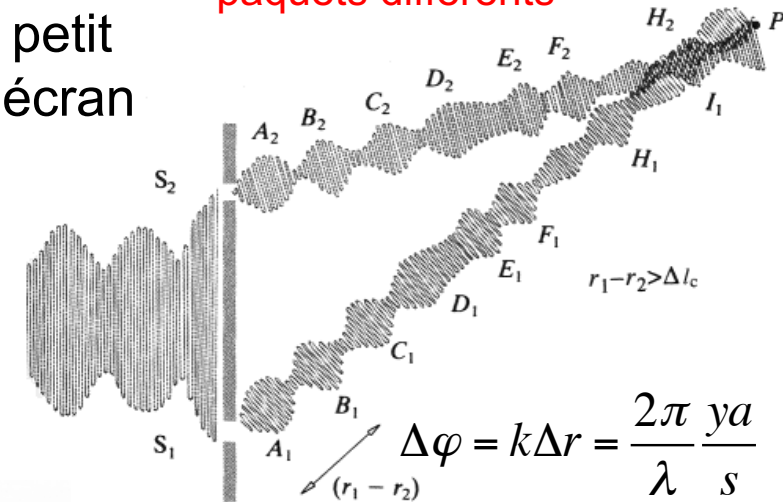
- Jusqu'ici nous avons traité une source d'ondes continue. Or, la plupart des sources émettent des paquets d'ondes, assez courts (ns), sans rapport de phase entre eux.
- Ce "temps de vie" est traduit en longueur, par:  $l_c = \tau c$  (1ns  $\leftrightarrow$  30cm).
- Pour une interférence correcte, la différence de parcours doit être plus petit que la longueur des paquets d'ondes. Sinon, la lumière qui arrive sur l'écran vient des deux paquets différents, avec un rapport de phase aléatoire.
- Si  $\Delta r = y a / s < l_c$ , les franges sont visibles
- Si  $\Delta r = y a / s > l_c$ , les franges diminuent en intensité
- La limite de visibilité est donc:  $y_c = \frac{l_c s}{a}$

**TABLE 7.1 Approximate Coherence Lengths of Several Sources**

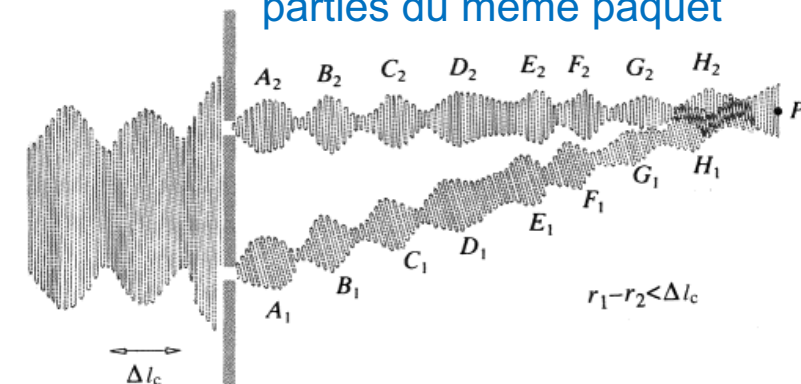
Source	Mean Wavelength $\bar{\lambda}_0(\text{nm})$	Linewidth* $\Delta\lambda_0(\text{nm})$	Coherence Length $\Delta l_c$
White light	550	$\approx 300$	$\approx 900 \text{ nm} = 1.6\bar{\lambda}_0$
Mercury arc	546.1	$\approx 1.0$	$\approx 0.03 \text{ cm}$
Kr <sup>86</sup> discharge lamp	605.6	$1.2 \times 10^{-3}$	0.3 m
Stabilized He-Ne laser	632.8	$\approx 10^{-6}$	$\approx 400 \text{ m}$
Special He-Ne laser	1153	$8.9 \times 10^{-11}$	$15 \times 10^6 \text{ m}$



Interférence entre deux paquets différents



Interférence entre deux parties du même paquet



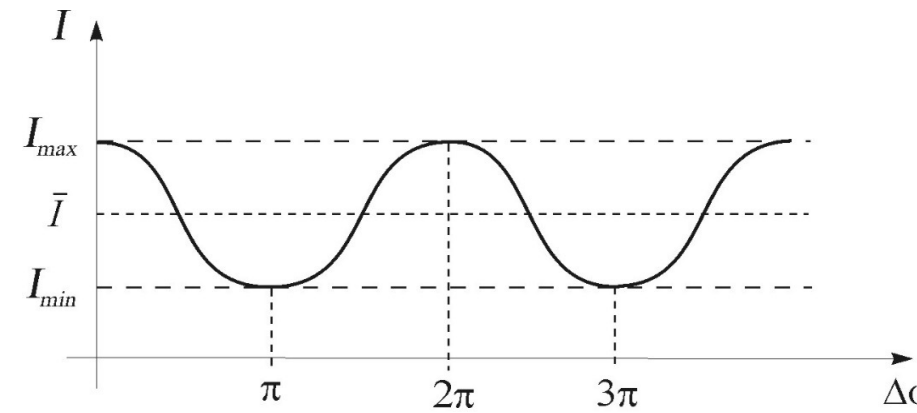
# L'effet de la cohérence sur l'intensité en détail (1)

- Afin de comprendre l'effet de la cohérence temporelle de la source, imaginons que l'interférence se fait entre deux ondes d'une **cohérence partielle**, qu'on écrit:

$$E_1 = E_c \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + E_{ic} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)$$

$$E_2 = E_c \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \Delta\varphi) + E_{ic} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \Delta\varphi + \varphi_2)$$

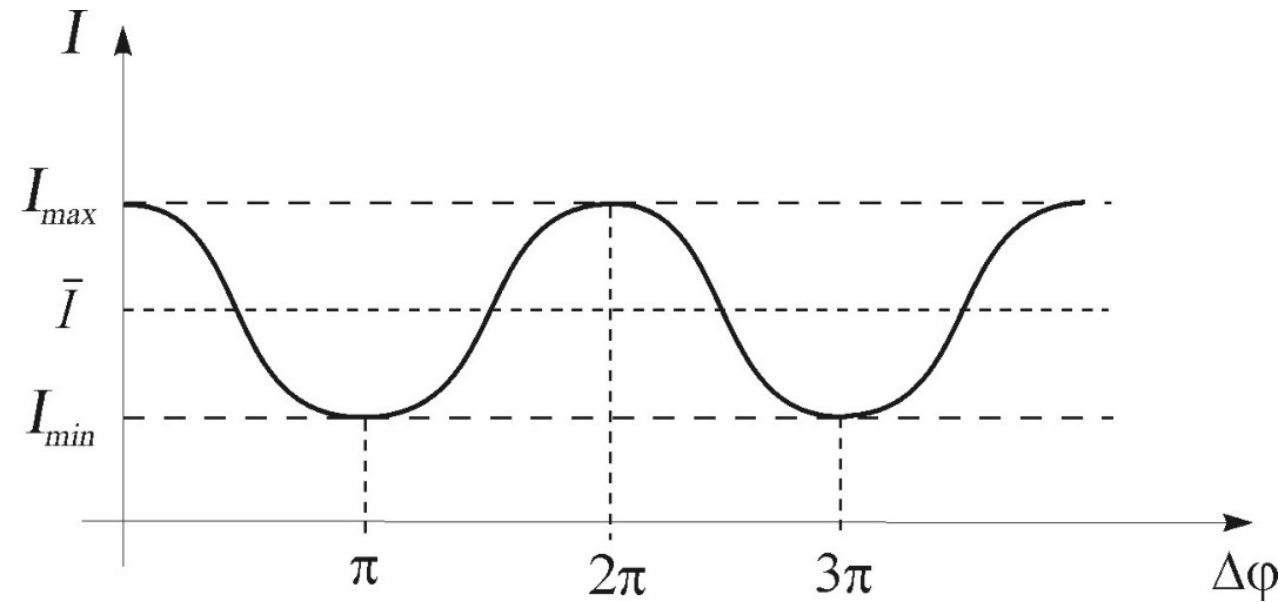
- Ici  $E_c$  et  $E_{ic}$  sont les champs cohérent et incohérent,  $\Delta\varphi$  est la phase due à la différence de parcours, et  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des phases aléatoires des sources.
- La somme est:  $E_1 + E_2 = 2E_c \cos\left(\frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t + \Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + 2E_{ic} \cos\left(\frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi}{2}\right)$ .
- L'intensité est:  $I = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle_T = 2 \left\langle E_c^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + E_{ic}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta\varphi}{2}\right) \right\rangle_T = 2E_c^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + E_{ic}^2 = 2I_c(1 + \cos \Delta\varphi) + 2I_{ic}$ .
- Nous avons utilisé le fait que:  $\langle \cos(X) \rangle_T = 0$   
et:  $\langle \cos^2(X) \rangle_T = 1/2$ , si l'argument  $X$  contient  $\omega t$  ou des phases aléatoires.





# L'effet de la cohérence sur l'intensité en détail (2)

- L'intensité est:  $I = 2I_c(1 + \cos \Delta\varphi) + 2I_{ic}$  .
- Dans le cas d'une cohérence parfaite (p. ex. une source laser):  $E_{ic}=0$  , donc:  $I = 2I_c(1 + \cos(\Delta\varphi))$  ;  
 $I_{max}=4I_c$  ,  $I_{min} = 0$  (franges de contraste maximal).
- Sans cohérence:  $E_c=0$  , donc:  $I = 2I_{ic}$  (constante).
- Pour la cohérence partielle, nous définissons:
  - L'intensité moyenne:  $\bar{I} = \frac{I_{max}+I_{min}}{2} = 2(I_c + I_{ic})$
  - La **visibilité** (contraste) de l'interférence:  $\nu = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{I_c}{I_c+I_{ic}}$  .
- On peut donc réécrire l'intensité comme:  $I = \bar{I}(1 + \nu \cos(\Delta\varphi))$  .



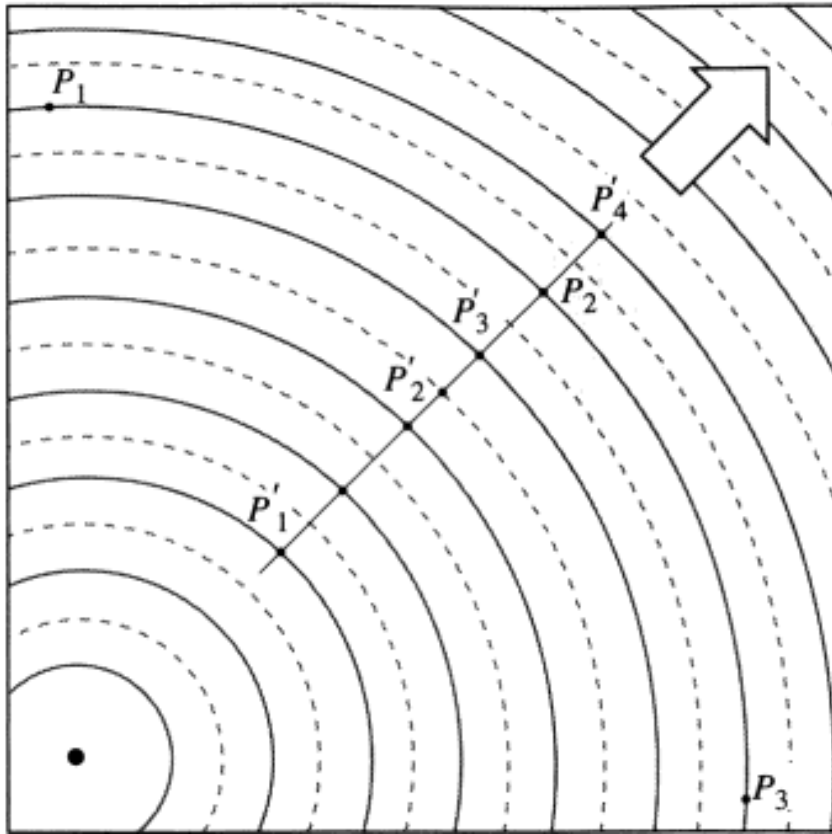
# Cohérence temporelle et spatiale

L'incohérence peut être liée aux propriétés de la source:

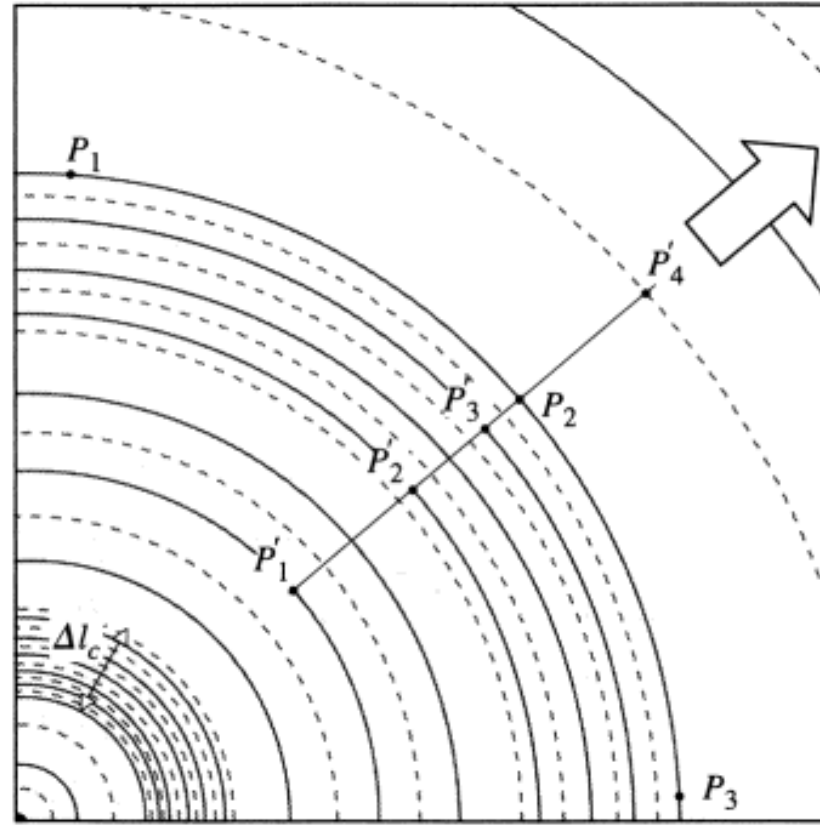
- Temporelles (paquets d'ondes émis par la source en temps différents)
- Spatiales (paquets d'ondes émis par des parties différentes de la source)

Une source avec une cohérence limitée

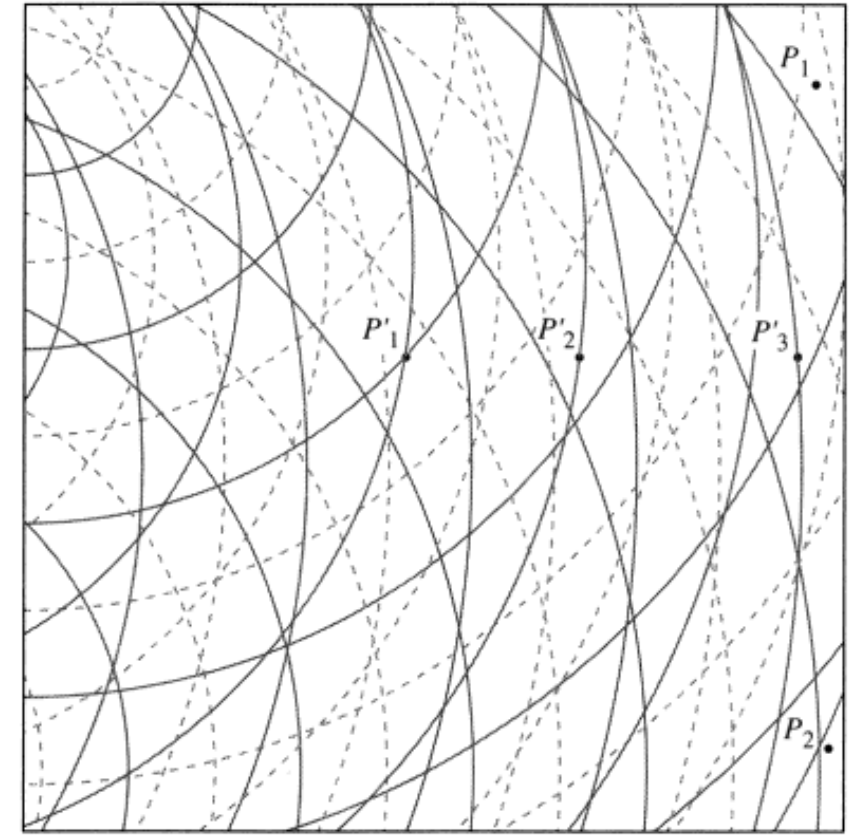
Une source cohérente



(In)cohérence temporelle

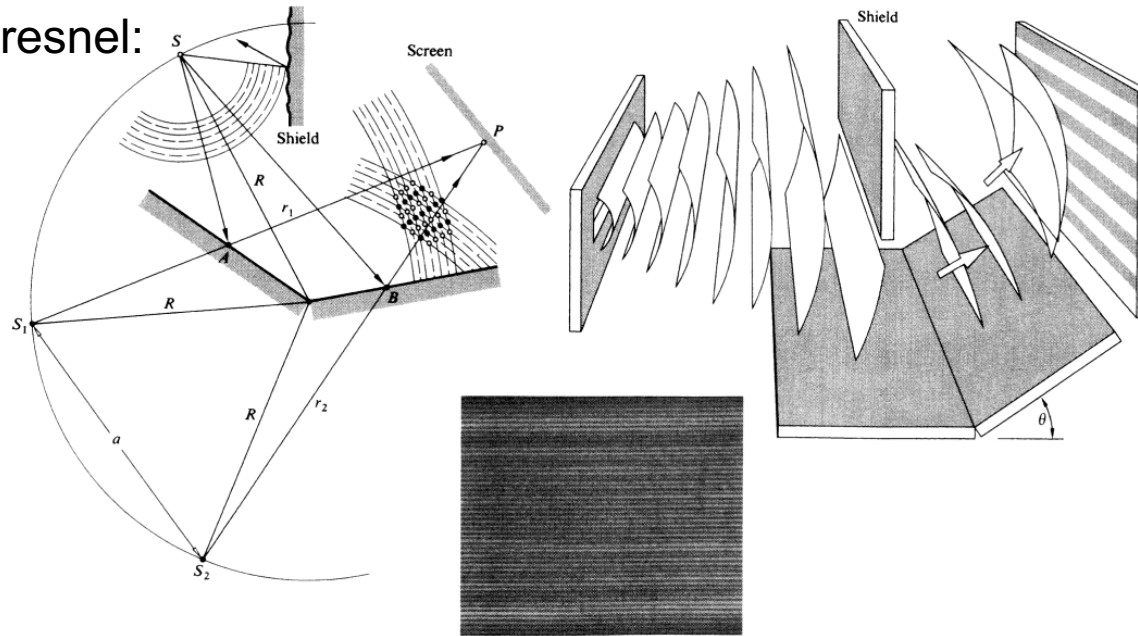


(In)cohérence spatiale

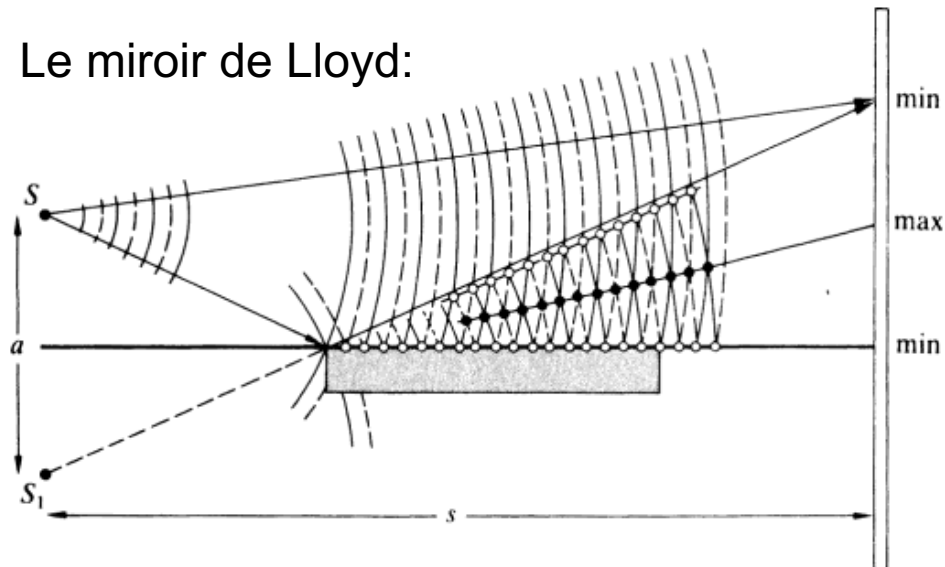


# Expériences similaires aux fentes de Young:

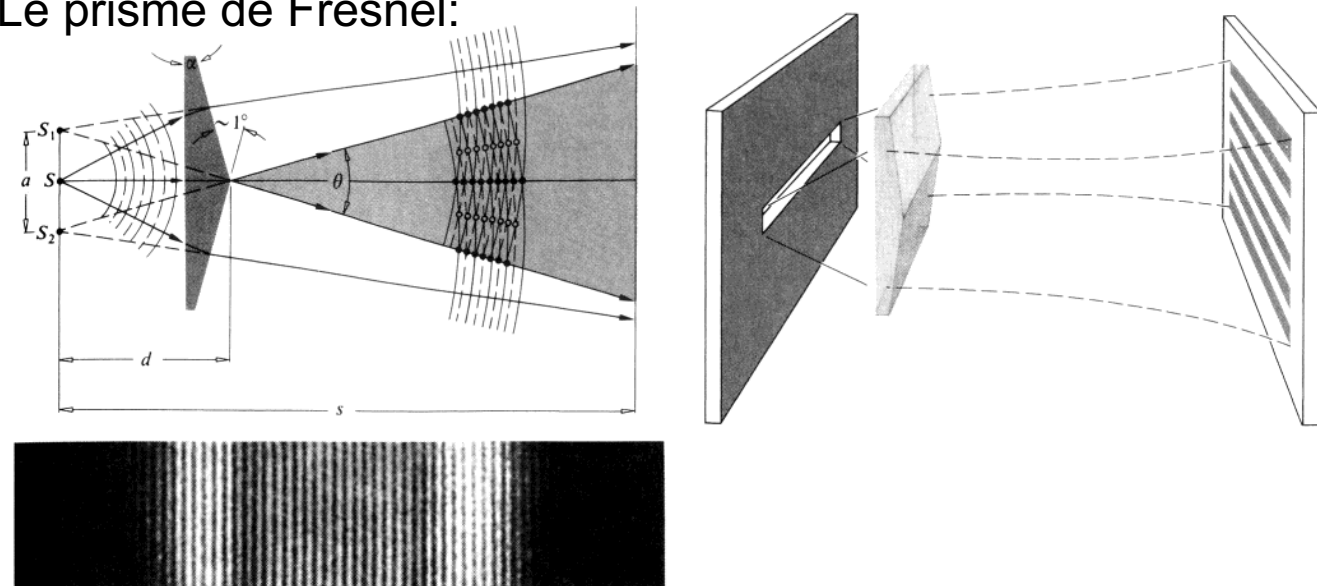
Le double miroir de Fresnel:



Le miroir de Lloyd:



Le prisme de Fresnel:

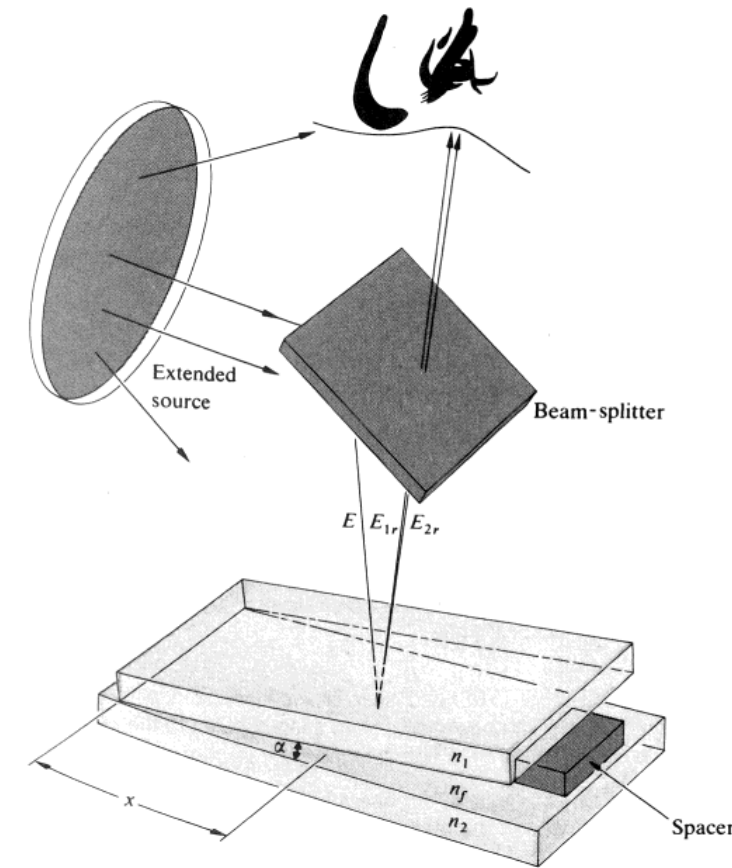
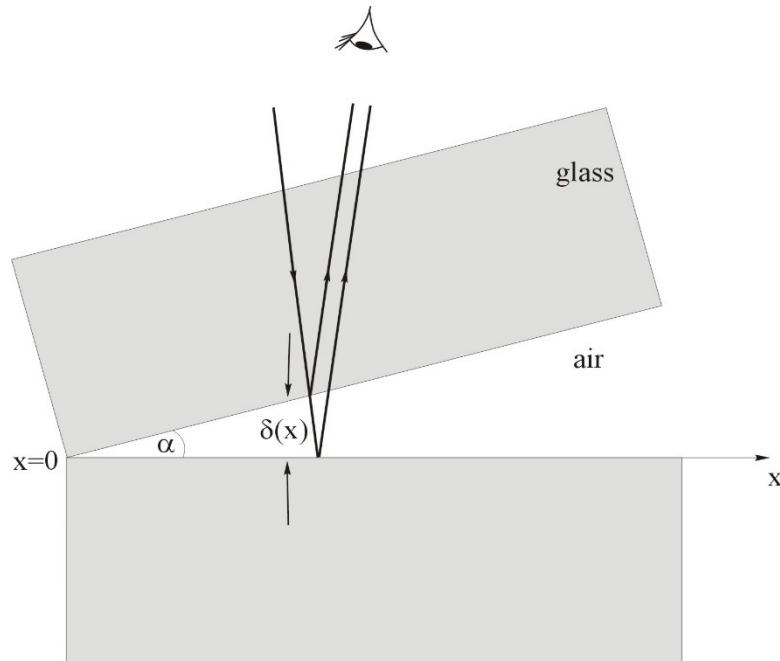




# Franges d'interférence équidistantes (réflexion): la cale

Deux plaques de verre, qui se touchent dans un coin. On regarde la réflexion en incidence normale:

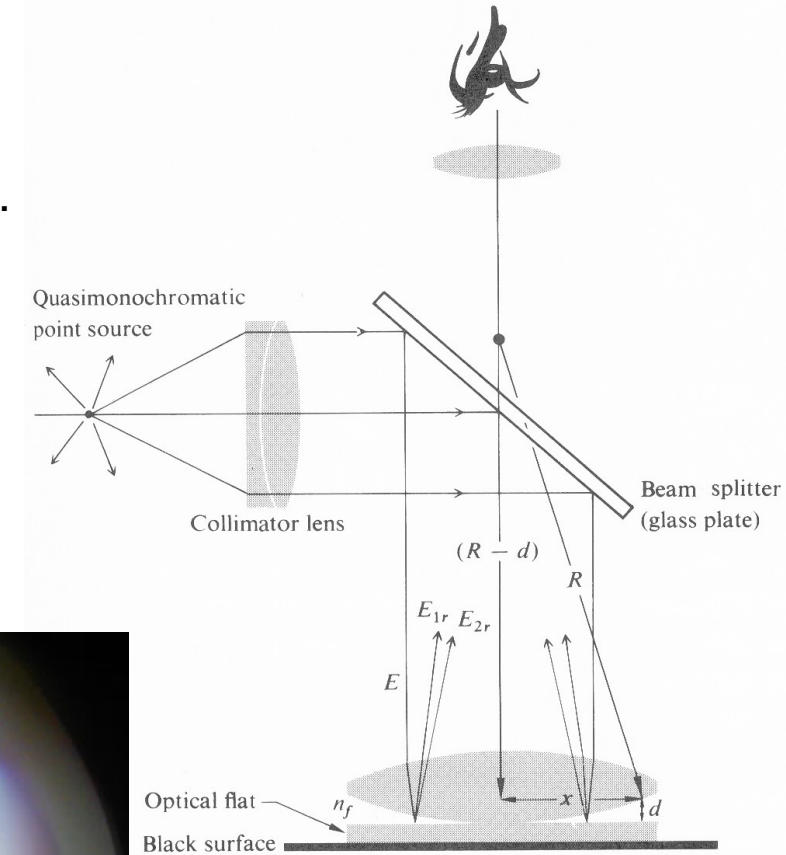
- La différence de phase entre les deux réflexions est de:  $\Delta\varphi = 2k\delta(x) + \pi$  (il y a une réflexion interne et une externe, donc une différence de phase de  $\pi$  en plus du déphasage lié au parcours).
- Si l'angle  $\alpha$  est petit:  $\delta(x) \cong x\alpha$ , ce qui donne:  $\Delta\varphi = 2k\alpha x + \pi$ .
- On a des franges blanches (intensité max) pour:  $\Delta\varphi = 2m\pi$ , ou:  $x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\alpha}$ ;  $m=0,1,2, \dots$
- On a des franges noires (intensité min) pour:  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ , ou:  $x = m \frac{\lambda}{2\alpha}$ .
- Le centre ( $x=m=0$ ) est noir (pas de réflexion) !
- L'intensité réfléchie est faible (réflectivité = 4%, donc intensité max = 16%).



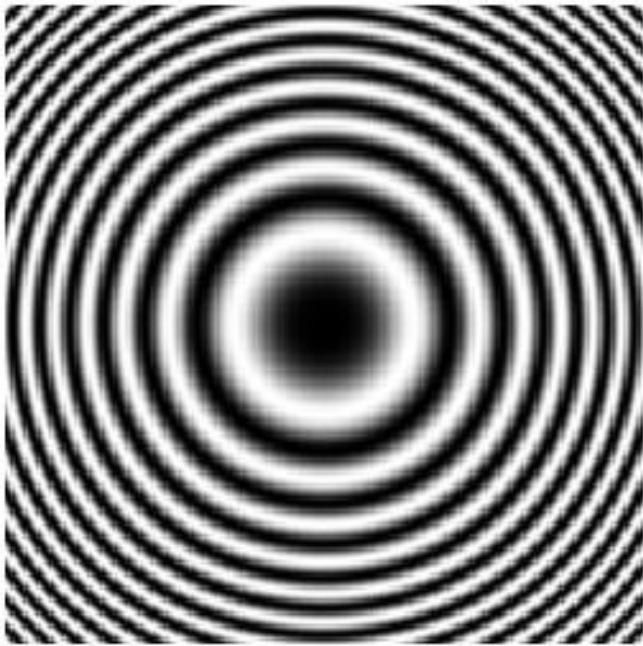
# Les anneaux de Newton

Une lentille de profile sphérique, posée sur une plaque de verre plate. On regarde la réflexion en incidence normale:

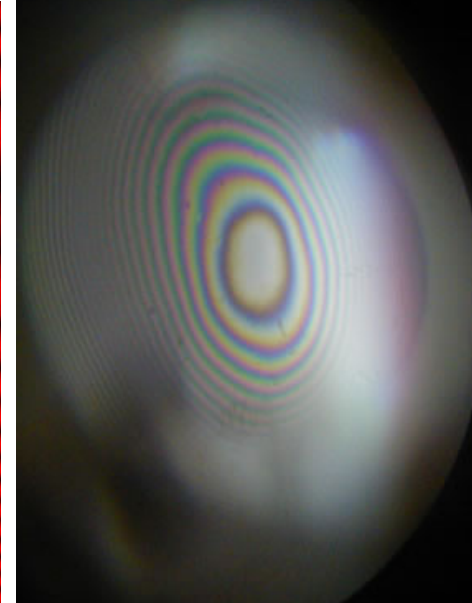
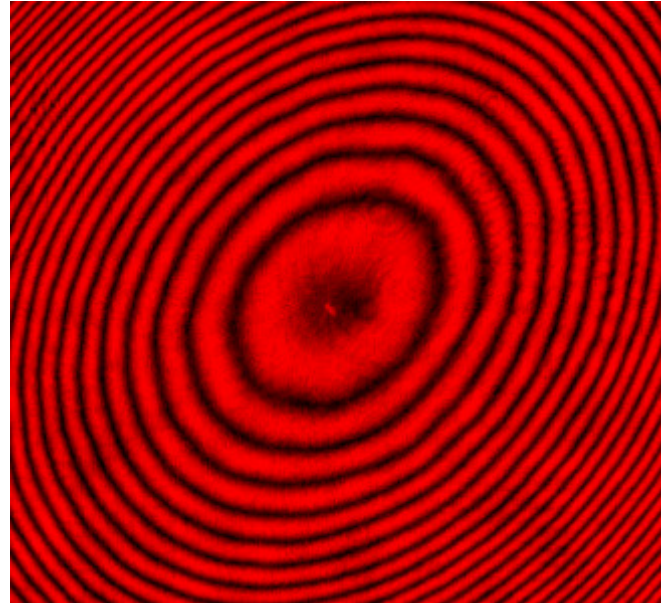
- La même analyse que le coin donne  $\Delta\varphi = 2k\delta(x) + \pi$ , mais:  $\delta(x) \cong \frac{x^2}{2R}$ .
- On a des franges blanches (intensité max) pour:  $x = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) R\lambda}$  ;  $m=0,1,2, \dots$
- On a des franges noires (intensité min) pour:  $x = \sqrt{mR\lambda}$ .
- Le centre ( $x=m=0$ ) est noir (pas de réflexion) !
- L'intensité réfléchie est faible (réflectivité = 4%, donc max 16%).
- Un appareil utile pour contrôler les lentilles sphériques, très sensible ( $<\lambda/10$ ).



Anneaux de Newton: Lentille parfaite



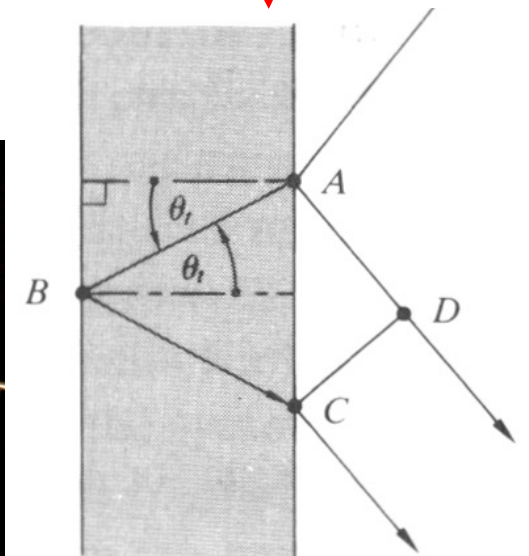
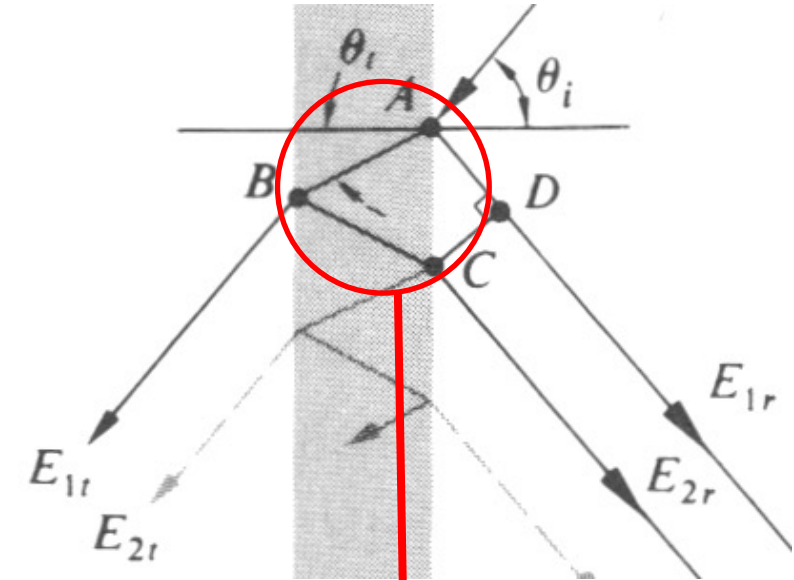
Lentilles imparfaites



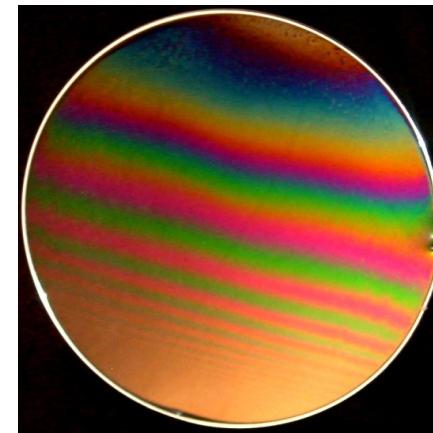
# Les couches minces (bulles de savon)

- L'interférence des réflexions d'un faisceau entrant à en angle  $\theta_i$  dans une couche mince d'épaisseur  $d$  et indice  $n$  dans l'air.
- La phase au chemin ABC est:  $\Delta\varphi = 2k_0nd / \cos \theta_t + \pi$ , et au chemin AD est:  $\Delta\varphi = 2k_0d \sin \theta_i \tan \theta_t$ , ou en utilisant Snell:  $\Delta\varphi = 2k_0nd \sin^2 \theta_t / \cos \theta_t$ .
- La différence de phase entre les deux réflexions (AD et ABC) est:  

$$\Delta\varphi = \frac{2k_0nd}{\cos \theta_t} (1 - \sin^2 \theta_t) + \pi = 2k_0nd \cos \theta_t + \pi.$$
- Comme avec la cale, il y a une réflexion interne et une externe, donc une différence de phase de  $\pi$  en plus du déphasage lié au parcours.
- En incidence normale, c'est plus simple:  $\Delta\varphi = 2k_0nd + \pi$ .
- Exemple: bulle de savon. Avec la lumière blanche, on a un maximum de réflexion pour chaque longueur d'onde à une position différente. Il y a aussi un gradient de l'épaisseur, qui fait varier la distance entre les franges.



Franges d'interférence dans une bulle de savon:

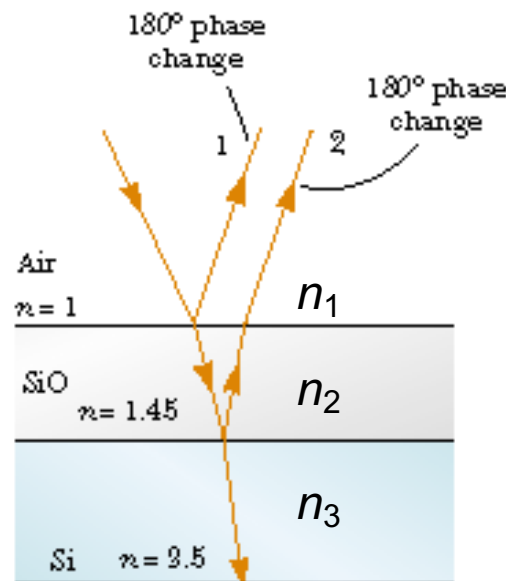
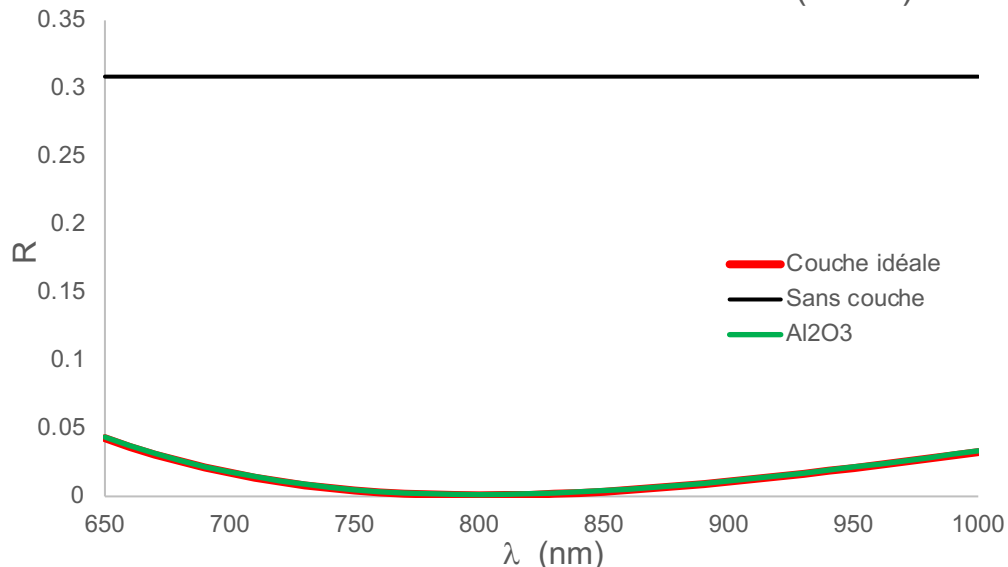




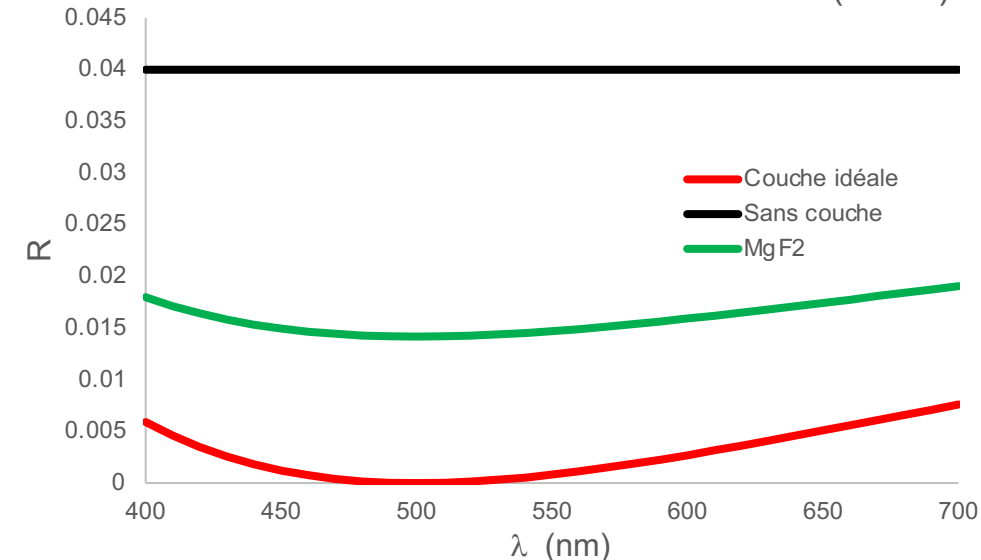
# La couche antireflet simple

- La réflexion dans une interface (en incidence normale) est (Fresnel):  $r = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$ , et  $R = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$ . Pour air-verre ( $n=1.5$ ) cela vaut 4%, pour air-GaAs ( $n=3.5$ ) c'est 31%. Parfois (plusieurs éléments optiques) c'est trop!
- Pour annuler la réflexion, on dépose une couche mince avec une indice intermédiaire, afin de créer une interférence destructrice entre les rayons réfléchis des deux interfaces.
- La réflexion de la surface 1 est:  $E_{r1} = E_i \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$ , et de la surface 2 est:  $E_{r2} = E_i \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \frac{2n_2}{n_2 + n_1} e^{4\pi i n_2 d / \lambda} \approx E_i \frac{n_2 - n_3}{n_3 + n_2}$ . On choisit l'épaisseur:  $d = \lambda / 4n_2$  pour obtenir une phase de  $\pi$ , donc une interférence destructrice.
- Pour une **couche antireflet** parfaite, il faut encore égaliser l'intensité des deux réflexions:  $E_{r1} = E_{r2}$ , ce qui donne la condition supplémentaire:  $n_2^2 = n_1 n_3$ . Parfois il est difficile de trouver de la matière adéquate!
- La condition pour la phase n'est valable que pour une longueur d'onde...

Effet de couche anti-réflet sur GaAs ( $n=3.5$ )

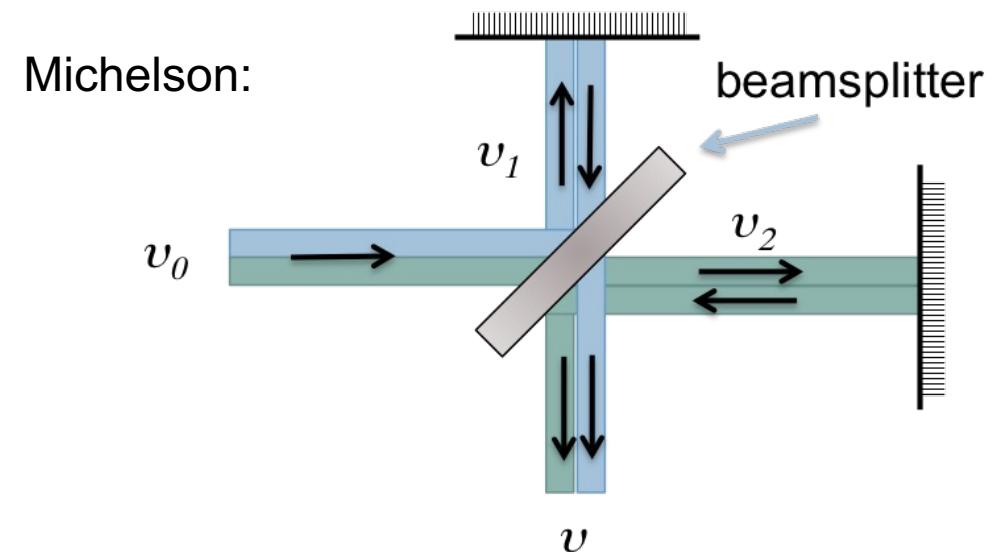
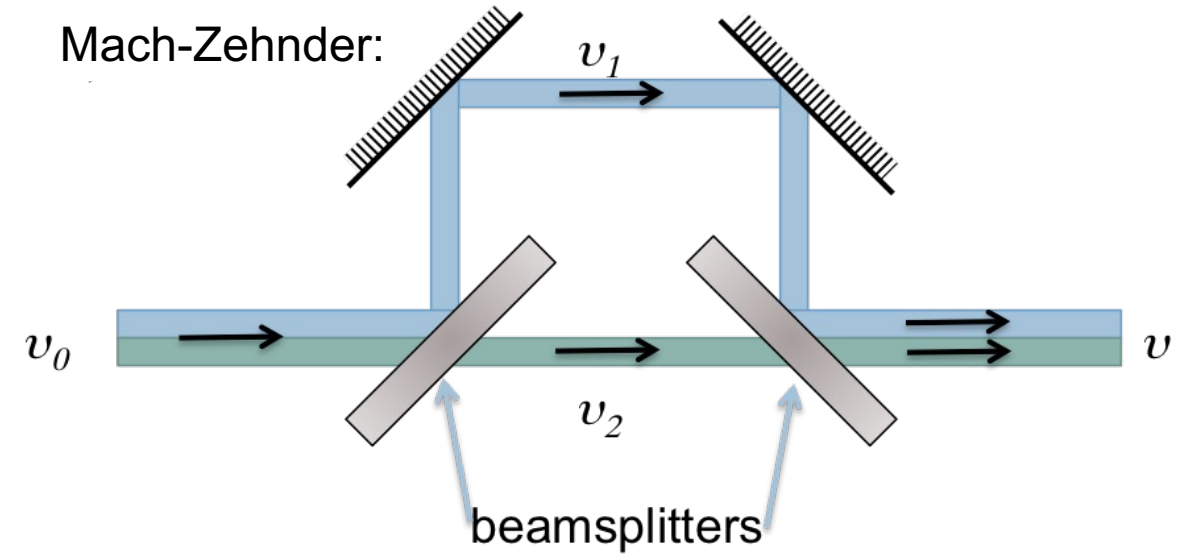
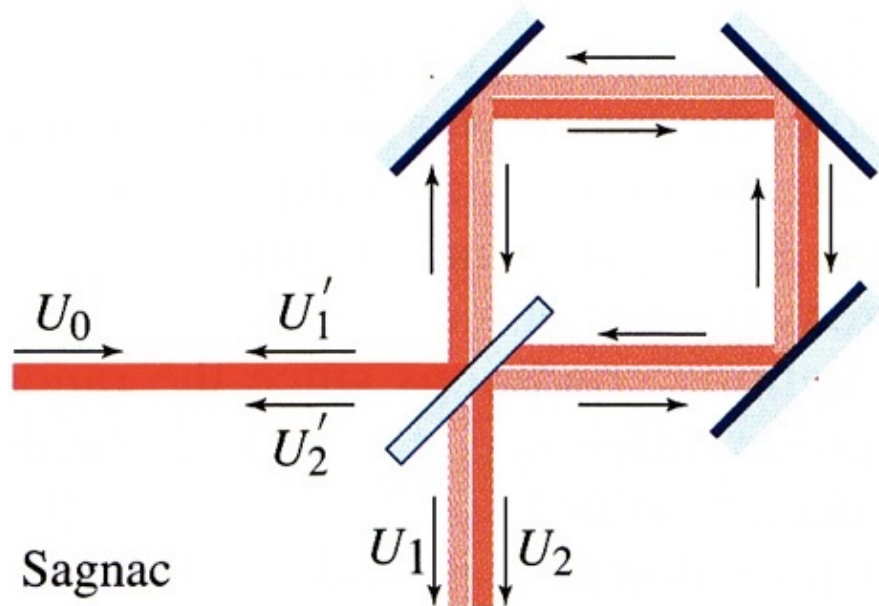


Effet d'une couche anti-réflet sur verre ( $n=1.5$ )



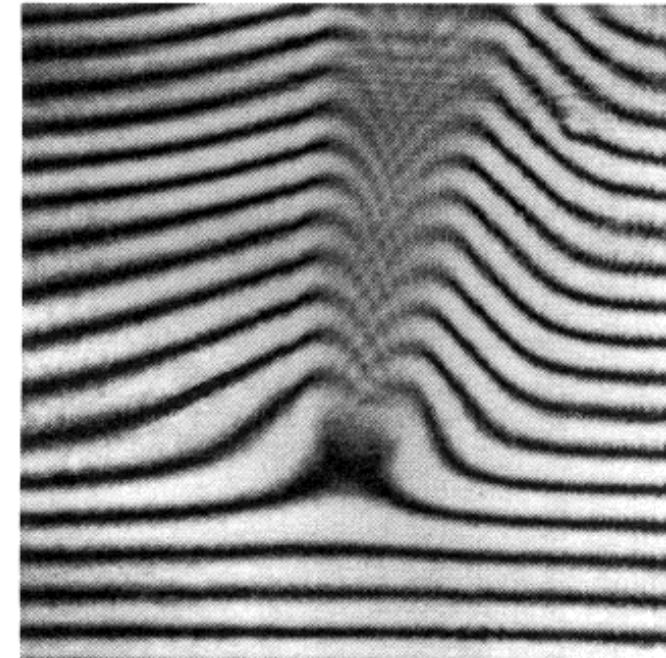
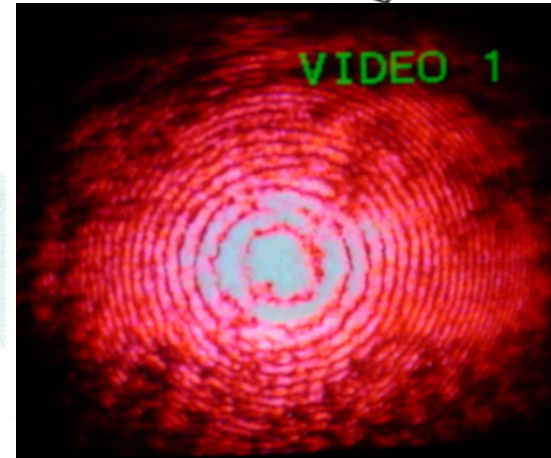
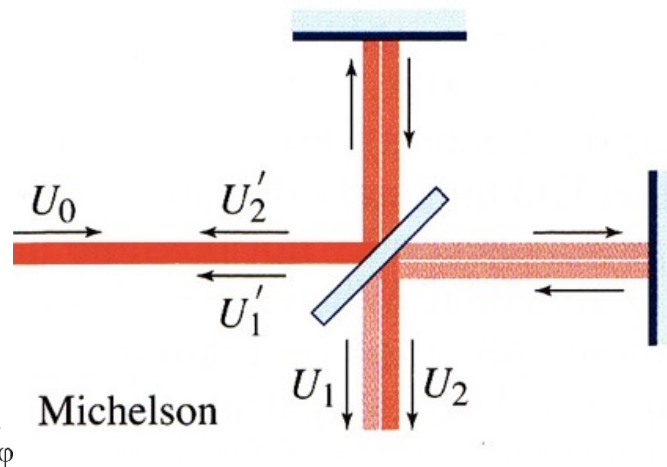
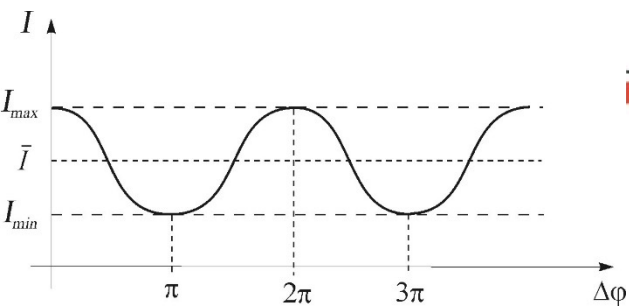
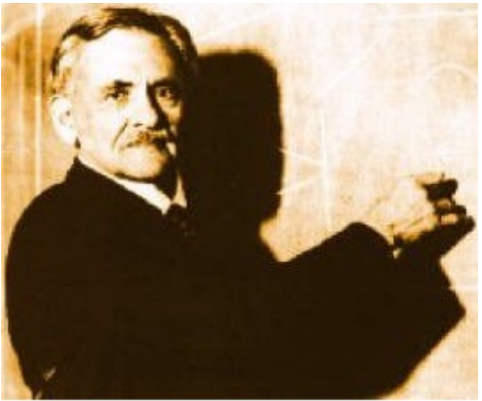
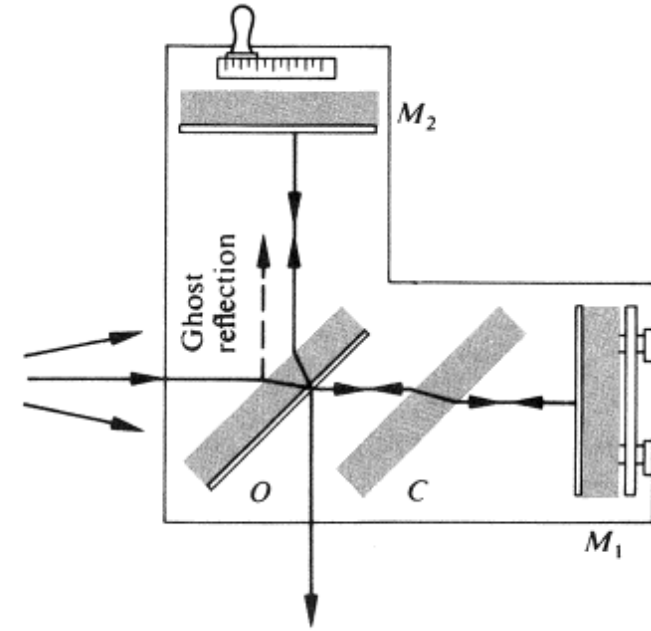
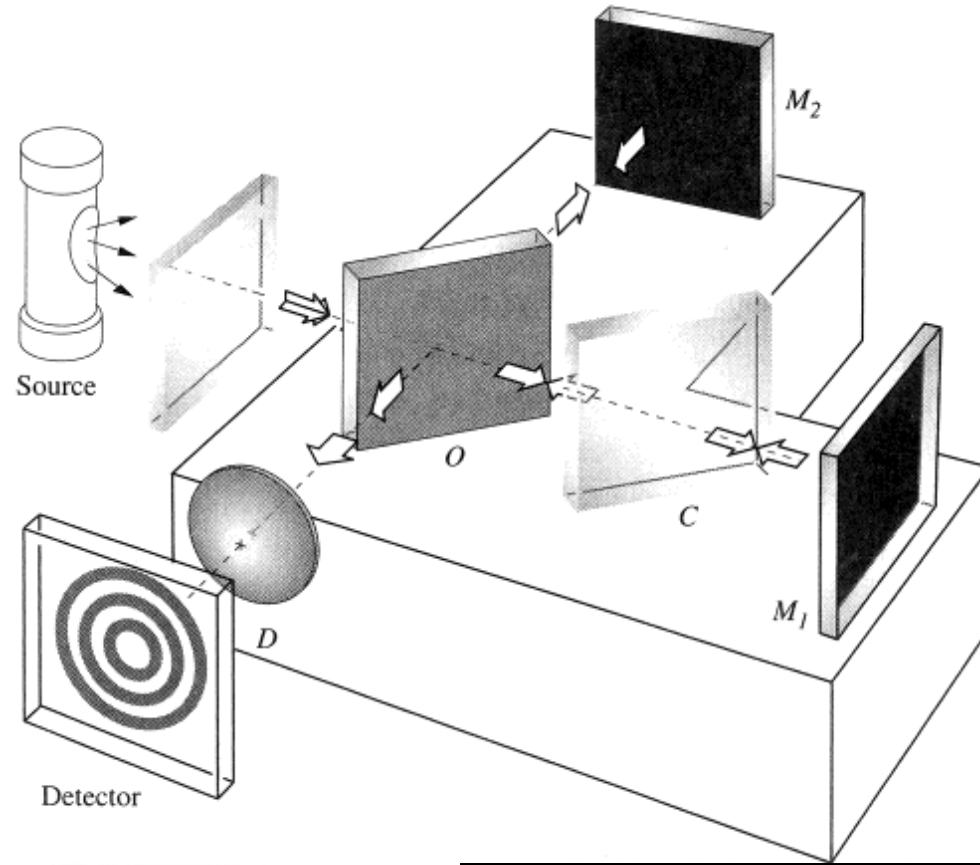
# Interféromètres avec miroirs: Mach-Zehnder, Michelson, Sagnac

- On utilise un ou deux miroirs semi-transparents (ou un cube FTIR) et des miroirs pour diviser un faisceau en deux parties et les recombinaison pour former de l'interférence.
- L'interférence est très sensible aux changements du chemin optique  $\Delta\varphi = \Delta(kx)$  dans une "branche" de l'interféromètre par rapport à l'autre "branche":
  - Changement de  $x$  (position des miroirs).
  - Changement de  $k=nk_0$  (indice du milieu).
- Ces interféromètres ont plusieurs applications!



# Interféromètre de Michelson

- L'interféromètre de Michelson a l'avantage de ne pas dépendre de la transparence du miroir: chaque faisceau traverse le miroir une fois par transmission et une fois par réflexion.



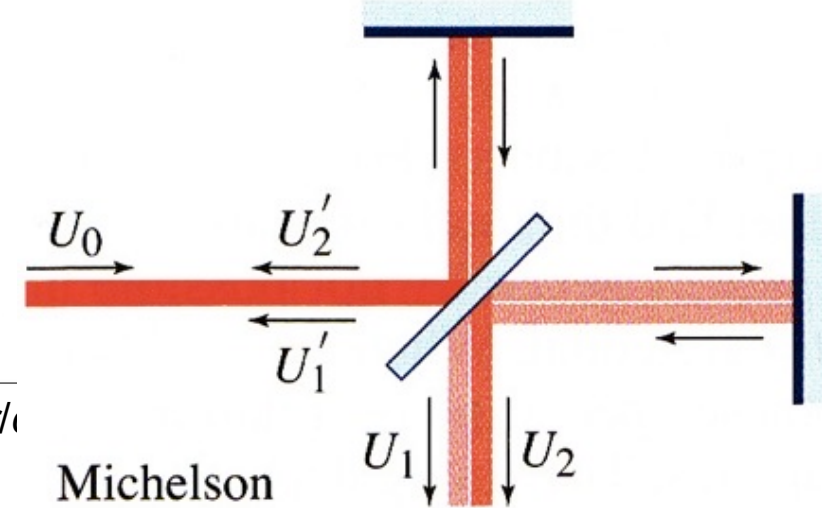
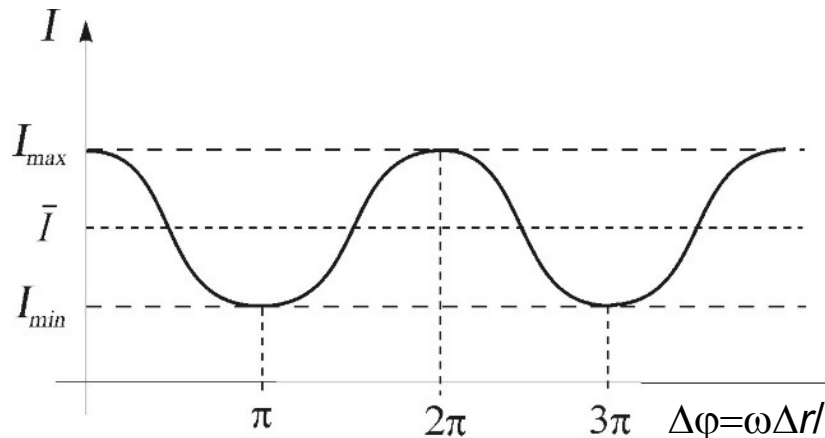


# Interféromètre de Michelson: Comment ça marche

- A l'entrée:  $E_s = E_0 \cos(kx - \omega t)$ , et:  $I_s = \frac{E_0^2}{2}$ . Le diviseur de 50% produit des intensités:  $I_{1,2} = \frac{E_{01,2}^2}{2} = \frac{I_s}{2}$ , et le champ vu par le détecteur est donc:  $E_d = E_1 + E_2 = \sqrt{I_s}[\cos(kx_1 - \omega t) + \cos(kx_2 - \omega t)] = 2\sqrt{I_s} \cos(kx_a - \omega t) \cos(k\Delta x/2)$ , avec le chemin optique moyen:  $x_a = (x_1 + x_2)/2$  et la différence du chemin optique entre les faisceaux:  $\Delta x = x_1 - x_2$ .
- L'intensité mesurée est:  $I_d \propto \langle E_d^2 \rangle_T = 4I_s \langle \cos^2(kx_a - \omega t) \rangle_T \cos^2(k\Delta x/2) = 2I_s \cos^2(k\Delta x/2) = I_s[1 + \cos(k\Delta x)] = I_s[1 + \cos(2\pi\Delta x/\lambda)] = I_s[1 + \cos(2\pi\Delta x\sigma)]$ , avec la définition de la fréquence spatiale  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ .

L'unités de  $\sigma$  est le  $\text{cm}^{-1}$ , donc  $\lambda=1 \text{ } \mu\text{m}$  correspond à  $\sigma=10^4 \text{ cm}^{-1}$ , ou:  $\sigma(\text{cm}^{-1}) = \frac{1}{100\lambda(\mu\text{m})}$ .

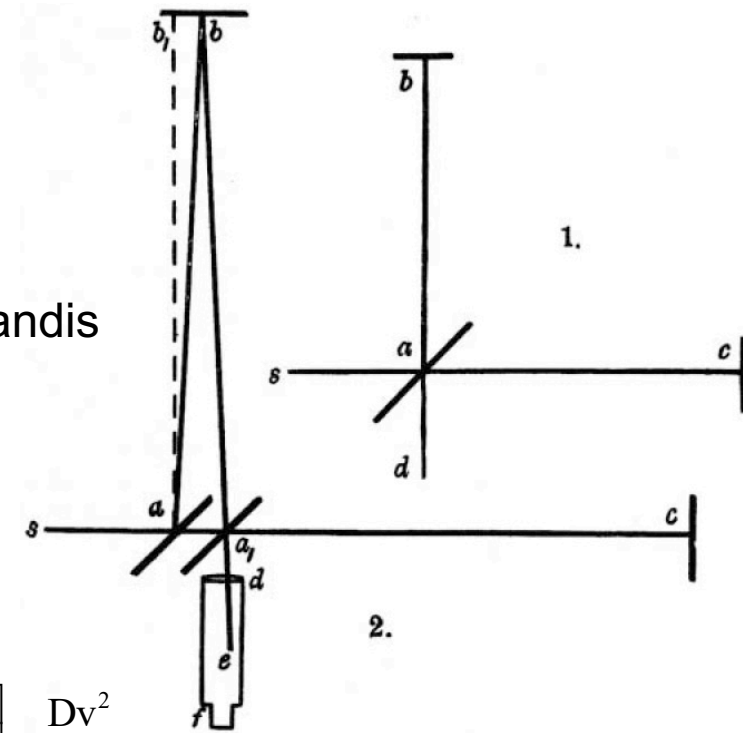
- Avec un miroir fixe et un amovible, le déplacement du miroir par une distance  $x$  correspond à une différence de chemin  $\Delta x=2x$ , donc l'intensité est:  $I_d \propto I_s[1 + \cos(4\pi x/\lambda)] = I_s[1 + \cos(400\pi x\sigma)]$



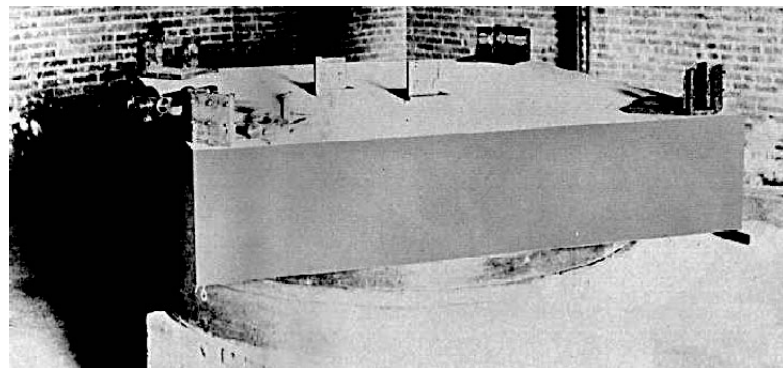
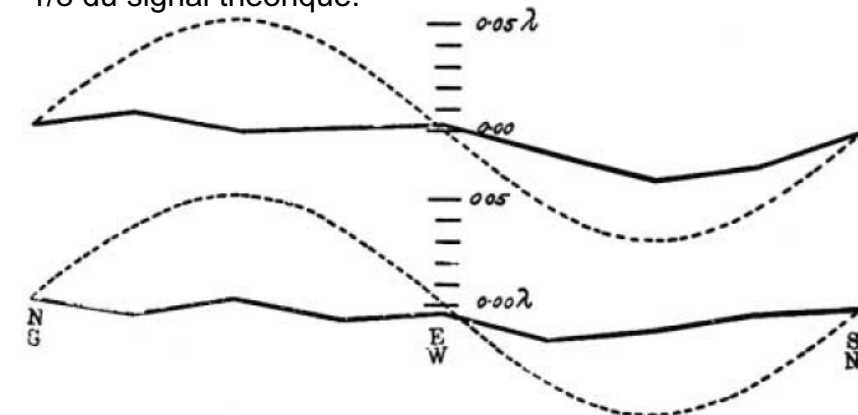
# Bonus: L'expérience de Michelson-Morley (1887):

ART. XXXVI.—*On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*; by ALBERT A. MICHELSON and EDWARD W. MORLEY.\*

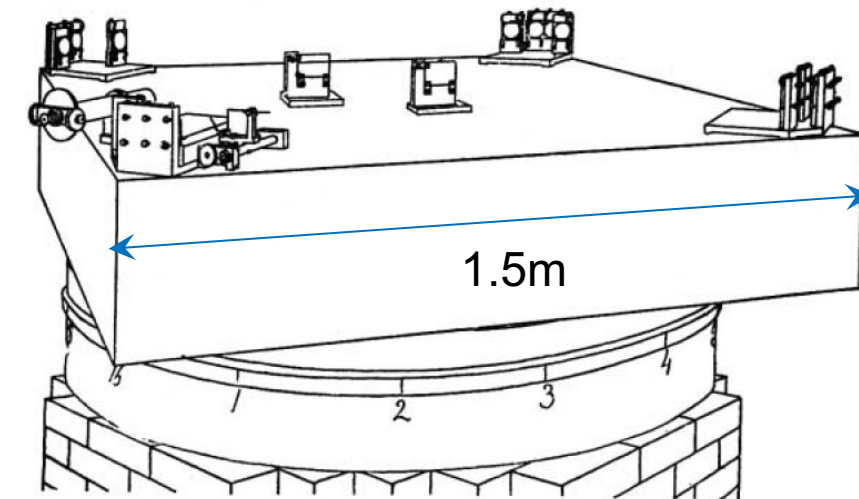
- Le but: détecter si la lumière est transporté par un milieu ("ether") invisible fixe, tandis que la terre tourne autour du soleil à une vitesse linéaire de 30 km/s.
- Le chemin optique  $aca_1$  est:  $L_1 = c \left( \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c-v} \right) = \frac{2Dc}{c^2 - v^2} \approx 2D \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$
- Le chemin optique  $aba_1$  est:  $L_2 = 2 \sqrt{D^2 + \left( \frac{vD}{c} \right)^2} \approx 2D \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$
- La différence entre les chemins optiques  $aba_1$  et  $aca_1$  est:  $\Delta L = 2D \left[ \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] = \frac{Dv^2}{c^2}$
- En tournant le système de  $90^\circ$ , on double la différence:  $2\Delta L = 2D \left( \frac{v}{c} \right)^2 \approx 0.4\lambda$  ( $D=11m$ )
- Le résultat de l'expérience: moins de 1/30 du signal théorique!



1/8 du signal théorique:

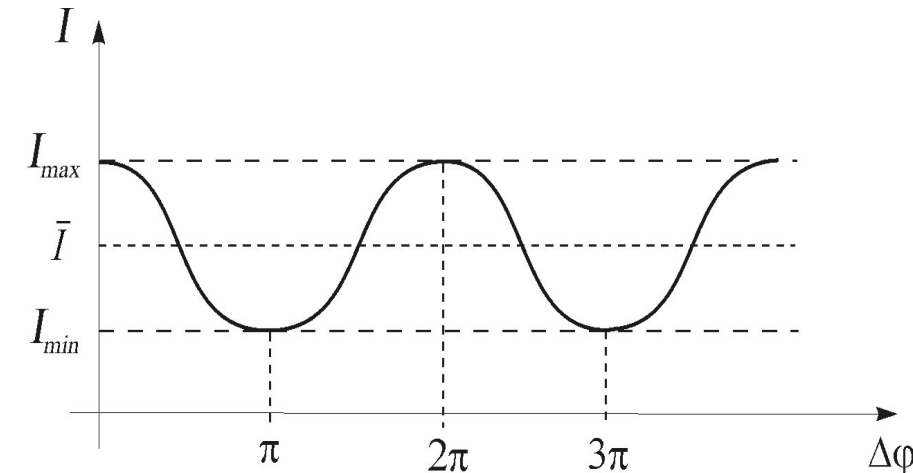
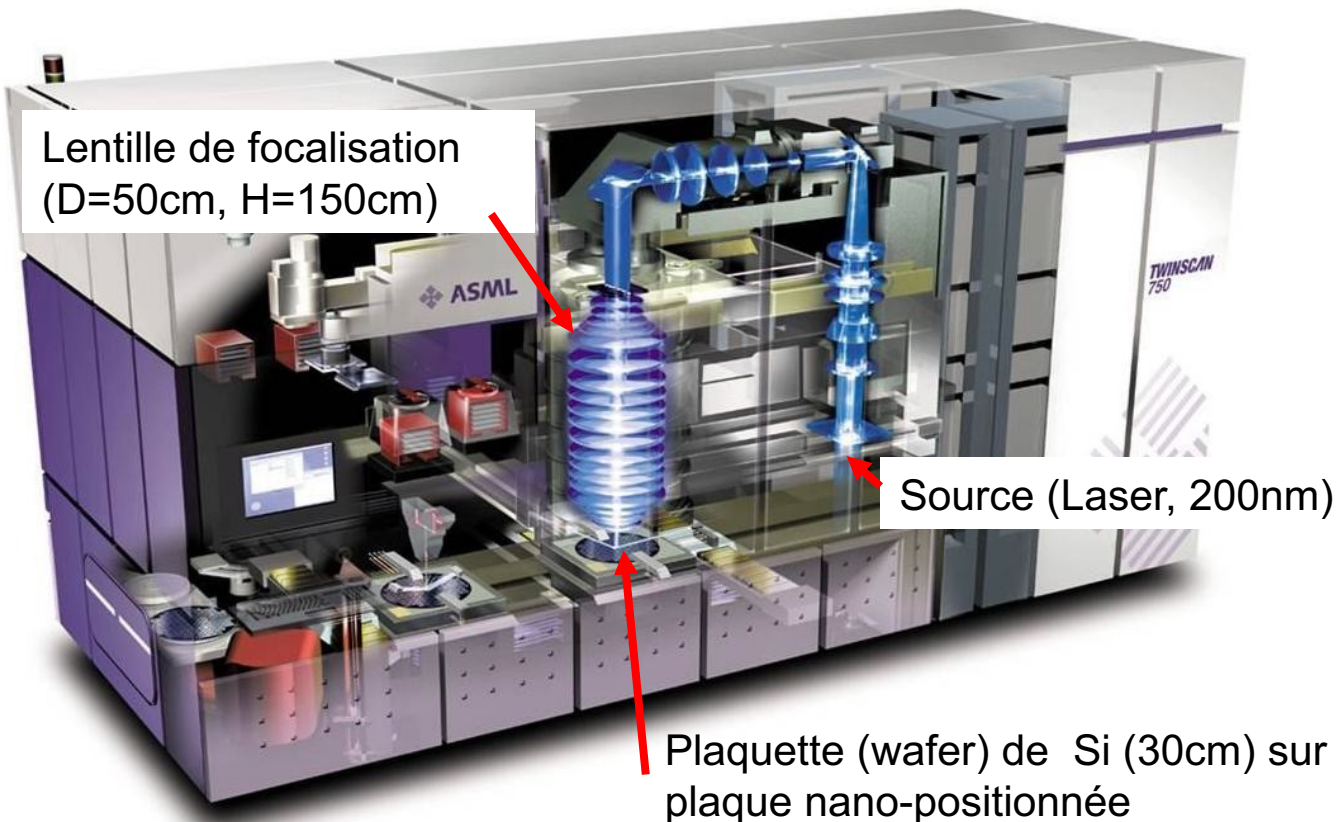
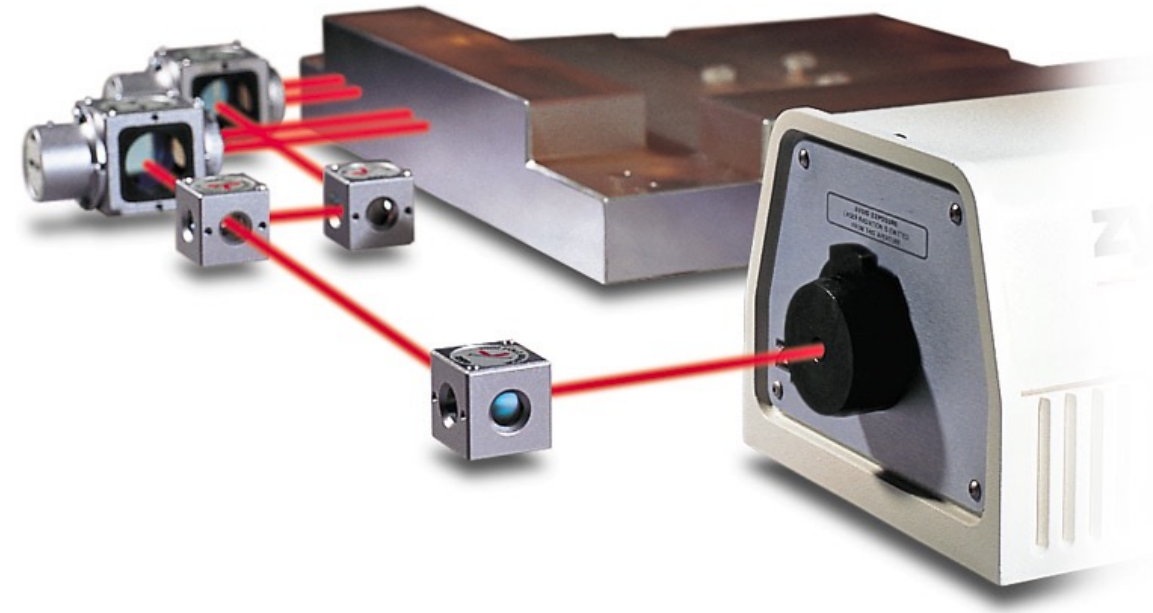


[https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley_experiment)



# L'interféromètre laser pour le nano-positionnement des plaquettes

- Un système d'exposition des plaquettes de Si pour la micro-électronique, l'**aligneur des masques**
- On utilise un laser HeNe ( $\lambda=633\text{nm}$ ), très stable, dans un interféromètre de Michelson.
- L'interpolation numérique du signal d'interférence permet une résolution de  $\lambda/1024 = 0.6 \text{ nm}$

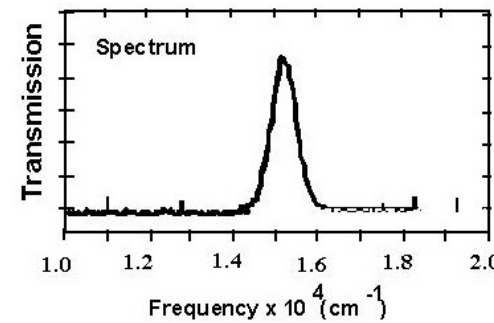
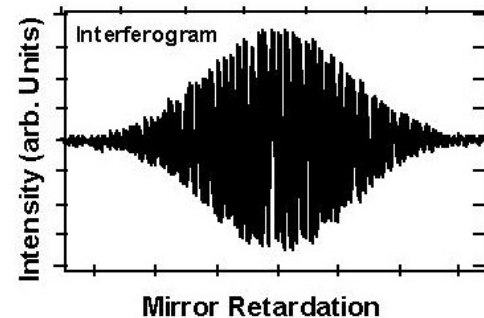
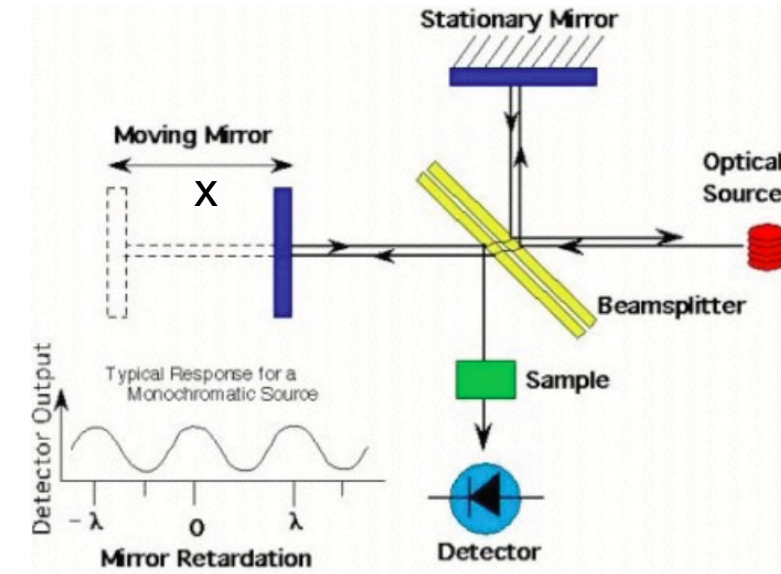
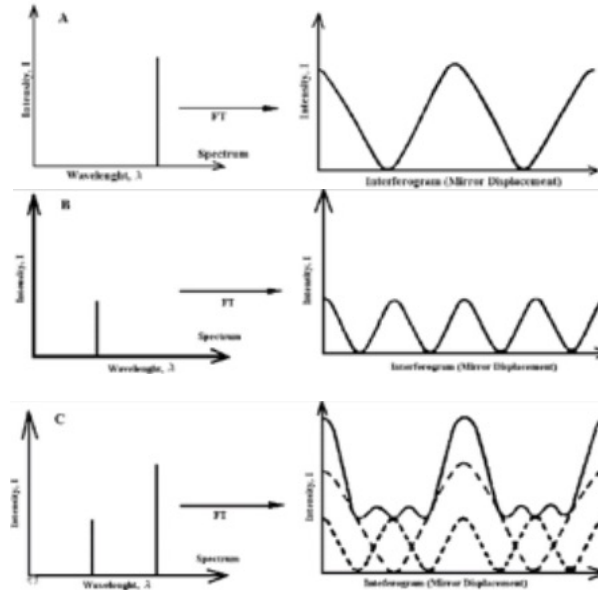




# FT-IR: Spectroscopie avec l'interféromètre de Michelson

## Principes de l'opération:

- Pour une fréquence optique unique  $\sigma_1$ , l'interférence donne:  $I_d(x) = I_s(\sigma_1)\cos(400\pi\sigma_1x)$
- Pour une autre fréquence  $\sigma_2$ :  
 $I_d(x) = I_s(\sigma_2)\cos(400\pi\sigma_2x)$
- Pour la somme de deux fréquences, il n'y a pas d'interférence croisée, donc:  $I_d(x) = I_s(\sigma_1)\cos(400\pi\sigma_1x) + I_s(\sigma_2)\cos(400\pi\sigma_2x)$
- Pour plusieurs fréquences (spectre de lumière): l'interférogramme  $I_s(\sigma)$  est:  $I_d(x) = \sum_j I_s(\sigma_j)\cos(400\pi\sigma_jx) = \mathcal{F}(I_s(\sigma))$ , c'est la transformée de Fourier du spectre.
- On peut retrouver facilement le spectre d'origine par la transformée inverse:  $I_s(\sigma) = \mathcal{F}^{-1}(I_d(x))$
- Rappelle:  $\sigma(\text{cm}^{-1}) = \frac{1}{100\lambda(\mu\text{m})}$  ( $\lambda=1\mu\text{m}$  correspond à  $\sigma=10^4\text{cm}^{-1}$ )

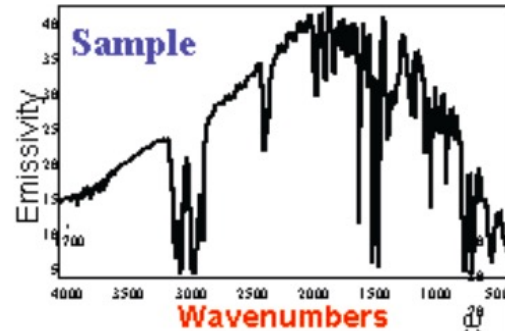
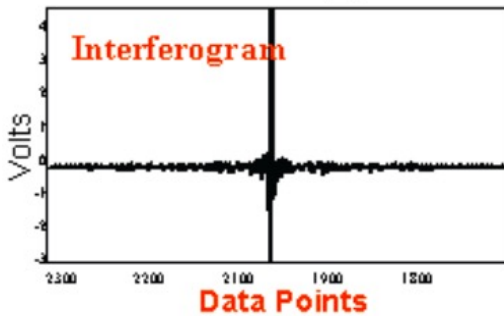




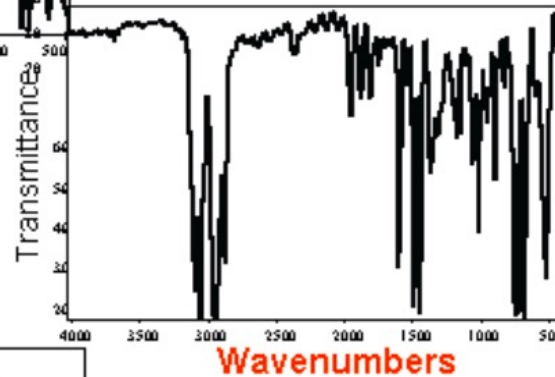
# FT-IR: Utilisation en (bio)chimie

D'habitude, on utilise une lampe pour produire un large spectre dans l'IR (1-10  $\mu\text{m}$ ) et on met l'échantillon devant le détecteur. En comparant les spectres avec et sans échantillon, on obtient le spectre d'absorption de l'échantillon, qui permet d'identifier sa composition chimique

**Sample: Fourier Transform**

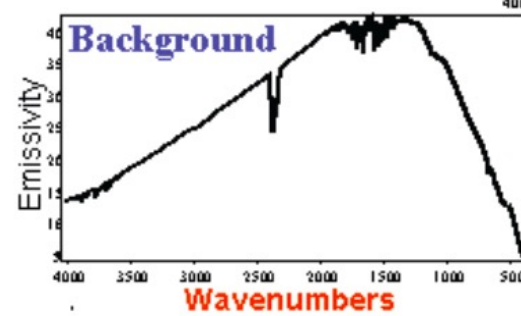
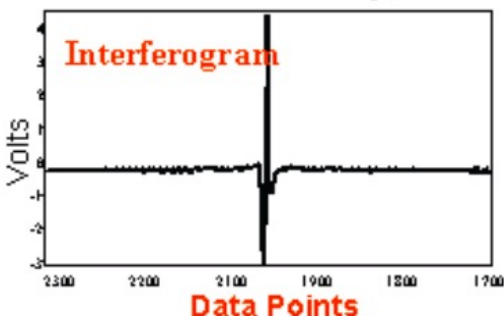


**Spectrum**



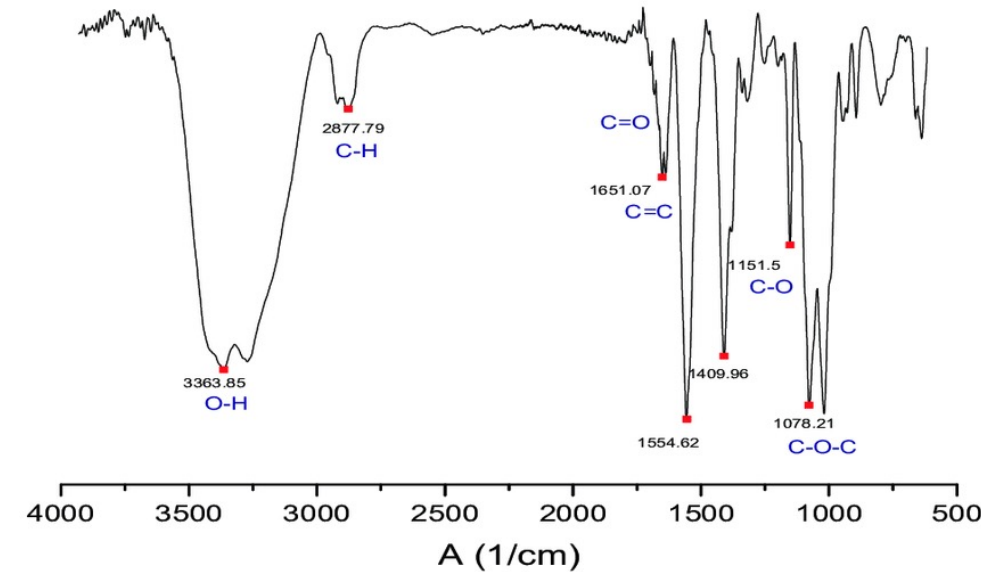
**Ratio**

**Background: Fourier Transform**

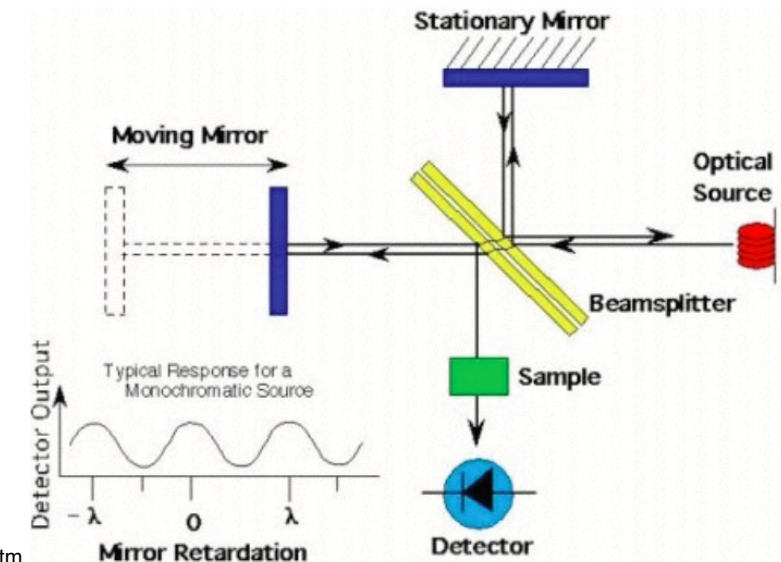


<https://www.researchgate.net/publication/328323626/figure/fig1/AS:682529958920201@1539739231843/Fourier-transform-infrared-spectroscopy-FTIR-spectrum-of-the-graphene-oxide-GO.png>

<http://www.ece.ucdavis.edu/misl/Web/Pages/LSMweb/FTtran99.htm>



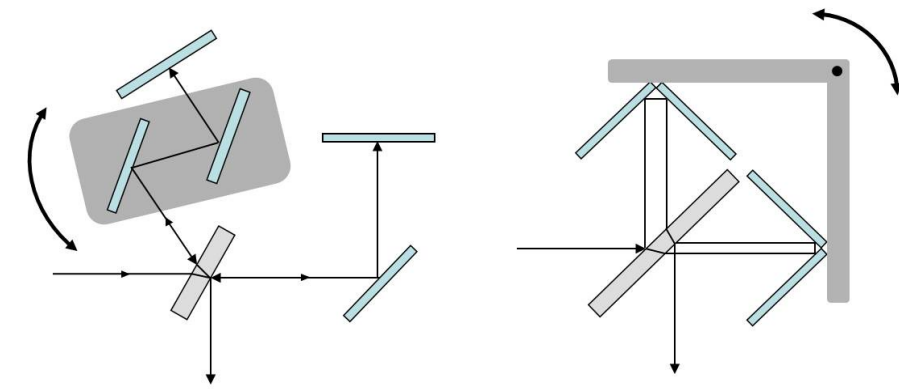
Lignes d'absorption des différents liens moléculaires, déterminées par FTIR



# FTIR: Résolution spectrale

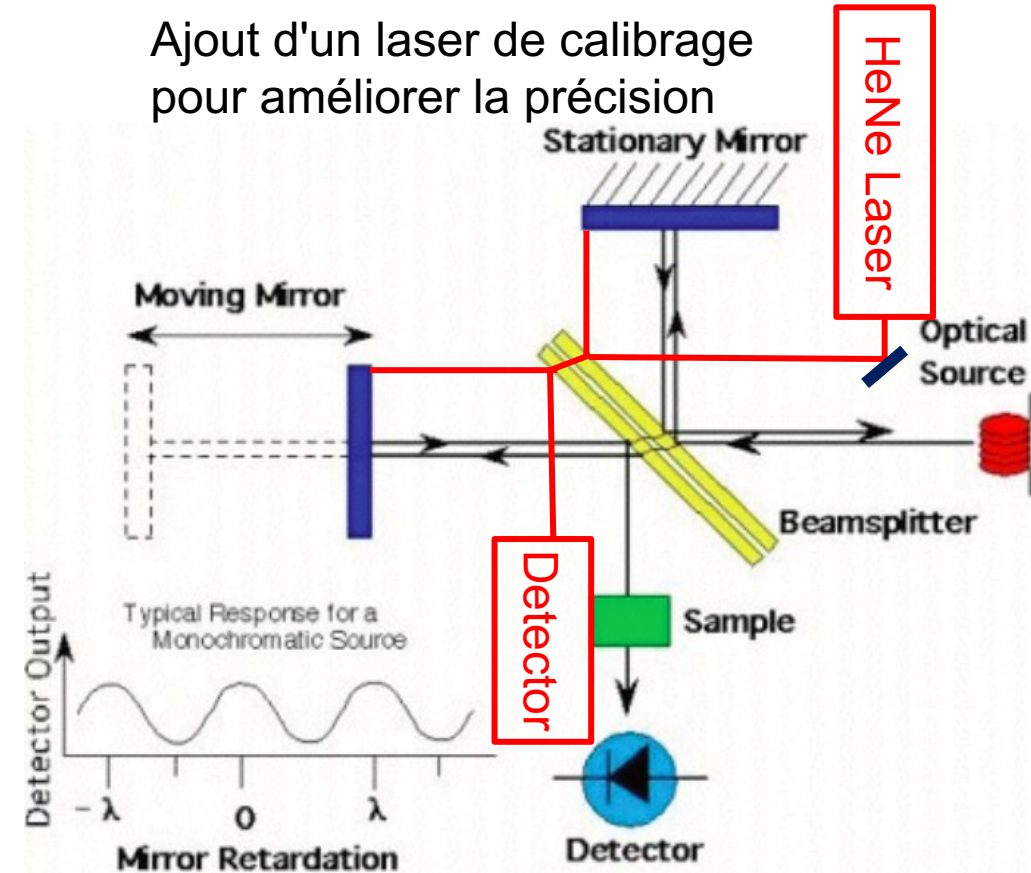
- Le spectre (Intensité en fonction de la fréquence  $\sigma = 1/\lambda$ ) est calculé par la transformée de Fourier numérique (FFT) de la figure d'interférence (Intensité en fonction de la distance). Si le miroir a un déplacement total de  $x_{\max}$  et une résolution de  $\Delta x$ , l'appareil aura les caractéristiques suivantes:
- La fréquence maximale mesurable est:  $\sigma_{\max} \propto \frac{1}{\Delta x}$ .
- La résolution en fréquence est :  $\Delta\sigma \propto \frac{1}{x_{\max}}$ .
- La résolution est définie comme:  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2 \Delta\sigma} \propto \frac{x_{\max}}{\lambda}$ .
- Des valeurs typiques à  $\lambda=1\mu\text{m}$ :
 

$x_{\max}$	$\lambda/\Delta\lambda$	$\Delta\lambda(\text{nm})$
1mm	$10^3$	1
1cm	$10^4$	0.1
10cm	$10^5$	0.01
- Souvent, une résolution de 0.1 nm est suffisante pour identifier les lignes spectrales des molécules.
- Ce spectromètre est très rapide (un mouvement du miroir suffit).
- Pour améliorer la stabilité, des structures intégrant les miroirs sont utilisées.
- On peut aussi ajouter un laser de fréquence connue pour calibrage du mouvement des miroirs.



Structure alternative des miroirs pour améliorer la stabilité

Ajout d'un laser de calibration pour améliorer la précision



# Appareils FTIR typiques

Il y a typiquement des appareils pour mesurer l'absorption dans les solutions pour la chimie, et des appareils portatifs qui peuvent mesurer des liquides, poudres, etc. pour l'identification forensique

Spectrophotomètre (mesure d'absorption) FTIR



[https://www.bruker.com/fileadmin/\\_processed\\_/csm\\_Bruker-Optics\\_FTIR-Spectrometer-INVENIO-S\\_Touch-Display\\_Platinum-ATR\\_Kachel\\_d9fc2bdbea.jpg](https://www.bruker.com/fileadmin/_processed_/csm_Bruker-Optics_FTIR-Spectrometer-INVENIO-S_Touch-Display_Platinum-ATR_Kachel_d9fc2bdbea.jpg)

Spectrophotomètre FTIR portatif



<https://www.thermofisher.com/TFS-Assets/CAD/product-images/F202194.jpg-650.jpg>

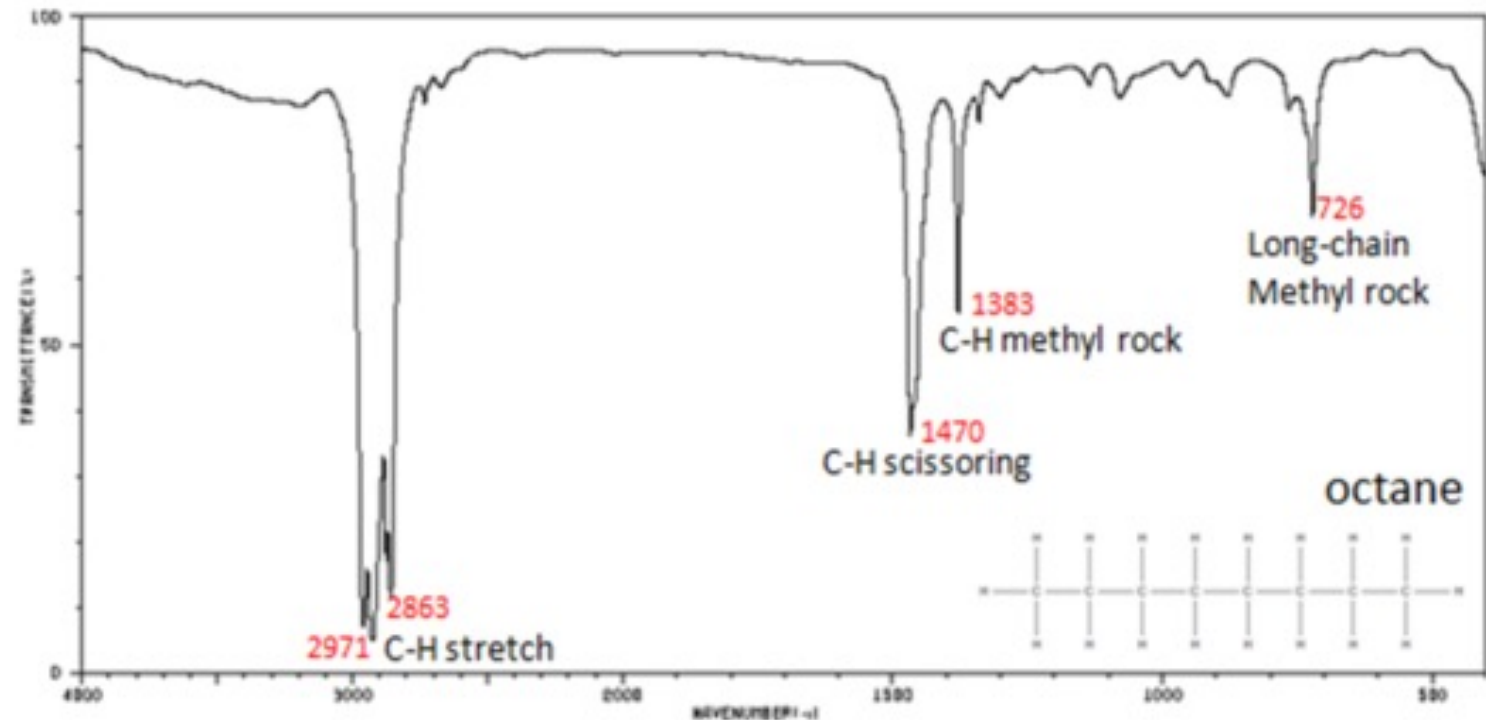
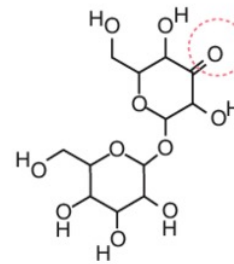
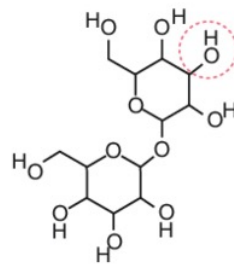
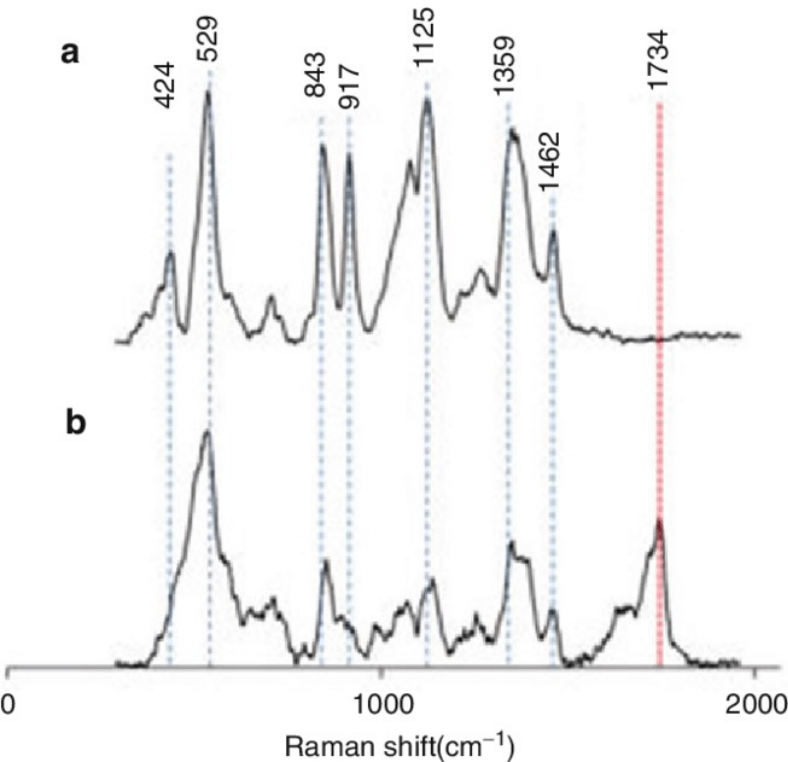
# Applications typiques de la spectroscopie FTIR

En (bio)chimie:

- Identification des molécules.
- Caractérisation des réactions chimiques.

En science forensique (police, douane):

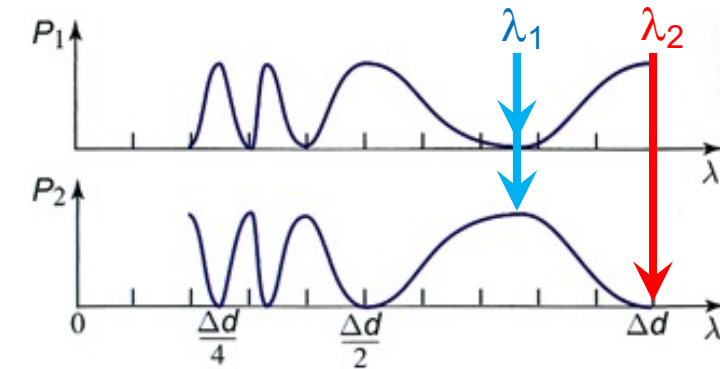
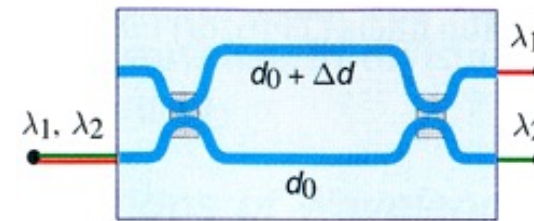
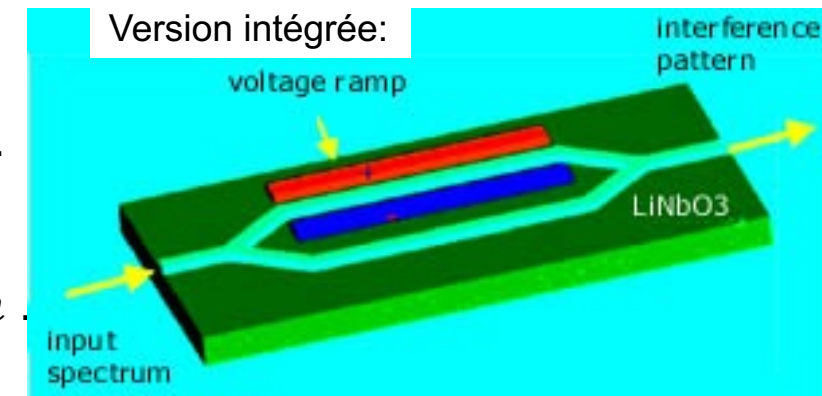
- Identification rapide et précise des drogues, explosives et autres substances, même en petites quantités et en présence d'autres substances



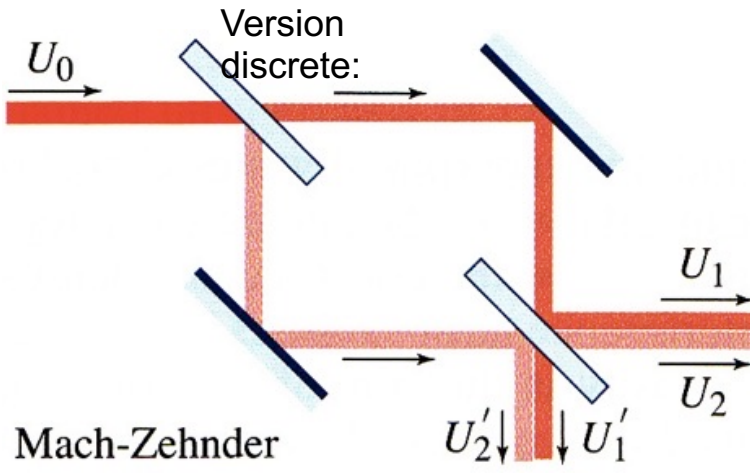
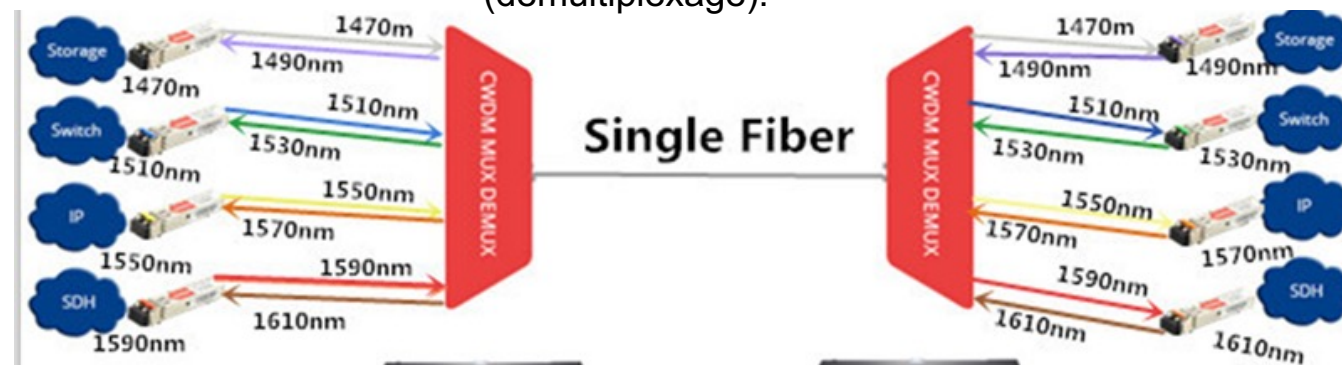


# L'interféromètres de Mach-Zehnder

- La version intégrée est composée des guides d'ondes et des coupleurs planes.
- Utilisation principale: filtre (séparation des fréquences):
- Si on veut  $I_{\max}$  pour  $\lambda_1$ , la différence du chemin doit être:  $k_1 \Delta d = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta d = 2\pi m$ .
- Si on veut  $I_{\min}$  pour  $\lambda_2$ , on a :  $k_2 \Delta d = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Delta d = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right)$ .
- Le résultat:  $\Delta d = m\lambda_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$ , ou:  $\lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)\lambda_2$ , ce qui donne:  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_2} = \frac{1}{2m}$ .
- En télécom: standard de transmission autour de  $\lambda = 1.3$  et  $1.55 \mu\text{m}$ , WDM = multiplexage de plusieurs longueurs d'onde espacées de 20 nm dans une fibre. Cette séparation demande donc:  $m=40$ .



Cascade de filtres (démultiplexage):

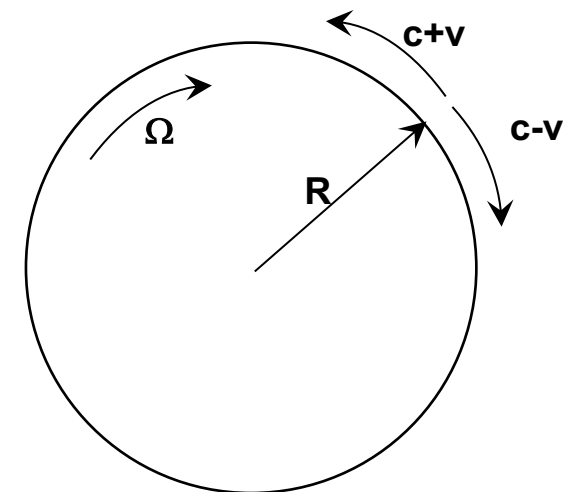
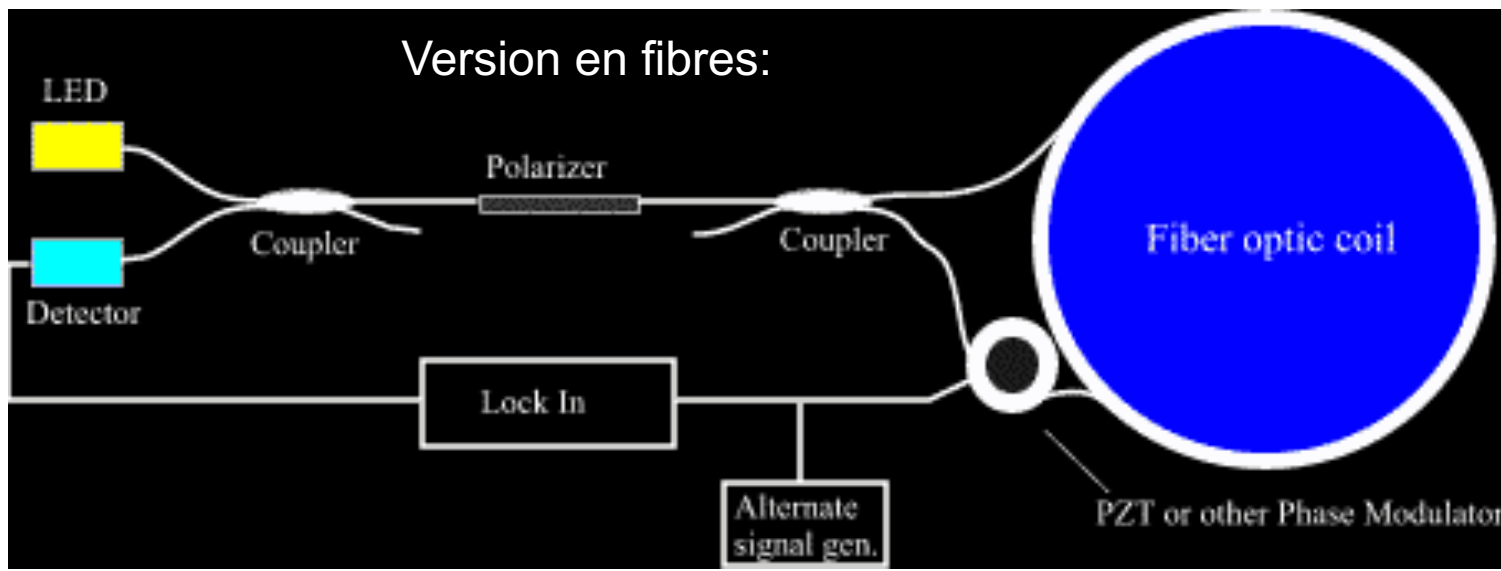
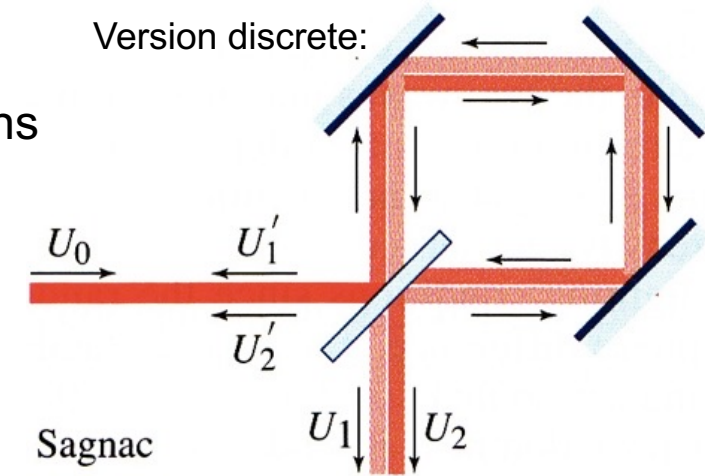


# Interféromètres de Sagnac (1913)

- On crée l'interférence entre deux faisceaux qui tournent dans un sens opposé dans une "cavité" formée des miroirs. Le système tourne avec une vitesse angulaire  $\Omega$ .
- La différence de temps de parcours entre les deux faisceaux (calcul classique) pour un chemin circulaire (on a la même pour un chemin carré):

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{c - R\Omega} - \frac{2\pi R}{c + R\Omega} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 - (R\Omega)^2} \approx \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2} = \frac{4A\Omega}{c^2}$$

- La différence de phase est donc:  $\Delta\phi = \frac{2\pi c}{\lambda} \Delta t = 2\pi \frac{4A\Omega}{\lambda c}$  ( $A$ =surface de l'interféromètre)
- La version moderne: gyroscope à fibre
- Pour une longueur de fibre de 1 km (en plusieurs tours), on peut mesurer une rotation de 0.1 °/hr. Il faut une bonne stabilisation de la température!



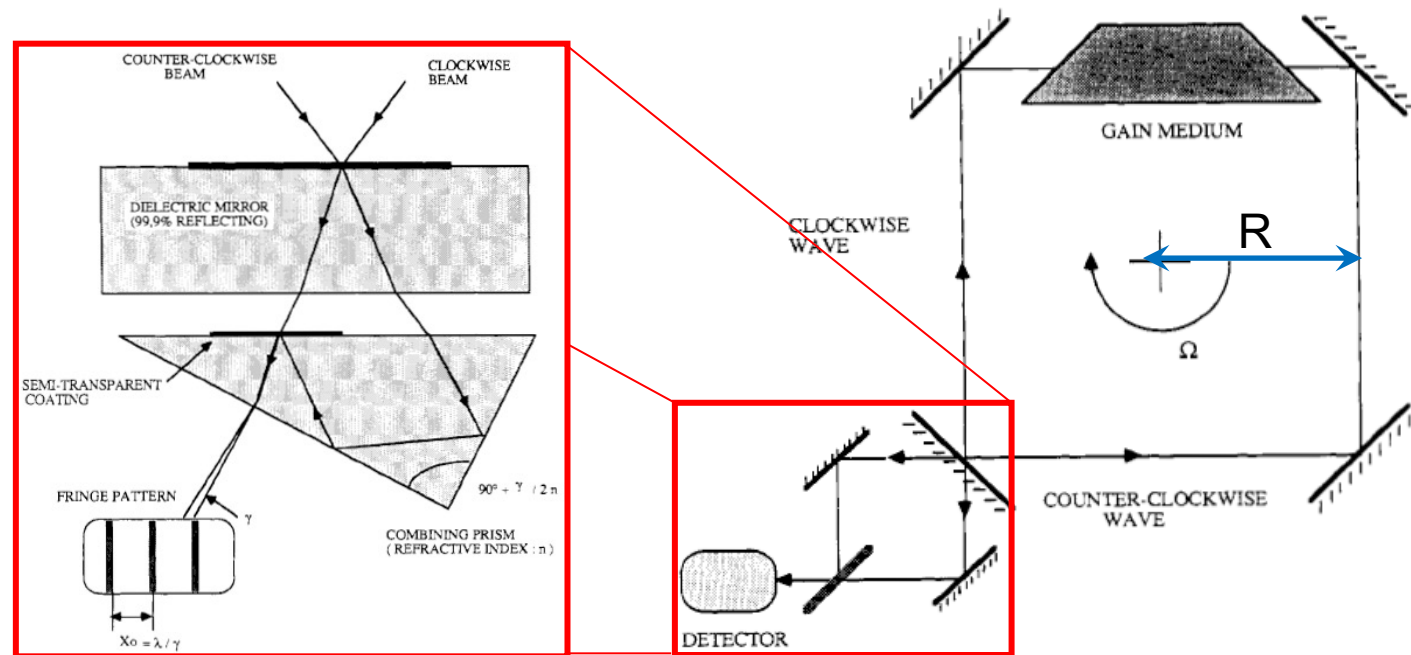
# Bonus: Le gyroscope-laser

- C'est un laser dont la cavité est un interféromètre du Sagnac, avec une longueur de parcours totale  $=L$ .
- Le laser produit une fréquence qui satisfait la condition de résonance dans la cavité, c.à.d. que la phase accumulée en circulant l'interféromètre doit être:  $Lk = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{L\omega}{c} = 2\pi m$  (typiquement  $m=L/\lambda \approx 10^5-10^6$ ).
- La différence de vitesse des faisceaux cause une différence de leurs **fréquences**:  $\omega_1 = \frac{2\pi m}{L}(c + R\Omega)$ ,  $\omega_2 = \frac{2\pi m}{L}(c - R\Omega)$ ; donc:  $\Delta\omega = 4\pi m \frac{R}{L}\Omega$ , ou:  $\Delta f = 2m \frac{R}{L}\Omega = \frac{2R}{\lambda}\Omega$ .
- Il est facile de mesurer des petites  $\Delta\omega$ . Pour  $R=0.1$  m, on peut mesurer une rotation de 0.01 °/hr.
- Utilisation: dans les avions

Gyroscope d'avion, 3 axes



[https://i.kinja-img.com/gawker-media/image/upload/c\\_fit,f\\_auto,fl\\_progressive,q\\_80,w\\_470/girka2ljae6givozeqlid.jpg](https://i.kinja-img.com/gawker-media/image/upload/c_fit,f_auto,fl_progressive,q_80,w_470/girka2ljae6givozeqlid.jpg)





# Interférence d'un grand nombre des faisceaux

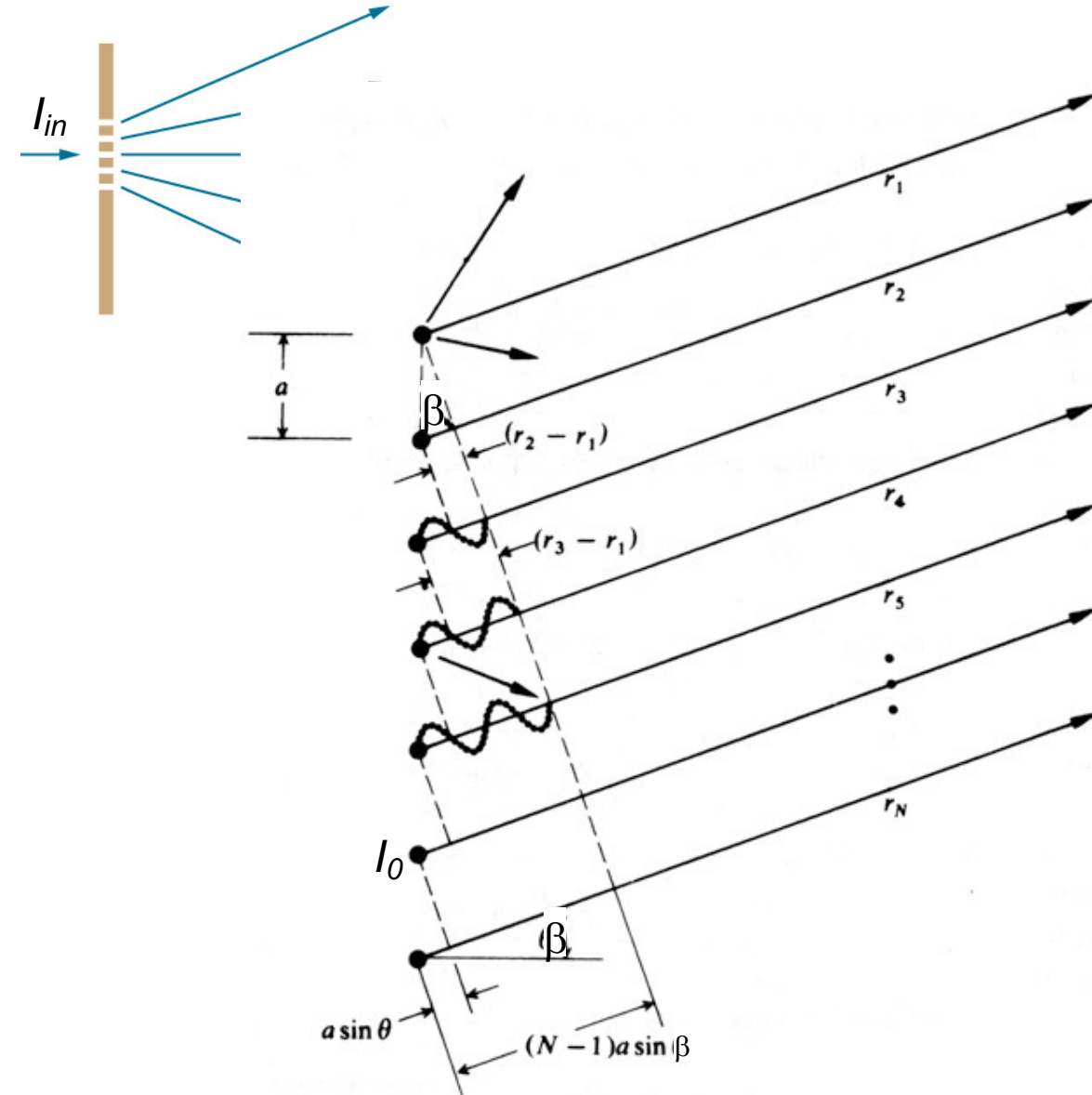
## Le réseau de diffraction (transmission, incidence normale): analyse

- Un modèle simple: réseau de transmission, illuminé par une onde plane = ensemble de  $N$  sources identiques, séparés par une distance  $a$ ; **chacune** émet un champ:  $E = \varepsilon_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ , avec:  $\varepsilon_0 = \sqrt{2I_0} = \sqrt{2I_{in}/N}$ .
- Les faisceaux qui partent dans un angle  $\beta$  ont un déphasage de plus en plus grand. Entre deux faisceau successifs, il y a:  $\Delta\varphi = k\Delta r = ka \sin \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \beta$ , et le faisceau  $j$  a un déphasage de:  $\Delta\varphi_j = (j - 1)\Delta\varphi$  par rapport au premier ( $j=1$ ).
- L'intensité total est (le moyennage temporel donne  $1/2$ ):

$$I(\beta) = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_0 e^{i\varphi_j} \right|^2 = I_0 \left| \sum_{j=1}^N e^{i\Delta\varphi(j-1)} \right|^2 =$$

$$I_0 \left| \frac{1 - e^{i\Delta\varphi N}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} \right|^2 = I_0 \left| \frac{e^{i\Delta\varphi N/2} (e^{-i\Delta\varphi N/2} - e^{i\Delta\varphi N/2})}{e^{i\Delta\varphi/2} (e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2})} \right|^2 =$$

$$I_0 \left| \frac{-2i \sin \Delta\varphi N/2}{-2i \sin \Delta\varphi/2} \right|^2 = I_0 \frac{\sin^2 \Delta\varphi N/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2} = \frac{I_{in}}{N} \frac{\sin^2 \Delta\varphi N/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2}.$$





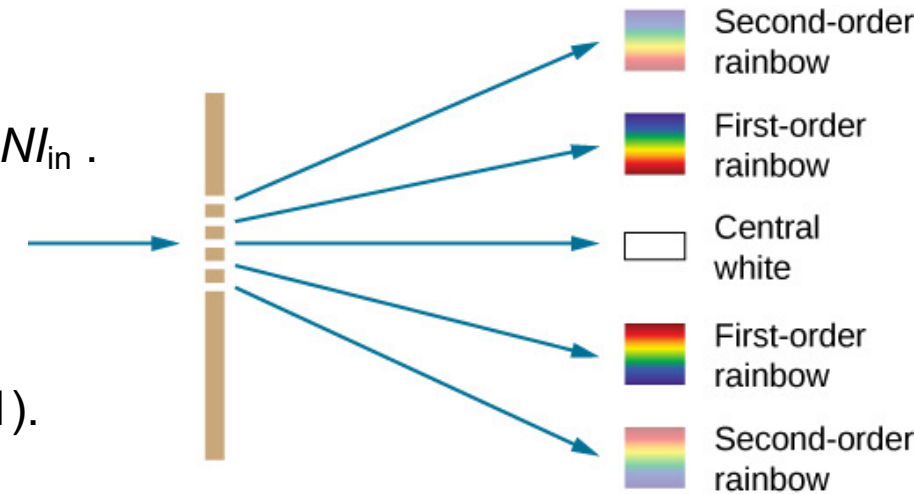
# Le réseau de diffraction (transmission, incidence normale): résultats

- La somme des intensités est:  $I = I_0 \frac{\sin^2 \Delta\varphi N/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2}$ , avec:  $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \beta$ .
- Les grands maxima: quand  $\sin^2 \Delta\varphi/2 = 0$ , donc:  $\Delta\varphi_{\max} = 2m\pi$ .  
 $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  est l' **ordre de diffraction**. L'intensité est:  $I_{\max} = N^2 I_0 = N I_{\text{in}}$ .
- Les minima ( $I=0$ ), quand:  $\sin^2 \Delta\varphi N/2 = 0$ , donc:  $\Delta\varphi_{\min} = 2m'\pi/N$ .
- Les petits maxima, quand:  $\sin^2 \Delta\varphi N/2 = 1$ , donc:  $\Delta\varphi_{\max'} = (2m'+1)\pi/N$ .

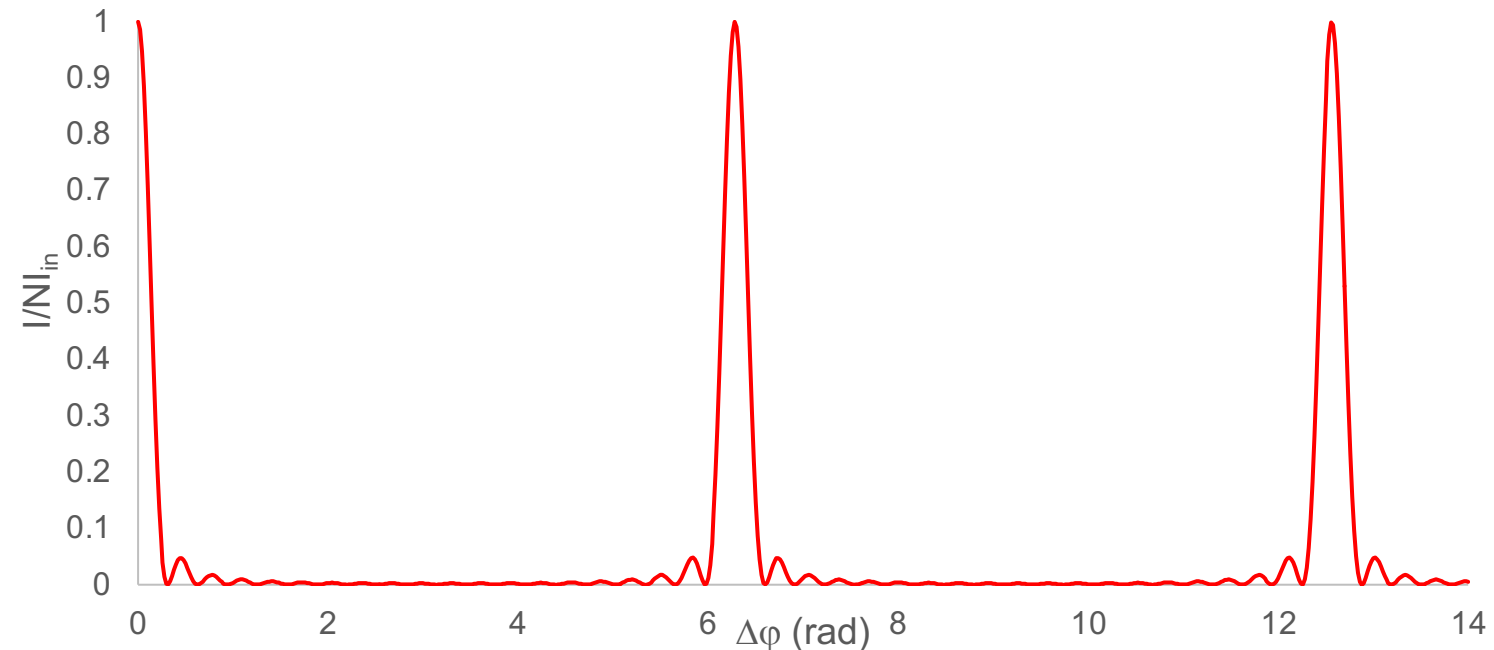
L'intensité est:  $I_{\max'} = \frac{I_0}{\sin^2((2m'+1)\pi/2N)} \approx \frac{4N^2 I_0}{\pi^2 (2m'+1)^2} = \frac{4N I_{\text{in}}}{\pi^2 (2m'+1)^2}$  (si  $N \gg 1$ ).

Le premier petit maximum:  $m' = 1$ ,  $I_{\max'} = 0.045 \cdot I_{\max}$ .

- Les faisceaux sortants sont parallèles, il faut une lentille ou miroir pour les focaliser sur un écran. Avec une distance focale  $L$ , le déplacement du faisceau sur l'écran est:  $y \approx L\beta$ .
- Dans un réseau réel,  $N = 10^5$ ; la fonction  $\sin^2 \Delta\varphi N/2$  est extrêmement étroite!  
le premier zéro est à:  $\Delta\varphi_0 = 2\pi/N \approx 10^{-4}$ .

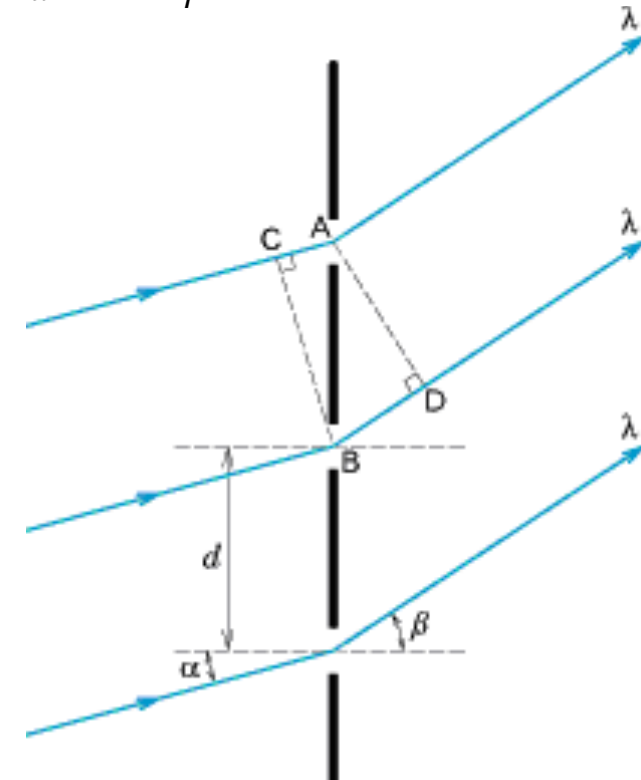
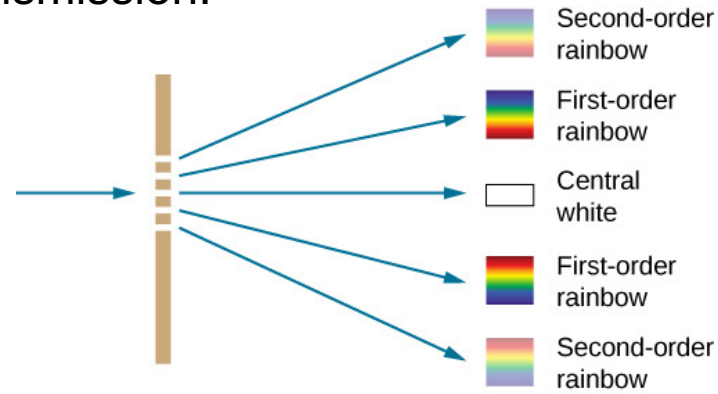


Réseaux de diffraction,  $N=20$



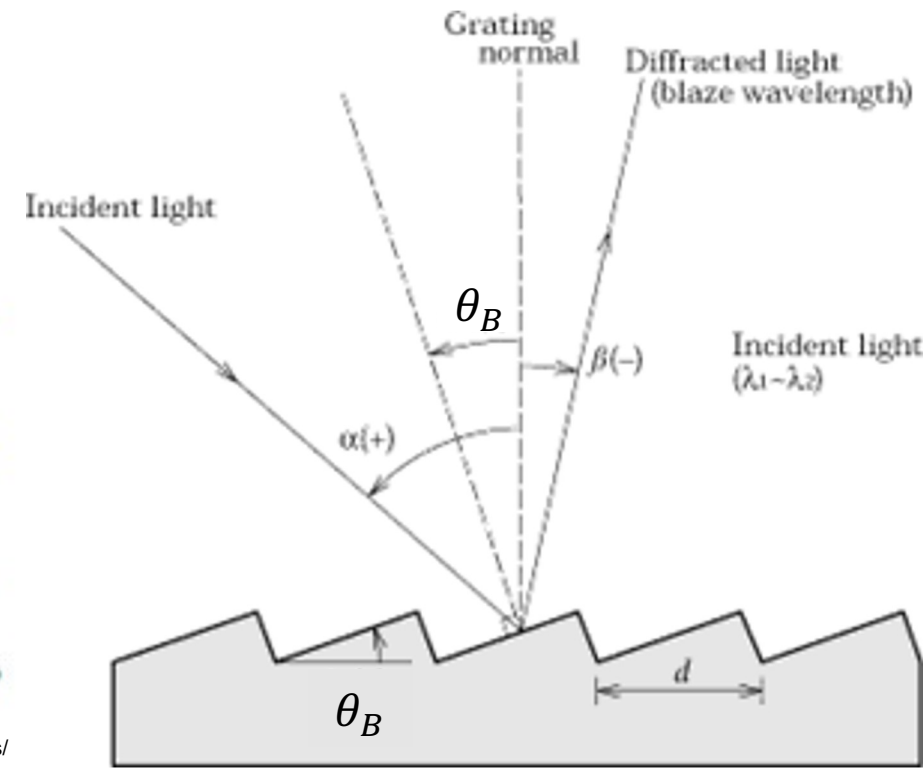
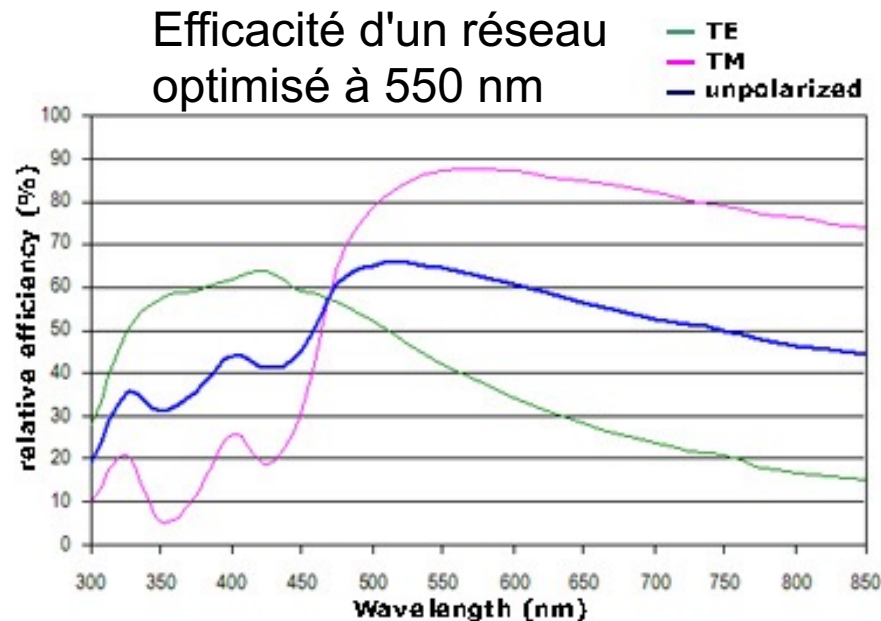
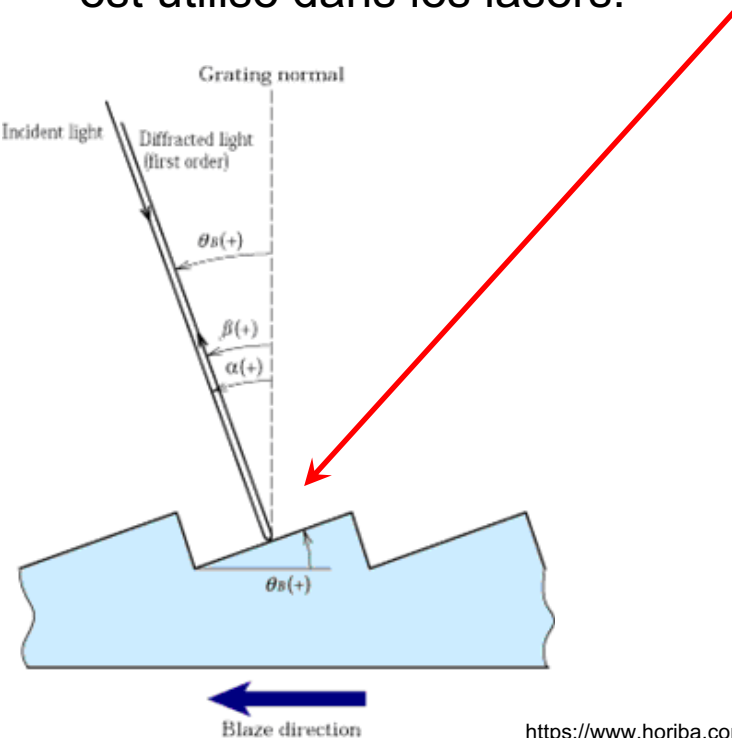
# Le réseau de diffraction (transmission, incidence à un angle $\alpha$ )

- Quand l'onde entrante arrive sur le réseau avec un angle  $\alpha$ , il y a un déphasage supplémentaire avant le réseau:  $\Delta\varphi_{AC} = -\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \alpha$ , qui s'ajoute au déphasage après le réseau:  $\Delta\varphi_{BD} = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \beta$ .
- Le déphasage total devient donc:  $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \beta - \sin \alpha)$ .
- La condition pour les angles des maxima:  $\Delta\varphi_{\max} = 2m\pi$  donne **l'équation du réseau**:  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$ .
- l'intensité des grand maxima reste la même:  $I = N^2 I_0 = N I_{\text{in}}$ .
- La condition pour l'angle des minima:  $\Delta\varphi_{\min} = 2m'\pi/N$  donne maintenant:  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m'\lambda}{aN} = \frac{m'\lambda}{L_r}$  ( $L_r$  = longueur totale du réseau).
- Le désavantage du réseau de transmission est sa mauvaise efficacité, due à:
  - La perte par la partie caché des fentes (Transmission d'env. 50%).
  - L'intensité est divisé entre les modes de diffraction.
- Il y a des réseaux de transmission "holographiques", avec une couche transparente ondulée en place des fentes, pour une meilleure transmission.



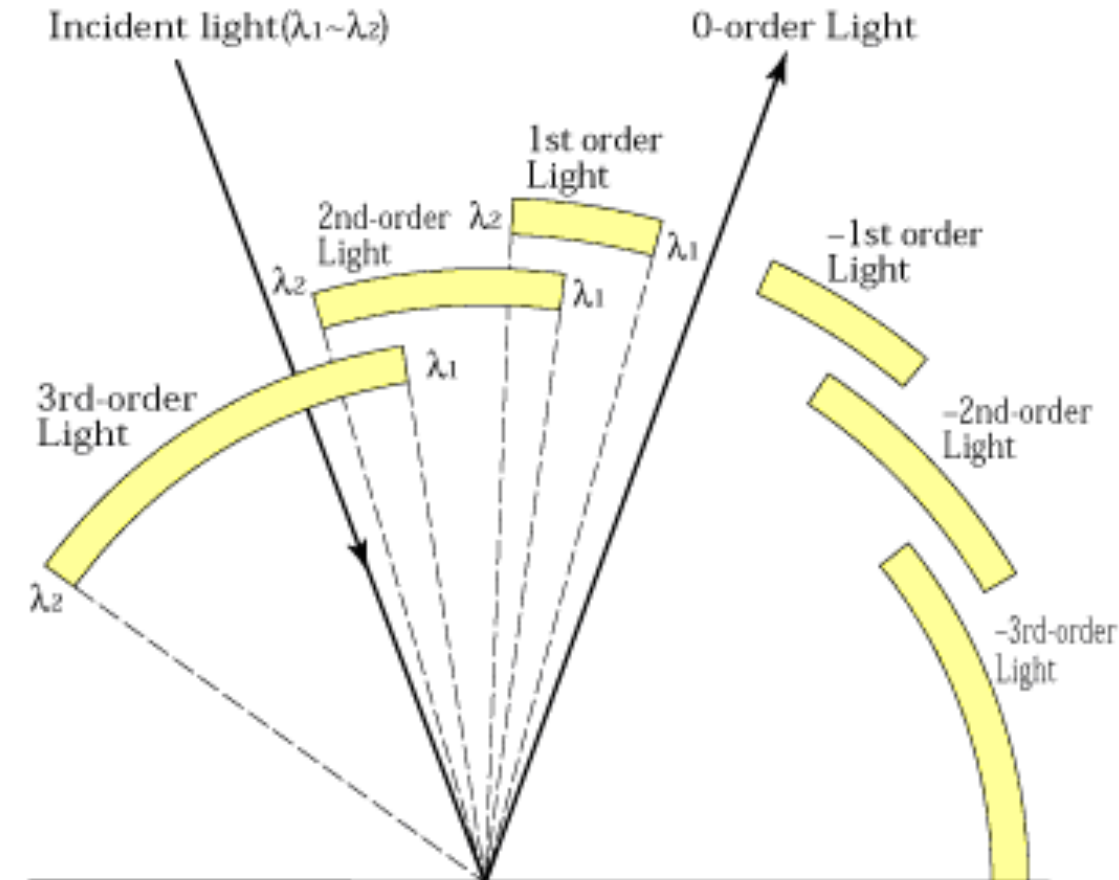
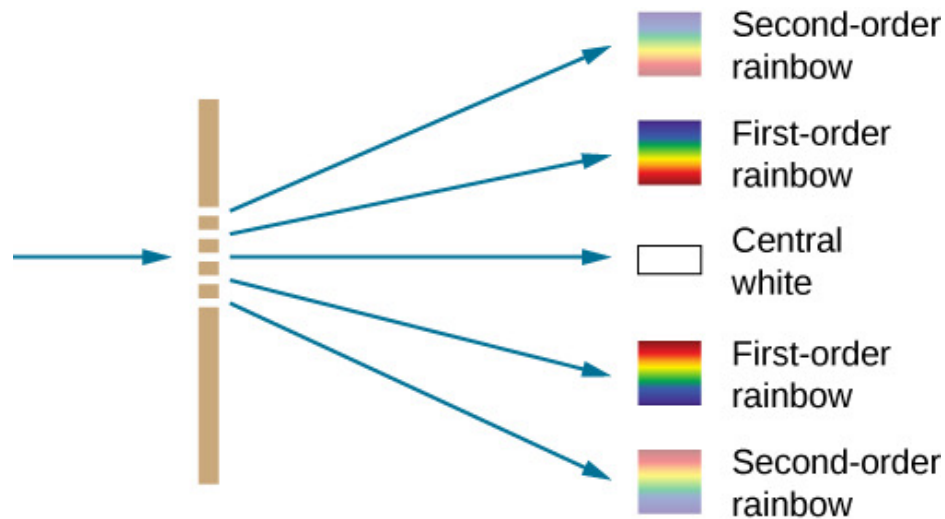
# Le réseau de réflexion, le réseau optimisé ("blazed grating")

- L'utilisation du réseau des miroirs (**réseau de réflexion**) est plus efficace. On peut choisir l'angle des miroirs  $\theta_B$ .  
L'angle des maxima est donné par la même équation du réseau:  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$ .
- La réflexion des miroirs permet de maximiser l'intensité dans un ordre spécifique de diffraction, en satisfaisant simultanément la condition de réflexion de chaque miroir:  $\alpha - \beta = 2\theta_B$ , pour obtenir:  $2\sin \theta_B \cos(\alpha - \theta_B) = \frac{m\lambda_{max}}{a}$ .
- La géométrie du système  $(\alpha, \theta_B)$  détermine la valeur de  $\lambda_{max}$ . Pour d'autres longueurs d'onde, l'intensité diminue.
- Il y a des systèmes spécifiques de réseau à réflexion, comme le réseau de Littrow ( $\alpha = -\beta = \theta_B$ ):  $2\sin \theta_B = \frac{m\lambda}{a}$ , qui est utilisé dans les lasers.



# Réseau de diffraction: Recouvrement des ordres

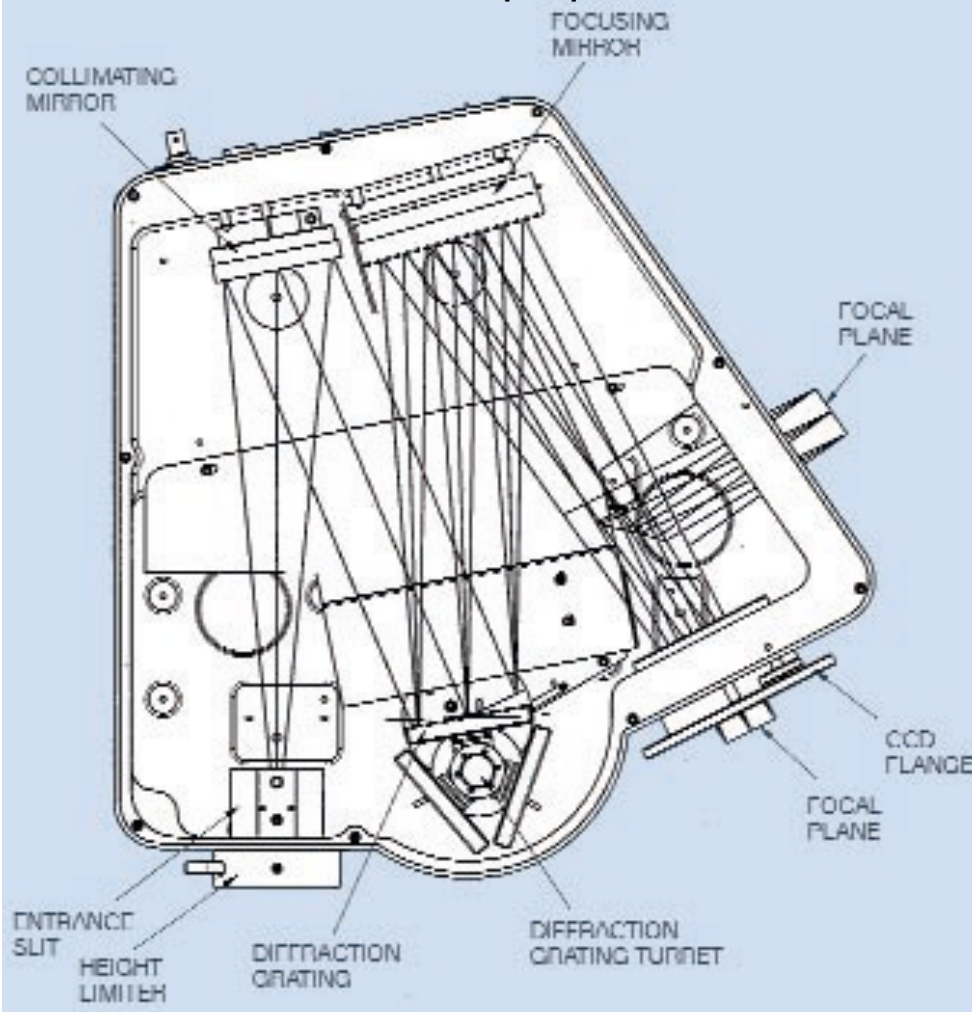
- La formule du réseau:  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$  montre qu'il y a recouvrement partiel entre tous les ordres de diffraction.
- Prenons deux longueurs d'onde:  $\lambda_1$  de l'ordre  $m$  et  $\lambda_2$  de l'ordre  $m+1$ . La lumière est diffractée dans le même angle  $\beta$  si:  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m\lambda_1}{a} = \frac{(m+1)\lambda_2}{a}$ , ou:  $m\lambda_1 = (m+1)\lambda_2$ . La différence est:  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{m} = \frac{\lambda_1}{m+1}$ .
- La moitié du premier ordre est donc couverte par le deuxième ordre, un tiers du deuxième ordre est couvert par le troisième ordre, etc.



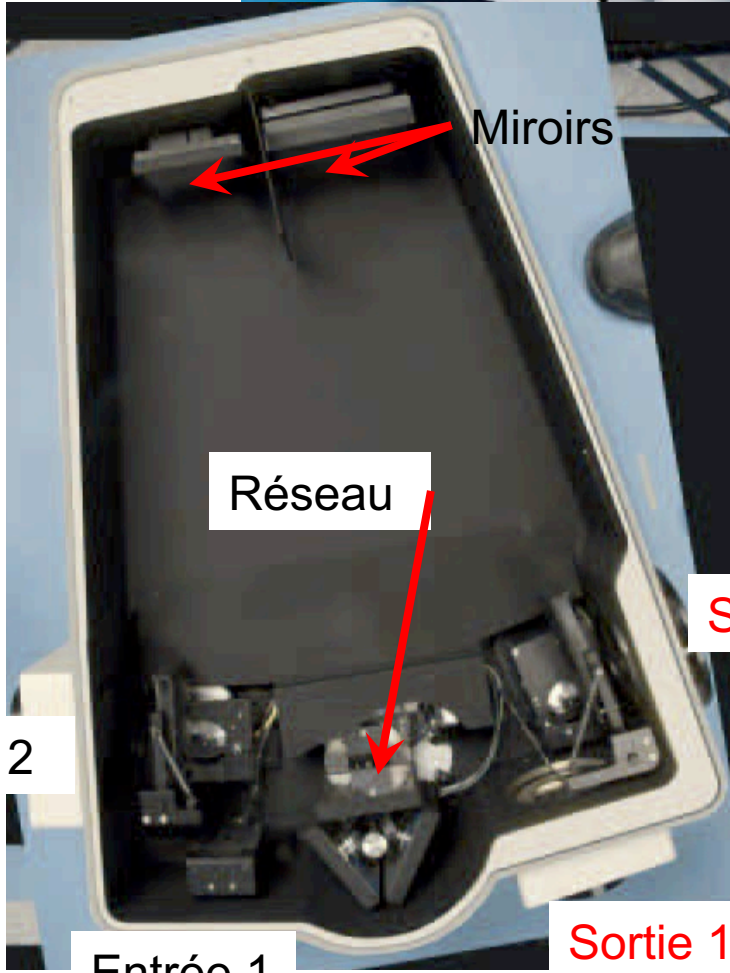


# Le monochromateur/spectrograph à réseau :

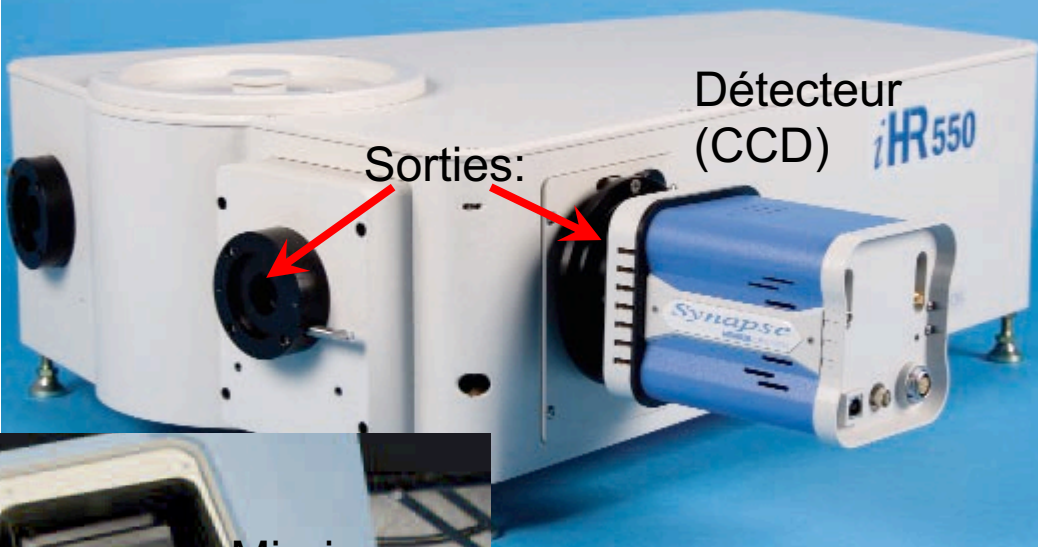
Le chemin optique



Quand on ouvre le capot...

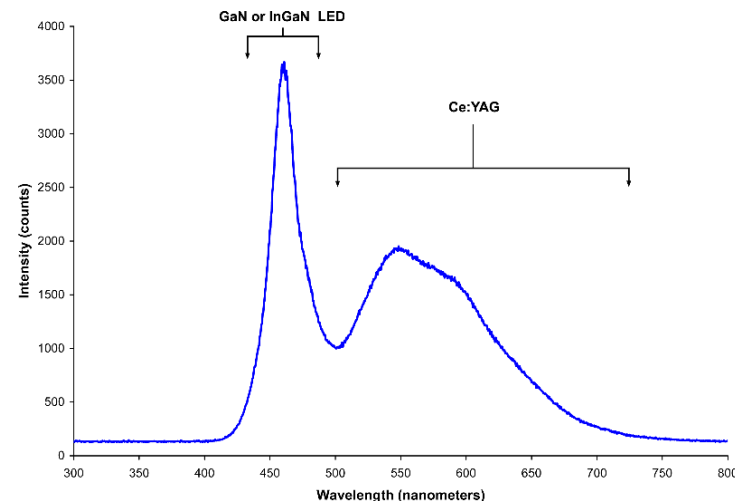


Entrée:



# Utilisation des monochromateurs

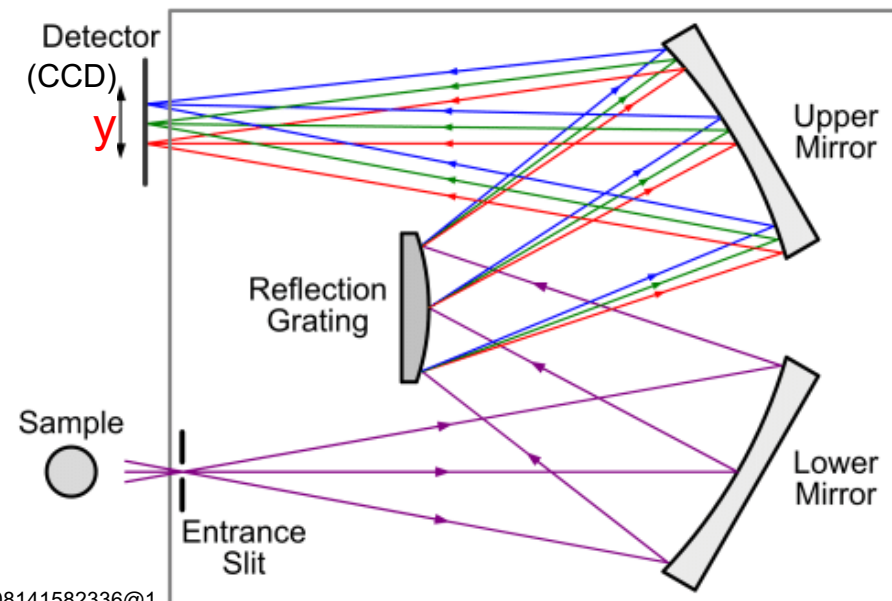
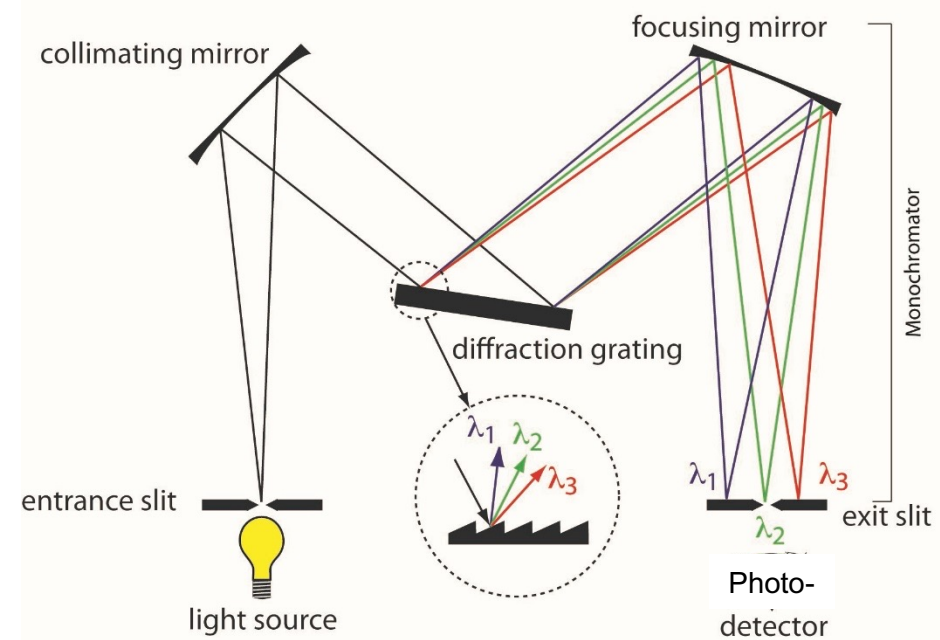
- Comme source de lumière: on filtre la lumière blanche d'une lampe pour obtenir une lumière monochromatique. L'efficacité est faible.
- Pour analyser le spectre d'une source inconnue. Il y a deux types:
  - Spectromètre: Une fente étroite de sortie limite la longueur d'onde qui sort vers un détecteur. Pour mesurer un spectre complet, on tourne le réseau.  $\sin \beta - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$ .
  - Spectrographe: Une caméra (CCD) ou réseau de détecteurs à la sortie enregistre tout le spectre.  $\sin \frac{y}{L} - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$ . Si la taille de la caméra est D, la gamme d'un spectre est:  $\Delta\lambda \approx \frac{aD}{mL}$ . Au-delà de cette gamme, il faut tourner le réseau. Valeurs typiques:  $a=0.83 \mu\text{m}$  (1200 l/mm)  
 $L=550 \text{ mm}$   
 $D=25\text{mm}$   
 $\Delta\lambda=38 \text{ nm}$



[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/White\\_LED.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/White_LED.png)

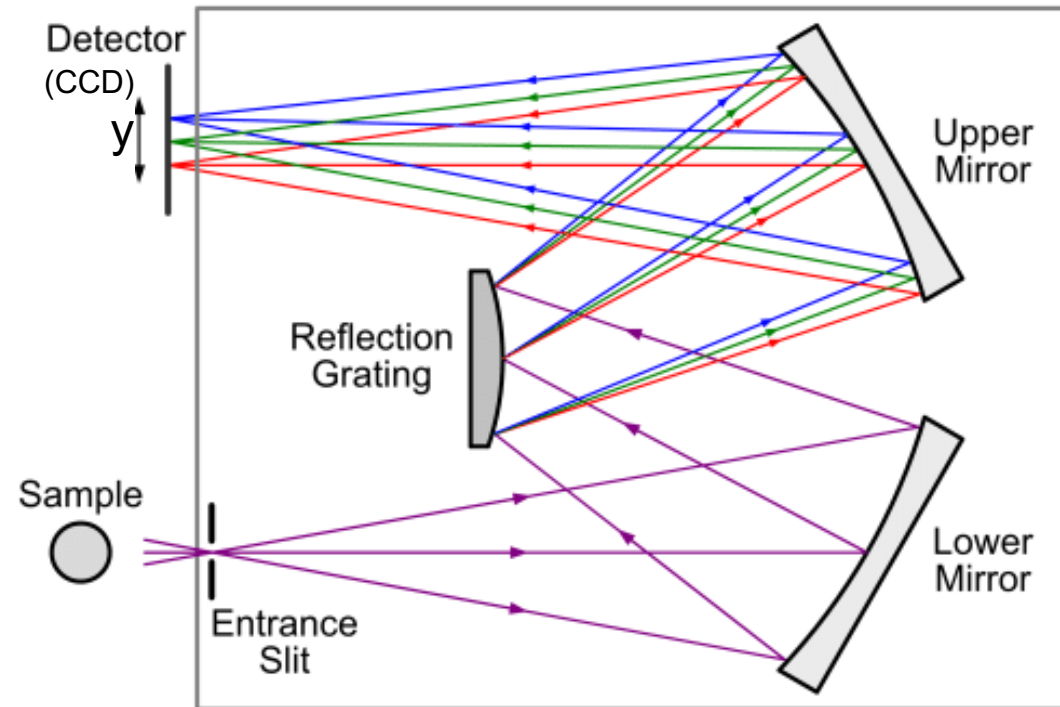
<https://blogs.maryville.edu/aas/wp-content/uploads/sites/1601/2015/04/monochromater.jpg>

[https://www.researchgate.net/profile/Jianwei\\_Qin/publication/312956040/figure/fig1/AS:456608141582336@1485875272925/Wavelength-dispersive-imaging-spectrographs-a-prism-grating-prism-PGP-transmission.png](https://www.researchgate.net/profile/Jianwei_Qin/publication/312956040/figure/fig1/AS:456608141582336@1485875272925/Wavelength-dispersive-imaging-spectrographs-a-prism-grating-prism-PGP-transmission.png)



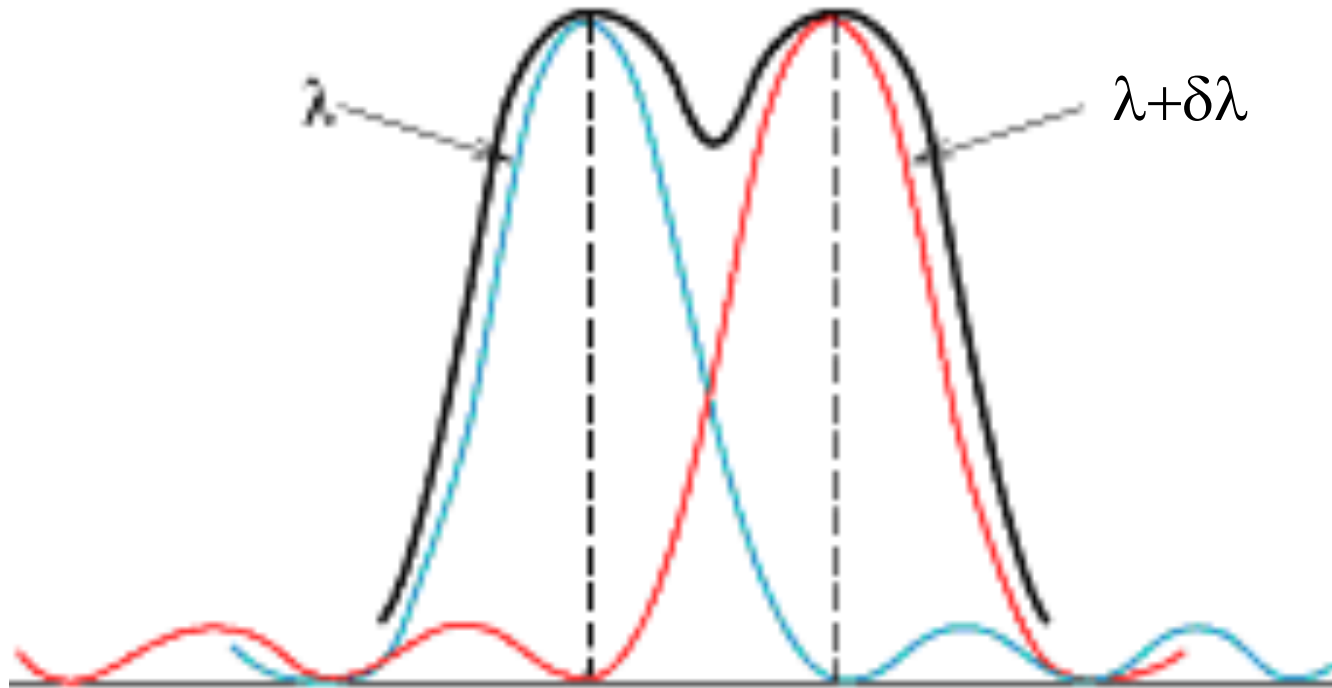
# Réseaux de diffraction: Dispersion

- L'angle des maxima:  $\sin \beta - \sin \alpha \approx \sin \frac{y}{L} - \sin \alpha = \frac{m\lambda}{a}$  ( $y \approx L\beta$  est la position du maximum sur le détecteur).
- La **dispersion** du réseau (mouvement du maximum par changement de longueur d'onde):  $\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos \beta}$ ;  $\frac{dy}{d\lambda} \approx \frac{mL}{a}$ .
- Des valeurs typiques:  $a=0.83\mu\text{m}$  (1200 l/mm),  $L=550\text{mm}$ ,  $N=91000$ ,  $\beta=28^\circ$ ; cela donne en 1<sup>er</sup> ordre:  $\frac{dy}{d\lambda} = 6.6 \cdot 10^5$   
ou:  $\frac{d\lambda}{dy} \cong 1.5 \text{ nm/mm}$ . Un élément typique d'un détecteur CCD ( $12.5 \mu\text{m}$ ), ou une fente de sortie de la même largeur, correspond à une largeur spectrale:  $\delta\lambda=19 \text{ pm}$ .
- La gamme spectrale est:  $\Delta\lambda=38 \text{ nm}$ , qui correspond aux 2000 pixels de la CCD.

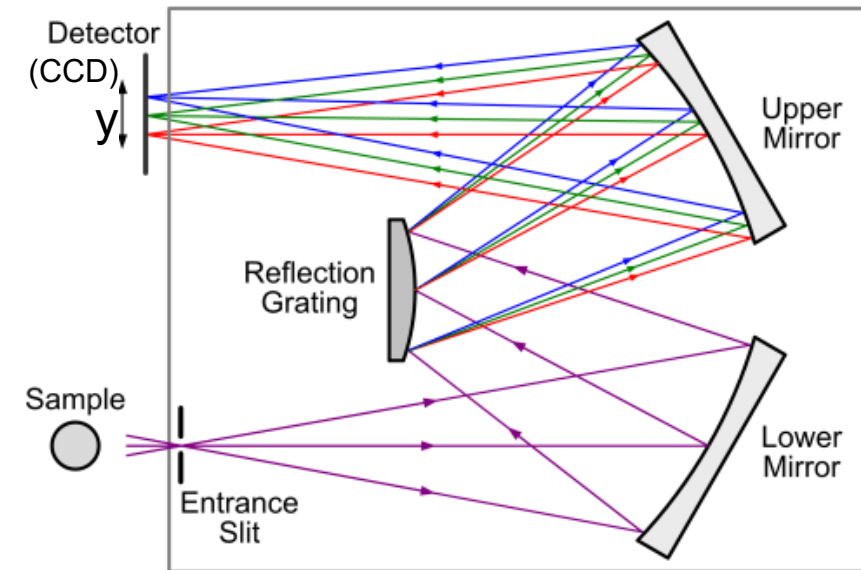


# Réseaux de diffraction: Résolution

- La **résolution optique** est donnée par le critère de Rayleigh: La coïncidence du maximum d'une longueur d'onde  $\lambda_1$  avec le minimum d'une longueur d'onde  $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$ , ce qui permet de les distinguer (contraste de  $\sim 10\%$ ).
- L'angle correspondante est donné par:  $a(\sin \beta - \sin \alpha) = m\lambda_1 = m'\lambda_2/N$ ; La différence des longueurs d'onde est:  $\delta\lambda = \lambda_2 \frac{mN - m'}{mN}$ . La **résolution** (le cas minimal:  $mN - m' = 1$ ) est:  $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}$ . La **résolvance** est:  $R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ .
- Des valeurs typiques:  $a=0.83\mu\text{m}$  (1200 l/mm),  $L=550\text{mm}$ ,  $N=91000$ ,  $\beta=28^\circ$ ; cela donne en 1<sup>er</sup> ordre:  
résolution:  $\frac{\delta\lambda}{\lambda} \cong 1.1 \cdot 10^{-5}$ , résolvance:  $R=N=91000$ .



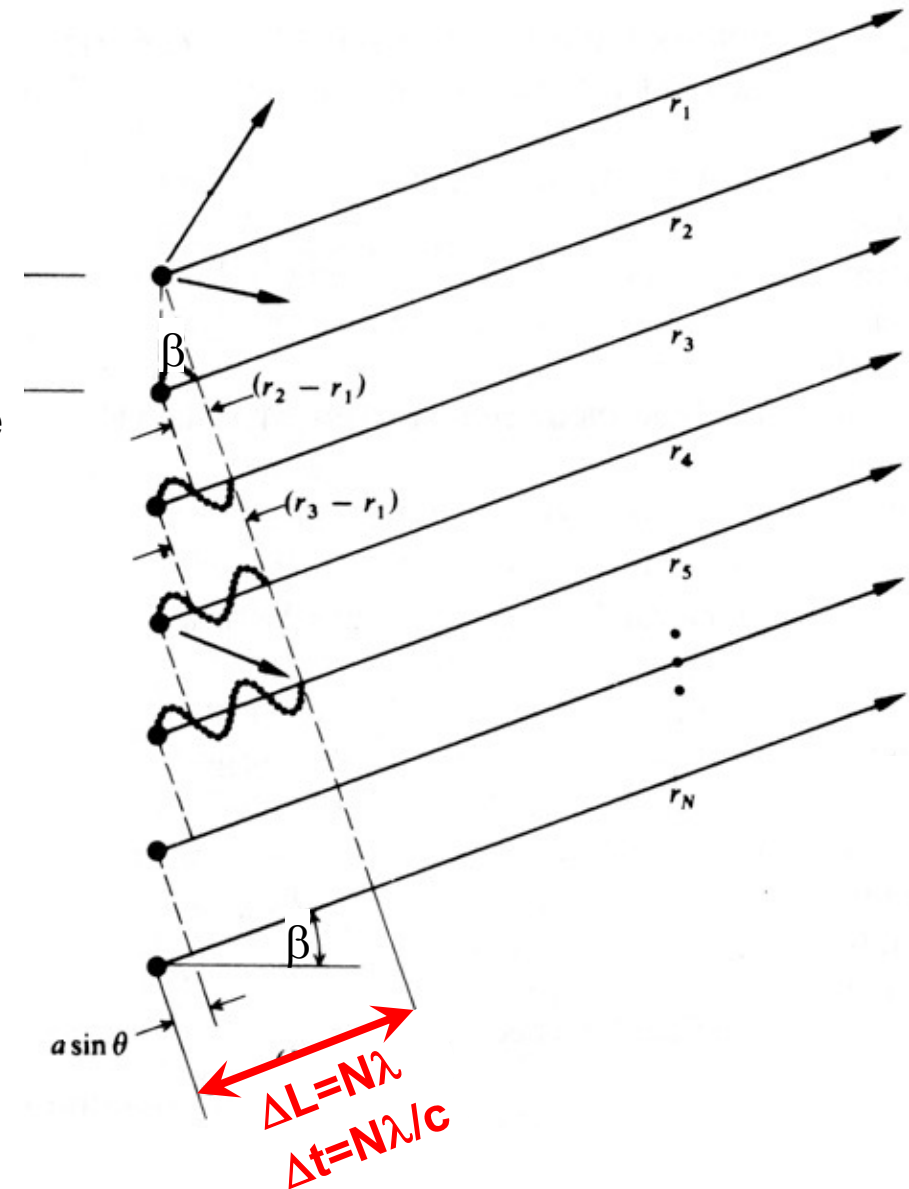
Le critère de Rayleigh:  $I_{\max}$  à  $\lambda$  superposé avec  $I_{\min}$  à  $\lambda + \delta\lambda$





# Bonus: Réseaux de diffraction et paquets d'ondes / impulsions

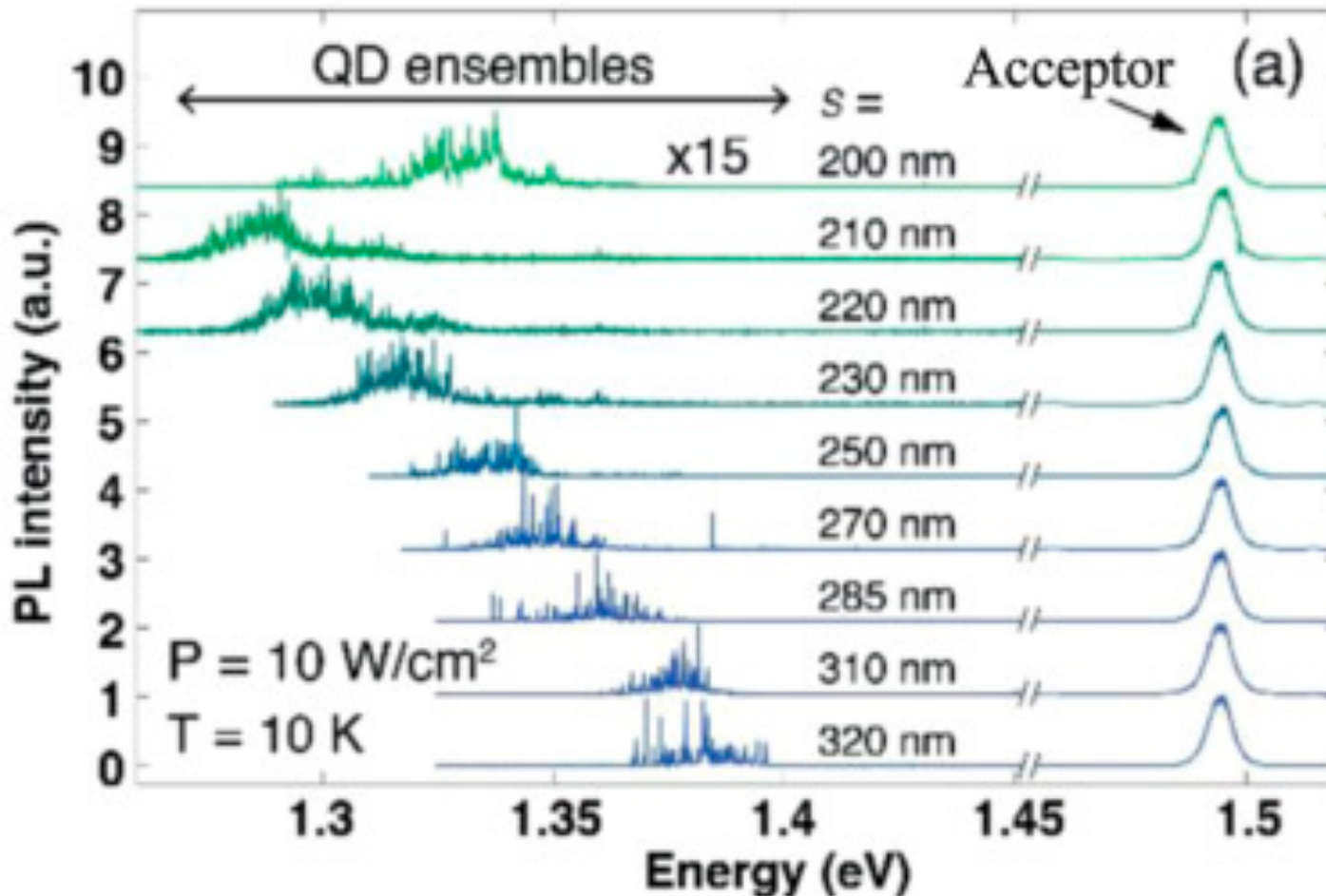
- La résolution du réseau (1<sup>er</sup> ordre) est:  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}$ . Dans un réseau typique de haute résolution,  $N \approx 10^5$ .
- Si le réseau est illuminé par une onde plane, la différence de chemin optique entre le premier (haut) et le dernier (bas) faisceau est de  $N \cdot \lambda$ .
- Cela implique une différence de temps de:  $\Delta t = N \cdot \lambda / c$  (300 ps pour  $N = 10^5$ ,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ).
- Si l'illumination est une impulsion courte (une durée de  $\tau$ ), l'interférence serait possible entre moins de faisceaux, seulement  $N' = \tau \cdot c / \lambda$ . Cela réduira la résolution spectrale à:  $\Delta\lambda / \lambda = \lambda / \tau c$ , ou:  $\Delta\lambda \cdot \tau = \lambda^2 / c$ .
- Une impulsion d'un laser de 3 ps limitera la résolution à 1 nm, et une impulsion ultracourte de 150 fs serait limité à seulement 20 nm. C'est à comparer avec la résolution initiale du réseau de 10 pm. C'est une perte de 100-2000!
- Une autre manière d'arriver à ce résultat, en utilisant le lien entre largeur temporel et spectral de l'impulsion:  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , donc:  $\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$   
ou:  $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}$ . Mais:  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{\tau}$ , donc:  $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta\omega}{2\pi c} = \frac{\lambda^2}{c\tau}$ .



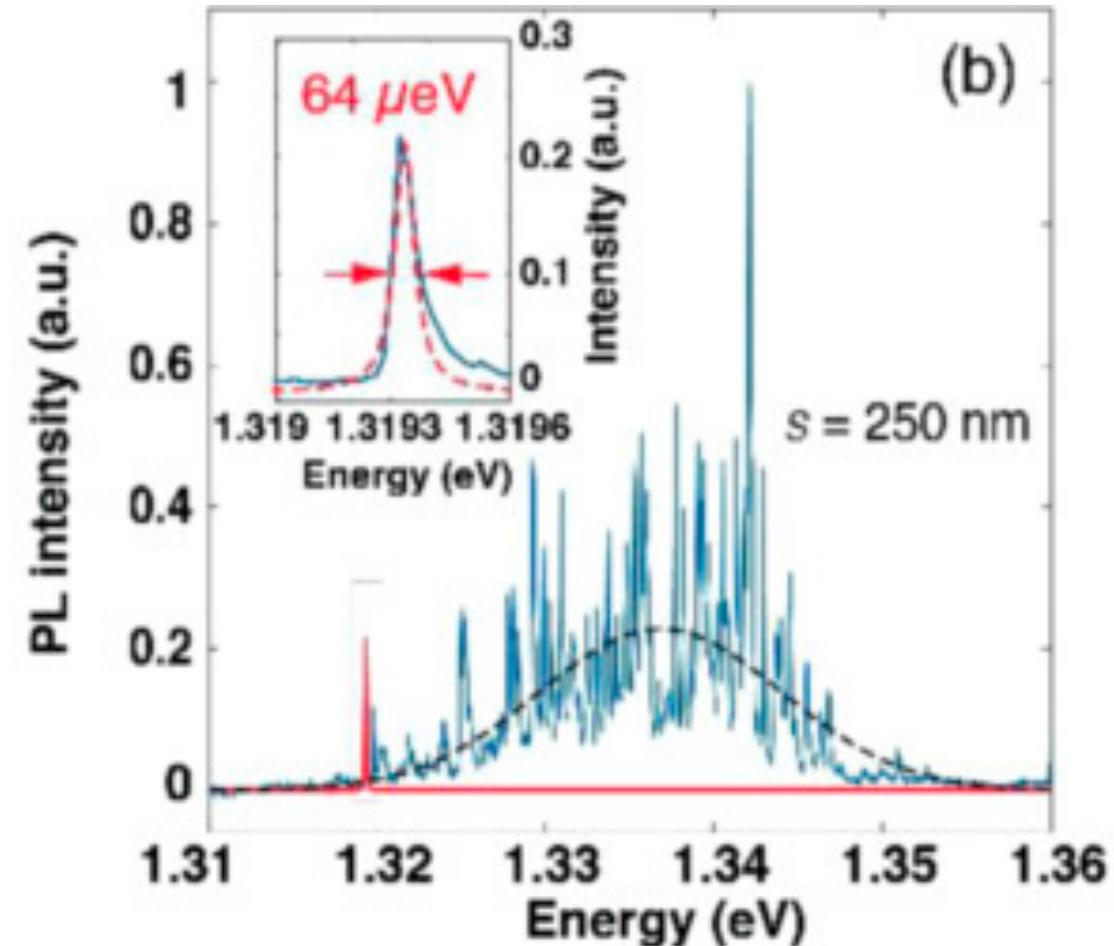
# Application typique du spectromètre à réseau

- Mesure des niveaux d'énergie des structures quantiques en semiconducteurs, ici des boîtes quantiques

Spectres d'émission des ensembles d'env. 10 boîtes quantiques



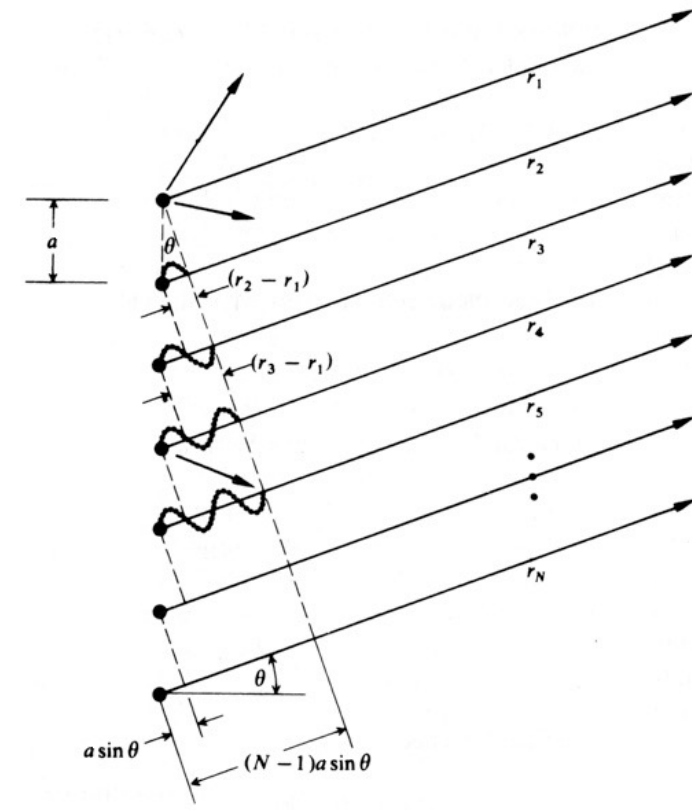
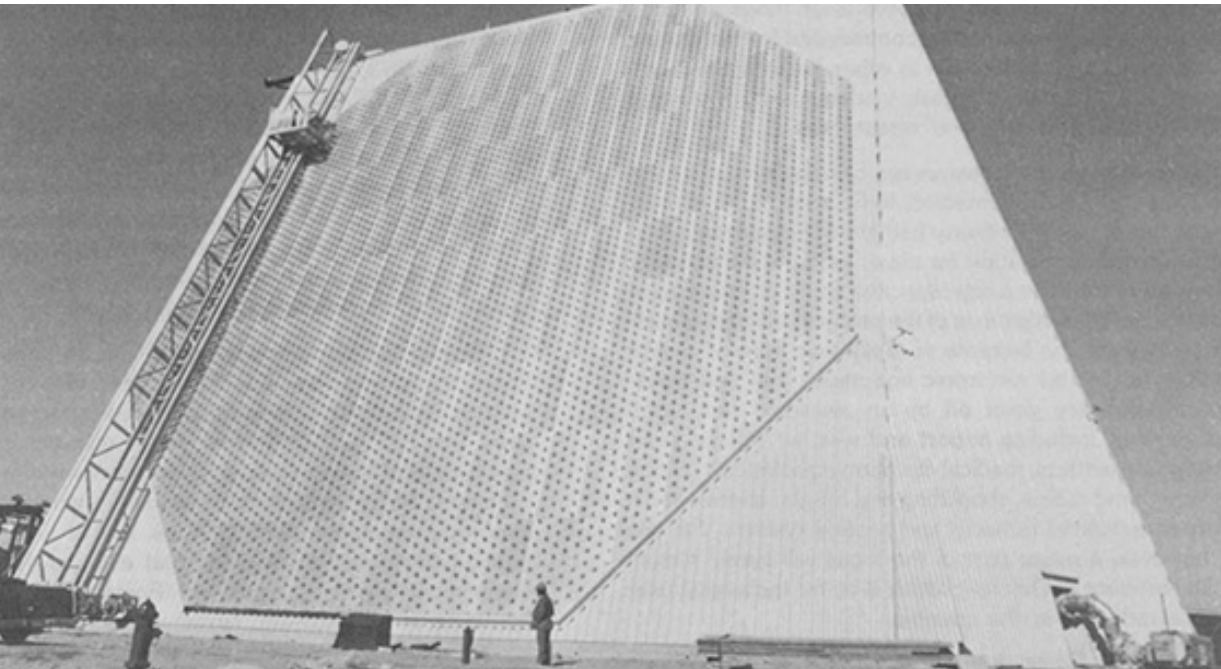
Isolation des transitions électronique d'une boîte quantique dans l'ensemble



# Bonus: Autres systèmes similaires au réseau de diffraction

## Interférence d'un grand nombre des faisceaux

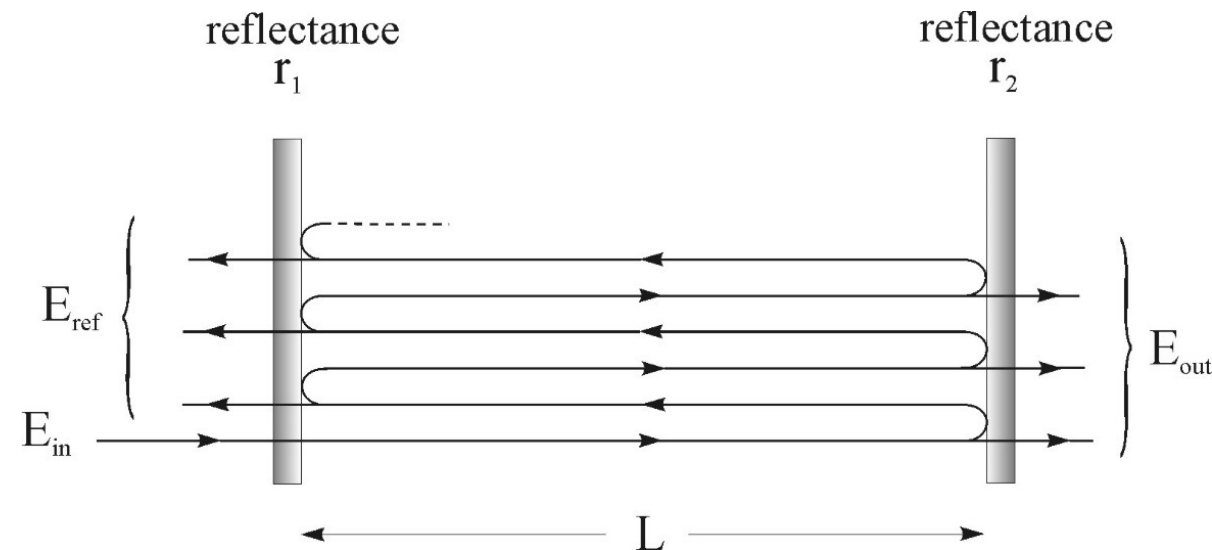
- En radio- astronomie: on utilise un réseau des radio-télescopes de taille moyenne pour réaliser un équivalent d'une taille beaucoup plus grande (l'intensité des grand maxima est :  $I = N^2 I_0$  ).
- Les systèmes de radar utilisent des réseaux d'antennes, où on peut diriger le faisceau en changeant la phase entre les antennes.



# L'étalon de Fabry-Pérot: Principe d'opération

- L'étalon de Fabry-Pérot est composé de deux miroirs presque parfaits, avec une transmission  $t_1, t_2$  et réflexion  $r_1, r_2$ .
- Un faisceau entrant traverse les deux miroirs, donnant un premier composant à la sortie:  $E_{out_1} = E_0 t_1 t_2 e^{ikL}$ .
- Les réflexions successives ajoutent à ce champ une contribution (par chaque aller-retour):  $E_{out_j} = E_{out_{j-1}} r_1 r_2 e^{i2kL}$ .
- Le champ total à la sortie est donc:  $E_{out} = E_0 t_1 t_2 e^{ikL} \sum_{j=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i2kL})^j$ .
- En définissant:  $\Delta\varphi = 2kL = 4\pi L/\lambda$  et:  $r = r_1 r_2$ , nous avons:  $E_{out} = E_0 t_1 t_2 e^{i\Delta\varphi/2} \sum_{j=0}^{\infty} r^j e^{i\Delta\varphi j} = E_0 t_1 t_2 \frac{e^{i\Delta\varphi/2}}{1 - r e^{i\Delta\varphi}}$ .
- L'intensité est:  $I_{out} = I_0 t_1^2 t_2^2 \left| \frac{1}{1 - r e^{i\Delta\varphi}} \right|^2 = \frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{(1 - r e^{i\Delta\varphi})(1 - r e^{-i\Delta\varphi})} = \frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{1 + r^2 - r(e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi})} = \frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Delta\varphi} =$   
 $\frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{1 + r^2 - 2r(1 - 2 \sin^2 \Delta\varphi/2)} = \frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \Delta\varphi/2} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \Delta\varphi/2}$ , avec les définitions:  $I_{max} \equiv \frac{I_0 t_1^2 t_2^2}{(1-r)^2}$ ,  $\mathcal{F} \equiv \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} = \frac{\pi\sqrt[4]{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}$   
 $(R_{1,2} = r_{1,2}^2)$ .
- Si:  $R_1 = R_2 = R$ ,  $\mathcal{F} \equiv \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ .
- Pour augmenter  $\mathcal{F}$ , il faut une réflectivité très proche de 1:

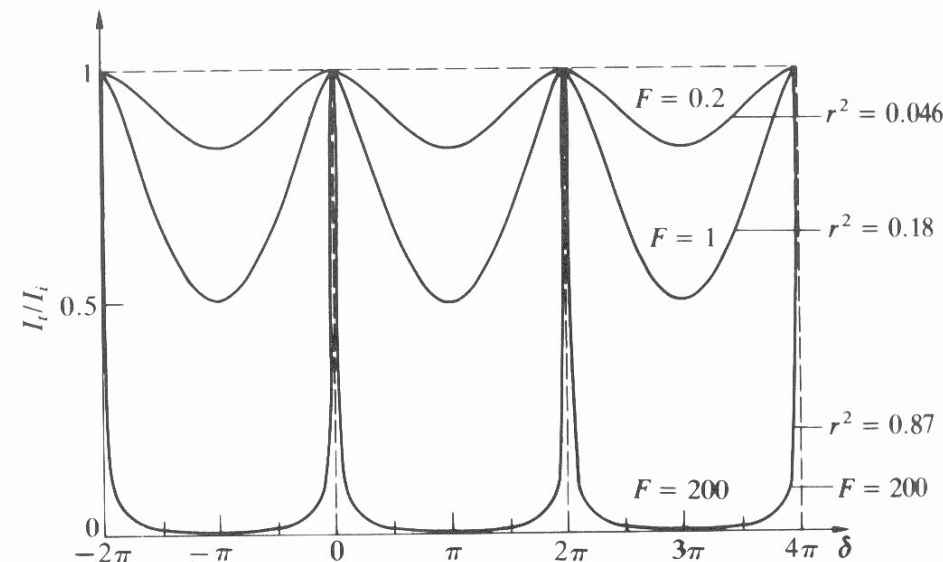
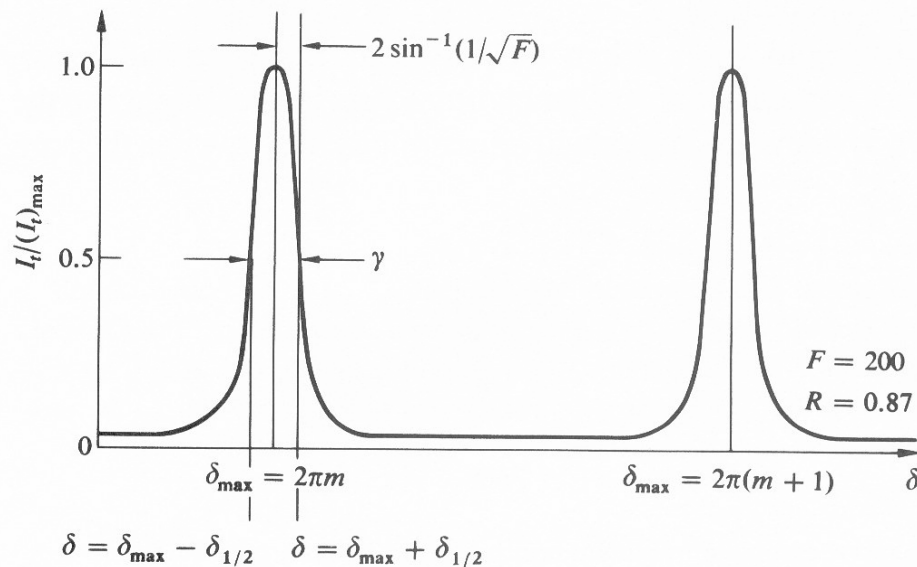
R	$\mathcal{F}$
0.73134	10
0.9690737	100
0.99686334	1000





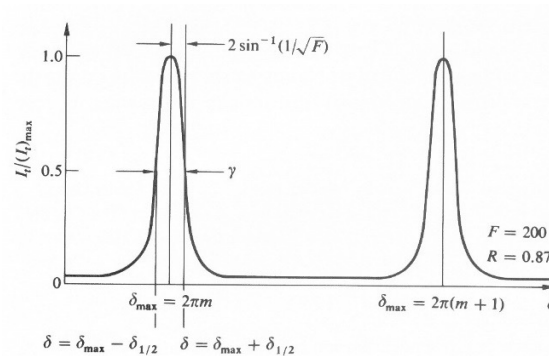
# L'étalon de Fabry-Pérot: Gamme spectrale, résolution.

- L'intensité est:  $I_{out} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \Delta\varphi/2}$ , les maxima sont donnés par:  $\sin^2 \Delta\varphi/2 = 0$ , donc:  $\Delta\varphi_{max} = 2\pi m$  ( $m=1,2,3,\dots$ ).
- La largeur à mi-hauteur des pics est donné par:  $\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \Delta\varphi_{1/2}/2 = 1$ . Si  $\mathcal{F} > 30$  on peut utiliser l'approximation linéaire du sinus, pour obtenir:  $2\Delta\varphi_{1/2} = 2\pi/\mathcal{F}$ . On a donc:  $\Delta\varphi_{p-p}/\Delta\varphi_{1/2} = \mathcal{F}$ .
- En utilisant:  $\Delta\varphi = 2kL = \frac{4\pi L}{\lambda}$ , on a des maxima pour:  $L = \lambda m/2$ . Typiquement,  $L = 10$  mm, donc:  $m = 2L/\lambda = 2 \cdot 10^4$ .
- Pour passer d'un pic au suivant, il faut changer la longueur  $L$  de  $\lambda/2$ , ou changer la longueur d'onde de:  $\Delta\lambda = \lambda^2/2L$ . On appelle  $\Delta\lambda$  la **gamme spectrale** (FSR). Pour  $L = 10$  mm,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 50$  pm !
- La **résolution** est  $\delta\lambda = \Delta\lambda/\mathcal{F}$ . Pour  $L = 10$  mm et  $\mathcal{F} = 1000$ ,  $\delta\lambda = 50$  fm !
- On exprime souvent  $\Delta\lambda$ ,  $\delta\lambda$  en MHz/GHz ( $f = c/\lambda$ ):  $\Delta f = c\Delta\lambda/\lambda^2 = 3 \cdot 10^{20} \Delta\lambda$ . Notre exemple:  $\Delta f = 15$  GHz,  $\delta f = 15$  MHz.

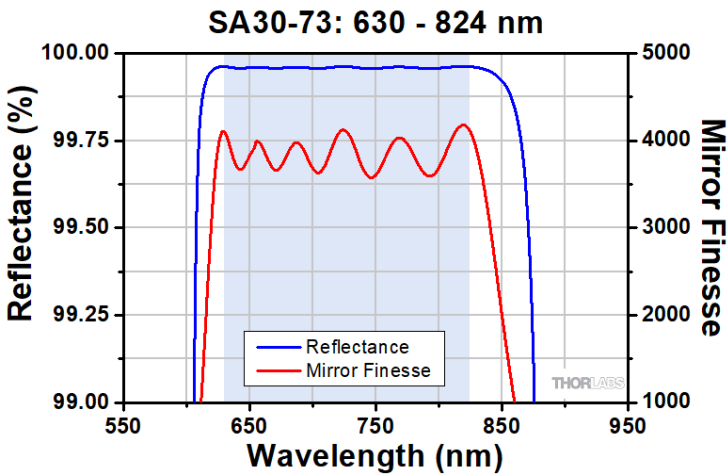


# L'étalon Fabry-Pérot: pratique

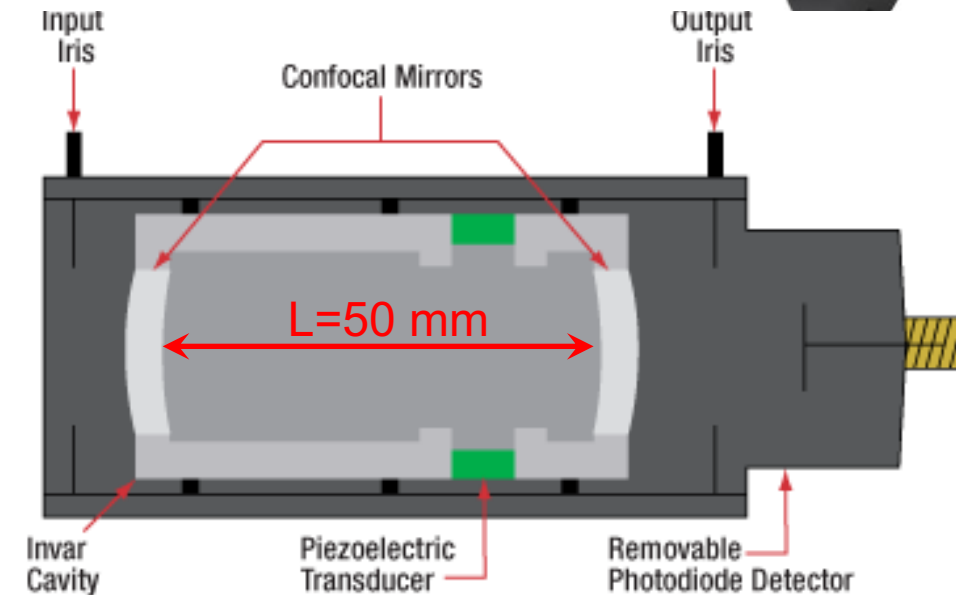
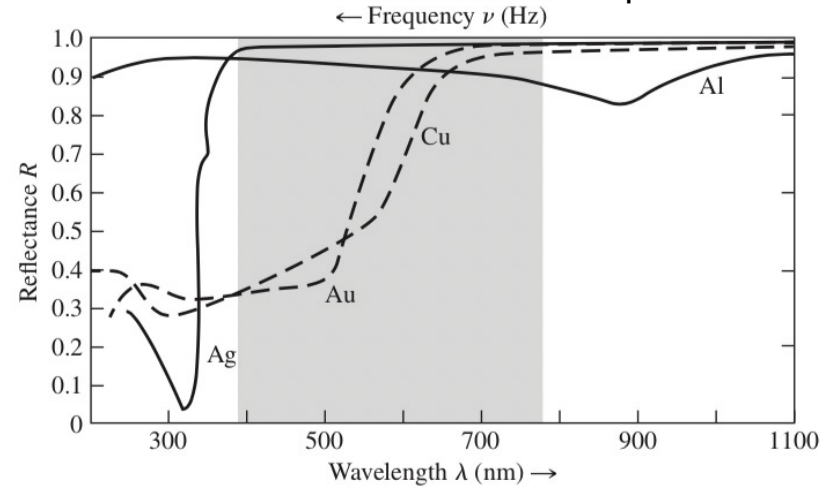
- L'appareil est souvent fabriqué avec des miroirs sphériques, pour faciliter l'alignement (voir plus loin). Cela double le chemin optique, donnant pour les pics:  $L=\lambda m/4$ .
- Un actuateur piézoélectrique permet un mouvement relatif des miroirs avec grande précision (gamme de mouvement de quelques microns, résolution de nm).
- Seuls les **miroirs diélectriques** ont une réflectivité suffisante, afin d'assurer la finesse désirée.



Réflectivité du miroir diélectrique  
et finesse du Fabri-Pérot

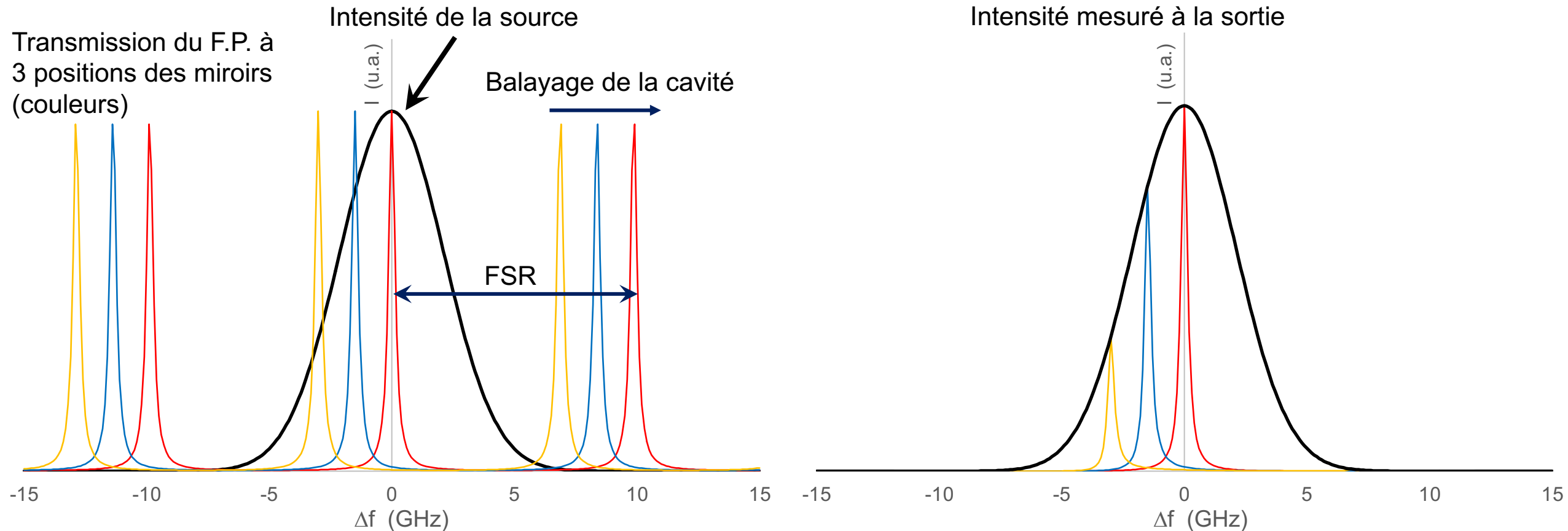


Réflectivité du miroir métallique



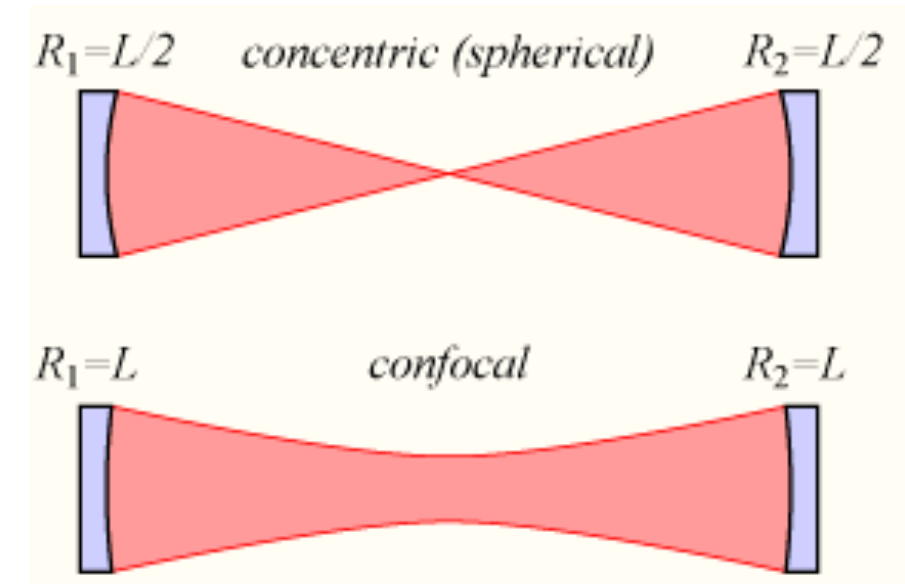
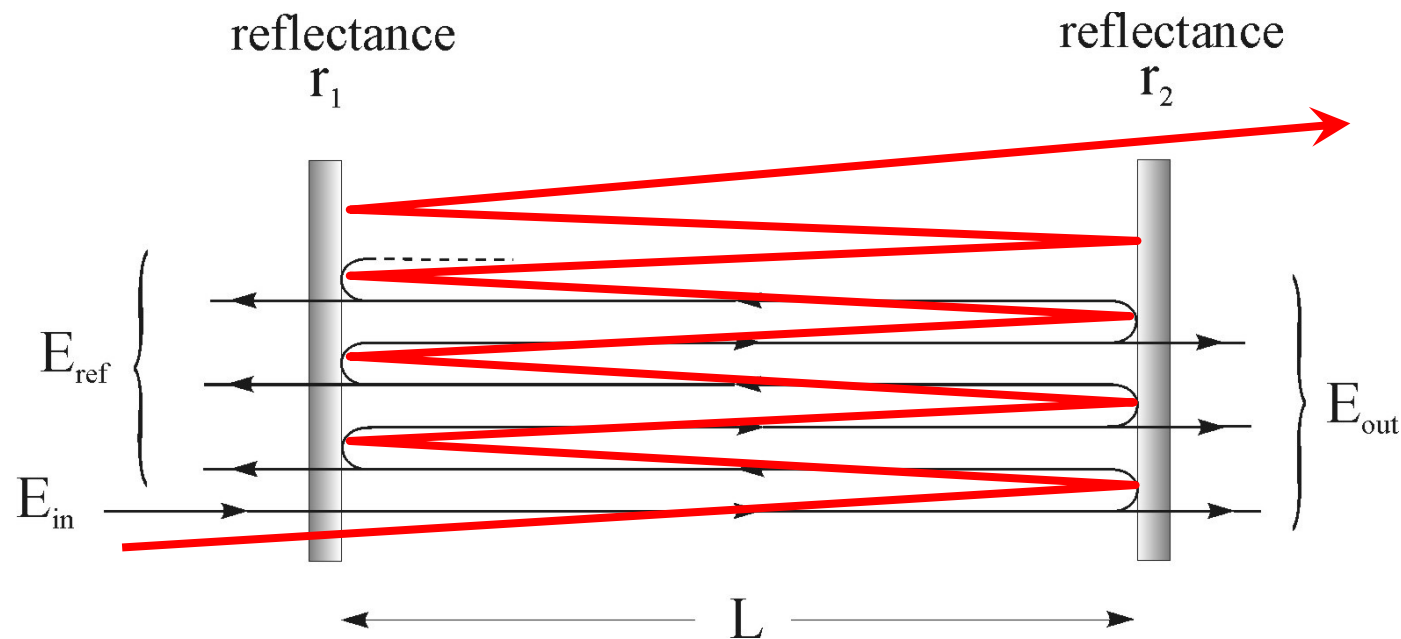
# L'étalon Fabry-Pérot: utilisation

- La spécificité de l'étalon Fabry-Pérot: pics de transmission très étroits, qui se répètent périodiquement.
- Utilisation principale: analyse de la largeur de ligne des lasers, des boîtes quantiques, etc. L'appareil sert comme un filtre très étroit, qu'on balaye dans la (petite) gamme de longueur d'onde pour tracer la forme du spectre mesuré. La largeur à mi-hauteur du pic du Fabry-Pérot doit être plus petite que celle de la ligne mesurée, tandis que la FSR doit en être plus large.



# Les effets de désalignement

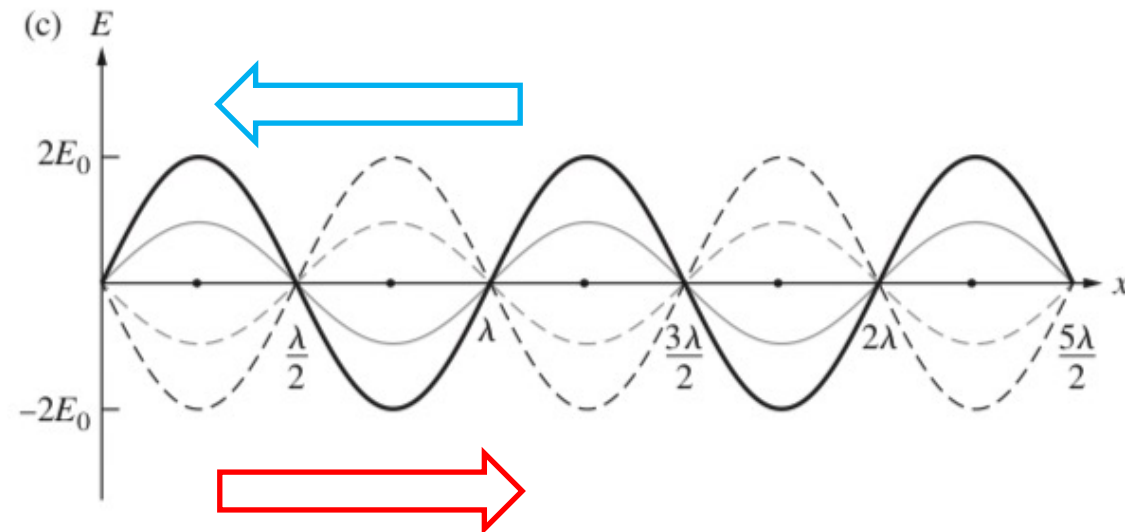
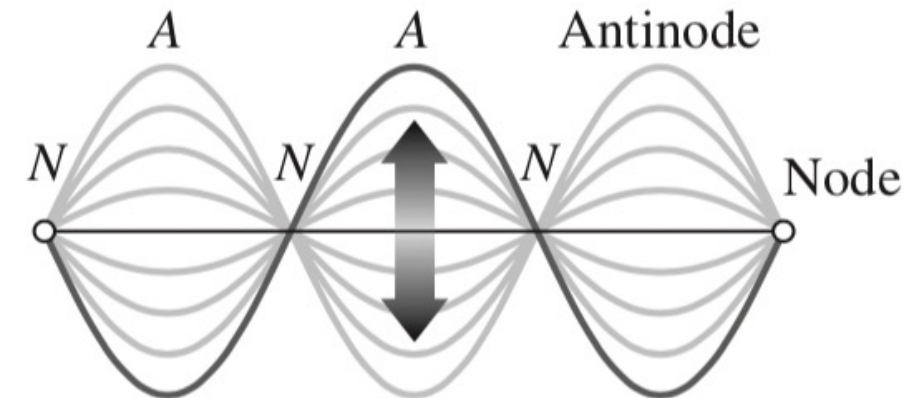
- Dans l'interféromètre de Fabry-Pérot, notre calcul concernait une propagation perpendiculaire aux miroirs.
- Si la propagation est à un angle  $\alpha$ , il y a deux changements au calcul:
  - La distance est augmenté par  $1/\cos(\alpha)$ . Si  $\alpha$  est petit, cela ne change pas beaucoup les résonances ( $\cos(\alpha) \approx 1 - \alpha^2/2$ ).
  - A chaque passage, le faisceau change de position par  $2L \tan(\alpha)$ . La taille des miroirs  $H$  doit être assez grande pour contenir toutes les réflexions nécessaires à obtenir la finesse, car leur nombre doit être  $> \mathcal{F}$ . La taille du miroir doit donc être au moins:  $H > 2\mathcal{F}L \tan(\alpha)$ , ou l'angle maximale du faisceau doit être plus petite que:  $\alpha_{\max} = \tan^{-1}(H/2\mathcal{F}L)$ . Pour des dimensions typiques ( $H=2\text{cm}$ ,  $L=1\text{cm}$ ,  $\mathcal{F}=200$ ),  $\alpha_{\max}=0.3^\circ$  (pour  $\mathcal{F}=1000$ ,  $\alpha_{\max}=0.06^\circ$ ) ! On dit que la cavité est **marginalelement stable**, car la finesse est très sensible à la direction du faisceau et demande un alignement très précis.
- Pour résoudre ce problème, il faut une cavité stable, p. ex. composée de deux miroirs concaves (voir plus loin):





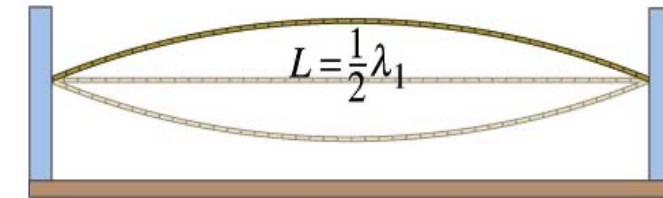
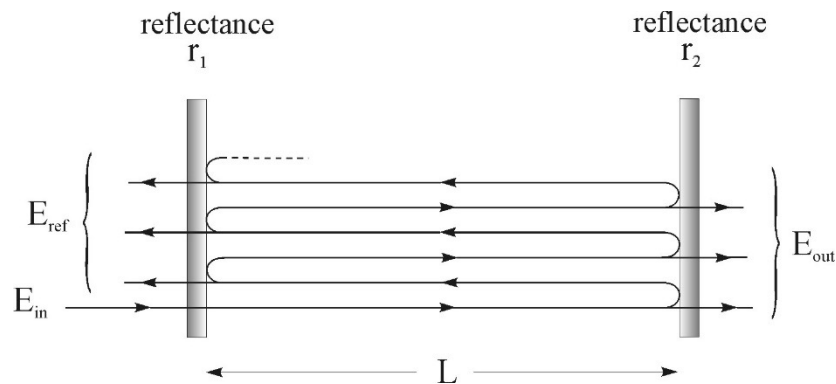
# Les ondes stationnaires (1D)

- Regardons l'interférence entre une onde plane:  $E(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$  et sa réflexion par un miroir parfait:  $E'(z, t) = E_0 \cos(kz + \omega t)$ . La somme des deux ondes est:  $E_{tot}(z, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t) + \cos(kz + \omega t)] = 2E_0 \cos\left(\frac{(kz - \omega t) + (kz + \omega t)}{2}\right) \cos\left(\frac{(kz - \omega t) - (kz + \omega t)}{2}\right) = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t)$ .
- C'est une **onde stationnaire**: la dépendance en  $z$  et en  $t$  sont séparées, contrairement aux ondes propageantes, qui dépendent de l'argument combiné  $(kz - \omega t)$ .
- Un développement plus général: on cherche une solution  $E(z, t) = f(z)g(t)$  à l'équation d'onde:  $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ . La substitution donne:  $\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2 g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = C$ . Une solution à ces équations serait:  $f(z) = f_0 \cos(kz)$  et:  $g(z) = g_0 \cos(\omega t)$ , ce qui donne:  $\omega = ck$  et:  $E(z, t) = E_0 \cos(kz) \cos(\omega t)$ .
- On peut décrire les mêmes ondes stationnaires avec des sinus:  $E(z, t) = E_0 \sin(kz) \sin(\omega t)$ , ou des exponentiels:  $E(z, t) = \Re(\mathcal{E}_0 e^{ikz} e^{i\omega t})$ .

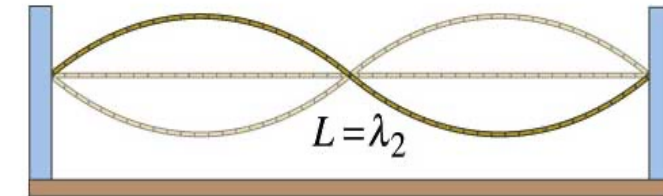


# Les modes de cavité (1D)

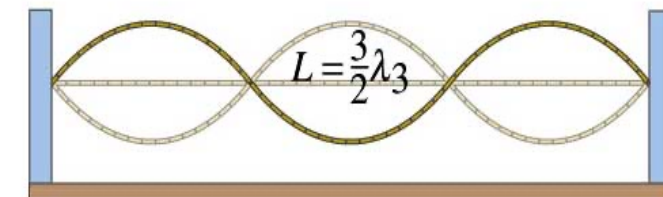
- Entre deux miroirs, il y a une onde stationnaire avec deux conditions aux bords:  $E(0,t)=0$  et:  $E(L,t)=0$  . Ceci ajoute à la solution:  $E_{tot}(z,t) = 2E_0 \sin kz \cos \omega t$  la condition:  $kL=m\pi$  , ou:  $L=m\lambda/2$  . On appelle ces solutions les **modes de la cavité** formée par les deux miroirs. Dans beaucoup de cavités,  $L \gg 1\text{mm}$ , donc  $m$  est très grand ( $\gg 1000$ ).
- La fréquence des modes est donnée par:  $f=mc/2L$  . La différence en fréquence entre deux modes est donc:  $\Delta f=c/2L$  . Nous pouvons définir la **densité des modes**  $M(f)$  = nombre de modes par unité de fréquence et de longueur de cavité, ce qui donne:  $M(f)=4/c$  (en comptant deux polarisations par mode).
- Parfois, il y a une combinaison entre onde stationnaire et onde propageante:
  - Dans l'interféromètre de Fabry-Pérot, le champ réfléchi est de  $>99\%$ ; cela forme une onde stationnaire entre les miroirs, plus un composant propageant de  $<1\%$  . Cette partie est nécessaire, sinon la lumière ne pourrait jamais entrer ou sortir de la cavité...
- Une cavité plus complexe peut supporter des ondes stationnaires qui ont besoin de plusieurs passages pour revenir à la configuration initiale.



Fundamental or first harmonic,  $f_1$



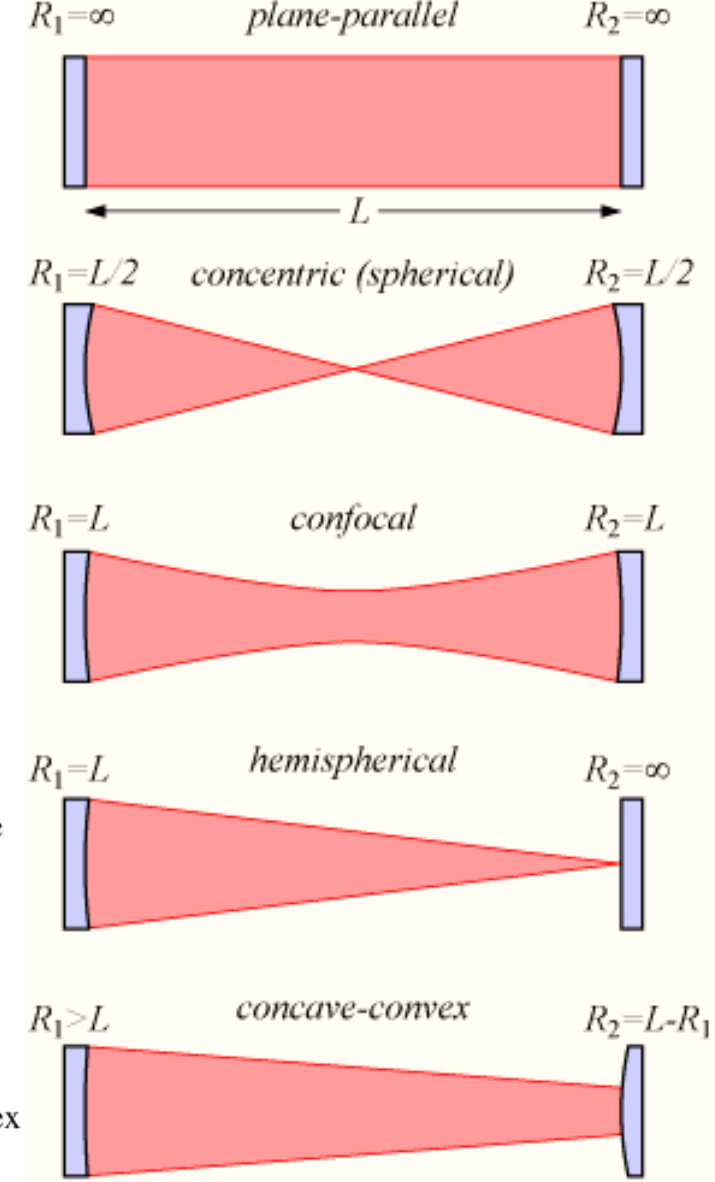
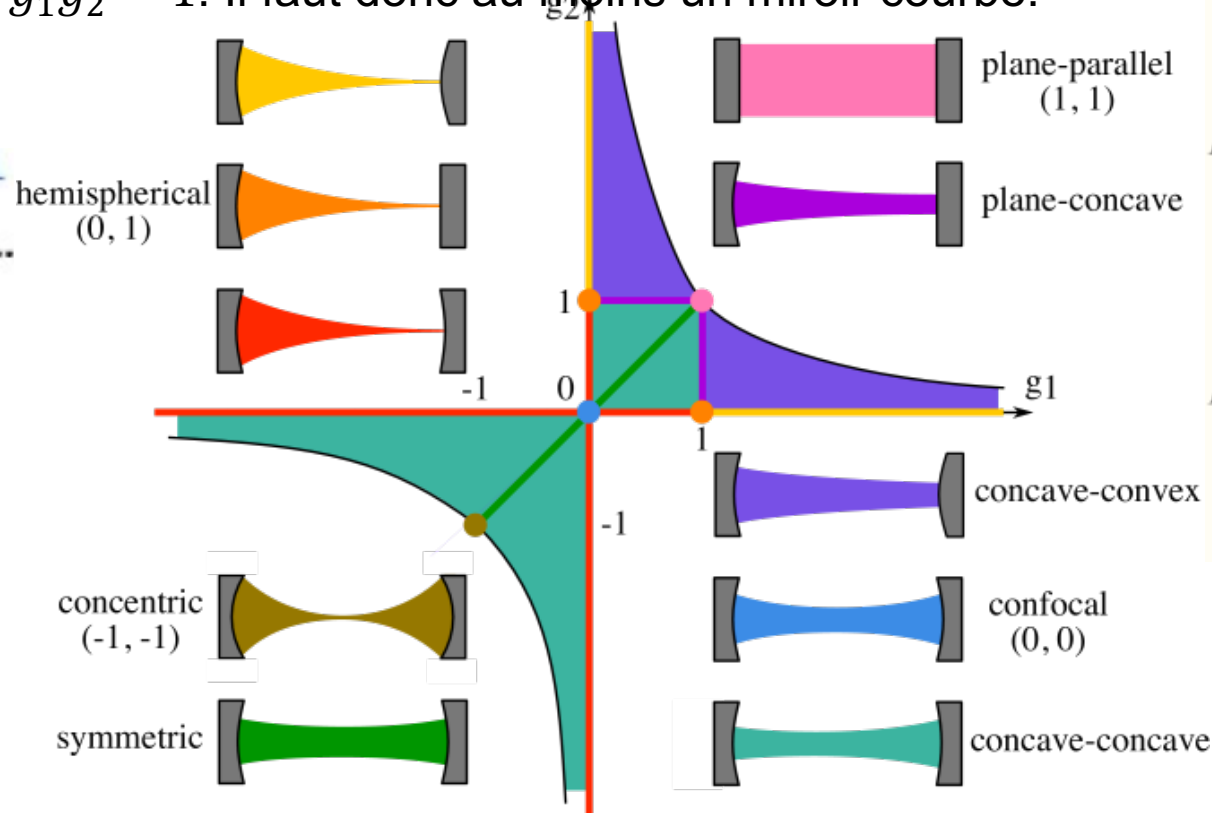
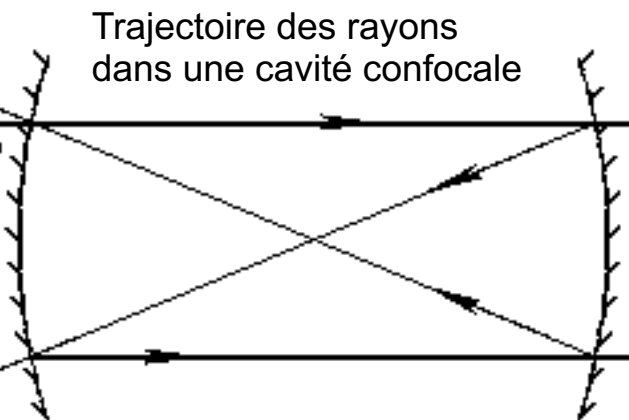
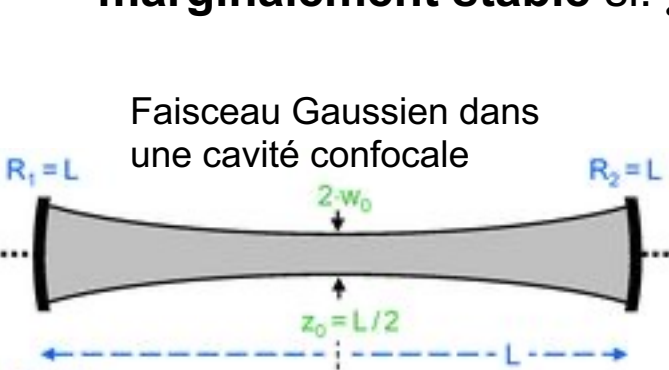
First overtone or second harmonic,  $f_2 = 2f_1$



Second overtone or third harmonic,  $f_3 = 3f_1$

# Bonus: La stabilité des cavités

- Il existent différents types de cavités, utilisant des miroirs plans ou sphériques.
- Si la trajectoire d'un faisceau qui fait un aller-retour revient avec les mêmes conditions (angle, position), la cavité est **stable**.
- On peut définir les facteurs de stabilité:  $g_{1,2} \equiv 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$ ,  $R_i$  = rayon de courbure du miroir  $i$  ( $R_i = \infty$  pour le miroir plane, donc:  $g_{plane} = 1$ ).
- La cavité est **stable** si:  $g_1 g_2 \leq 1$  (zones colorés dans le diagramme), et **marginalelement stable** si:  $g_1 g_2 = 1$ . Il faut donc au moins un miroir courbe!



[http://pyweb.swansea.ac.uk/LaserChemistry-book/fig1\\_a0327.jpg](http://pyweb.swansea.ac.uk/LaserChemistry-book/fig1_a0327.jpg)

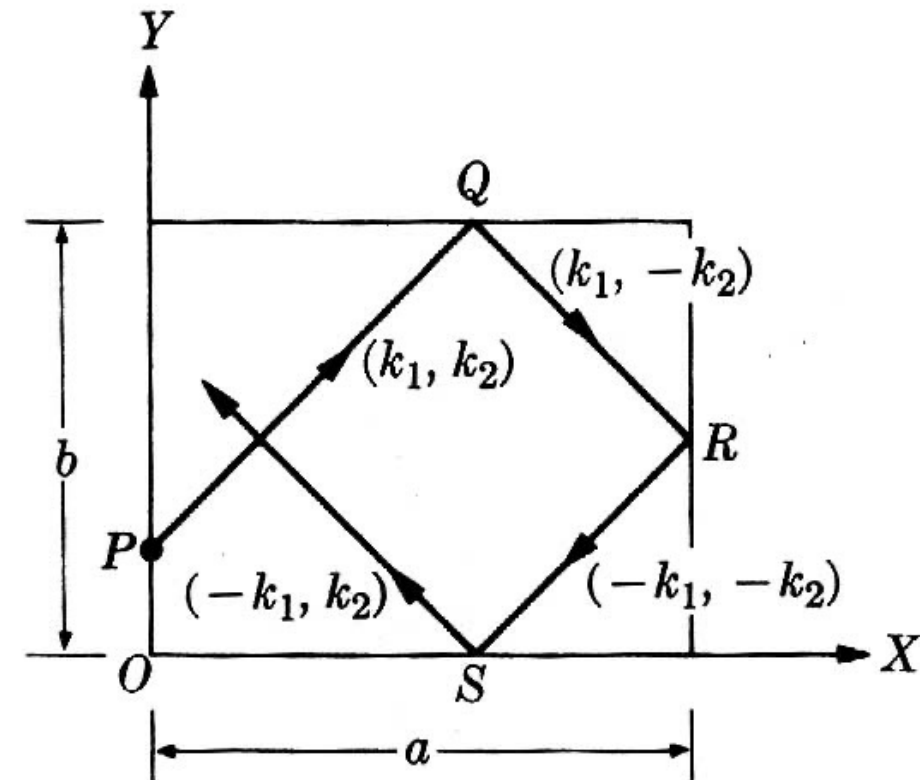
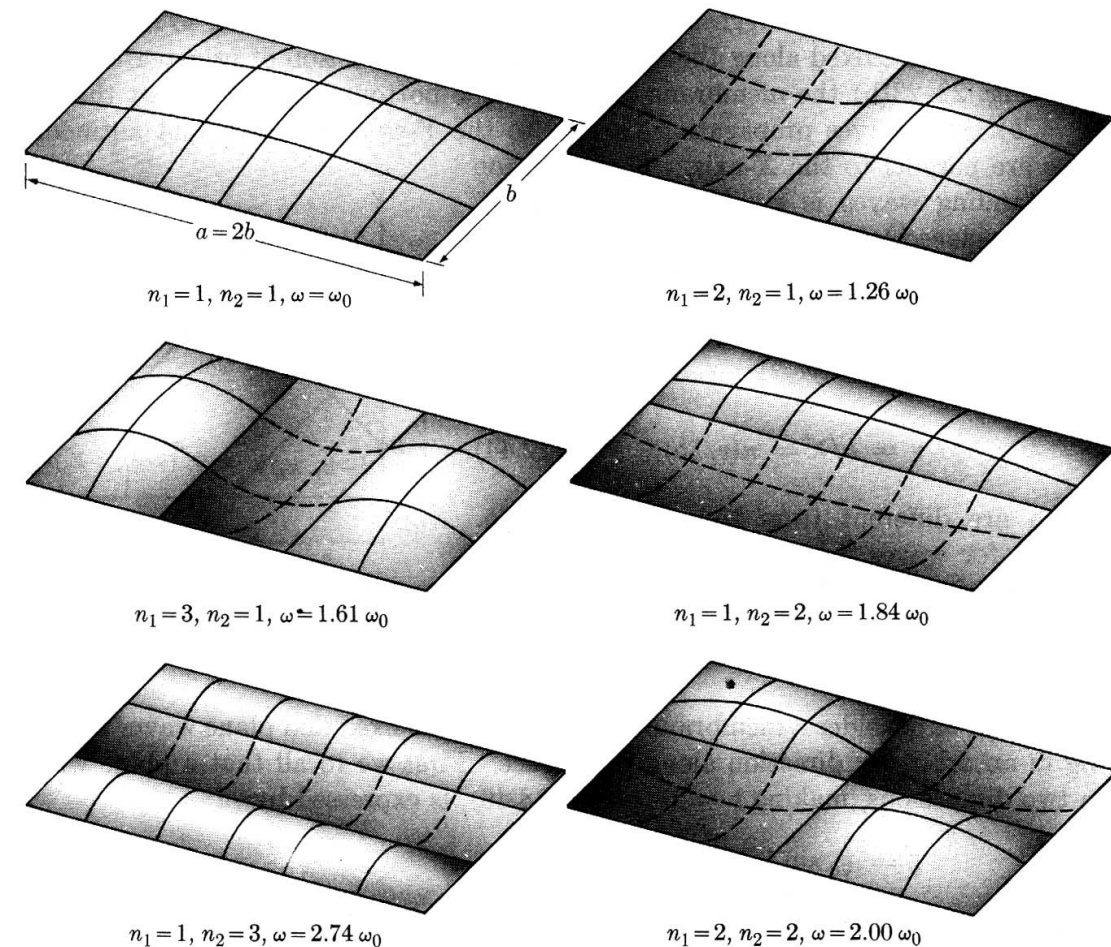
<https://i.stack.imgur.com/4Z0z3.png>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Optical\\_cavity](https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_cavity)

<https://www.groundai.com/project/feasibility-of-near-unstable-cavities-for-future-gravitational-wave-detectors/4>

# Bonus: Les cavités en 2D

- De la même manière d'une cavité à 1D, on peut construire une cavité en 2D, voir 3D.
- P. ex. un système avec 2 miroirs parallèles à l'axe  $x$  (distance  $b$ ) et 2 miroirs parallèles à l'axe  $y$  (distance  $a$ ) vont définir des modes pour  $k_x, k_y$  :  $k_x = \pi m/a$  et  $k_y = \pi l/b$ .
- Ces modes peuvent être combinés, formant des motifs complexes en  $x, y$ .





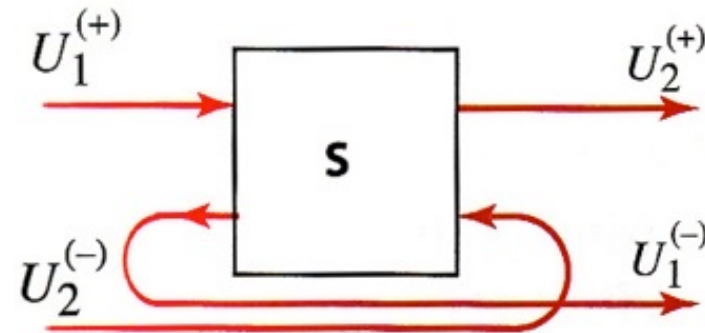
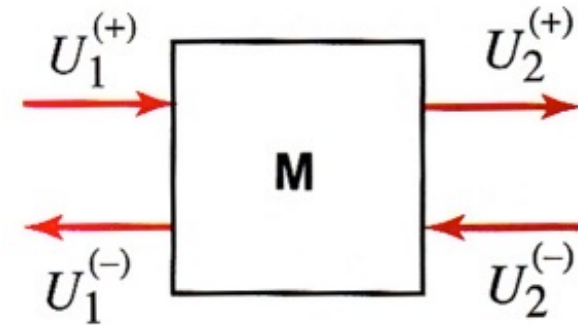
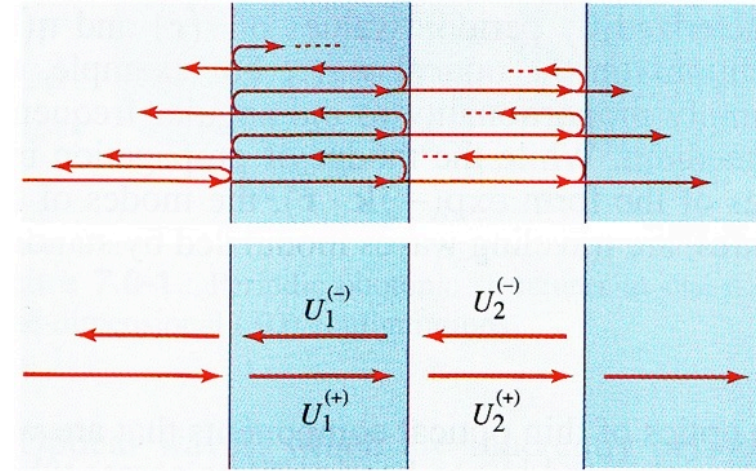
# Bonus: Approche matricielle de l'interférence dans des couches

- L'idée: Accumuler toutes les réflexions multiples en deux valeurs de champs:  $U^{(+)}$  et  $U^{(-)}$ , qui propagent dans les deux directions, de chaque côté de l'interface.
- Ces champs sont interliés par une matrice de coefficients, qui exprime les propriétés du système. Il y a deux systèmes de matrices:
  - **Matrice de transfert:** lie les champs "à droite" (dans les deux directions de propagation)  $U_2^{(+)}$  et  $U_2^{(-)}$ , aux champs "à gauche"  $U_1^{(+)}$  et  $U_1^{(-)}$  :

$$\begin{pmatrix} U_2^{(+)} \\ U_2^{(-)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U_1^{(+)} \\ U_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(+)} \\ U_1^{(-)} \end{pmatrix}$$

- **Matrice de diffusion:** Connecte les champs "sortants"  $U_2^{(+)}$  et  $U_1^{(-)}$ , aux champs "entrants"  $U_1^{(+)}$  et  $U_2^{(-)}$  :

$$\begin{pmatrix} U_2^{(+)} \\ U_1^{(-)} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U_1^{(+)} \\ U_2^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(+)} \\ U_2^{(-)} \end{pmatrix}$$



# Bonus: Les liens entre les différentes matrices

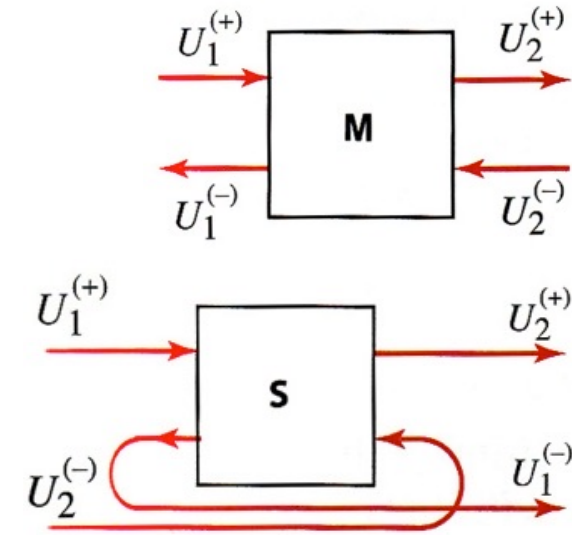
- Transformation entre la matrice de transfert et la matrice de diffusion:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

- Transformation entre la matrice de diffusion et la matrice de transfert:

$$S = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{pmatrix}$$

- S'il n'y a pas d'absorption, l'énergie est conservée, et si un système a les mêmes indices des deux côtés, nous obtenons:  $|U_1^{(+)}|^2 + |U_2^{(-)}|^2 = |U_2^{(+)}|^2 + |U_1^{(-)}|^2$



ce qui donne des equations:  $|t_{12}| = |t_{21}|$      $|r_{12}| = |r_{21}|$      $|t_{12}| + |r_{12}| = 1$      $t_{12} / t_{21}^* = -r_{12} / r_{21}^*$

ou, pour la matrice M:  $|A| = |D|$      $|B| = |C|$      $|A|^2 - |B|^2 = 1$      $|\det M| = 1$      $\det M = C / B^* = A / D^* = t_{12} / t_{21}$

- Si, en plus, le système est "réciproque":  $t_{12} = t_{21} = t$      $r_{12} = r_{21} = r$      $t / r = -(t / r)^*$      $|t|^2 + |r|^2 = 1$      $\arg(t) - \arg(r) = \pm \pi / 2$

ou, pour la matrice M:  $A = D^*$      $B = C^*$      $\det M = 1$      $|A|^2 - |B|^2 = 1$      $S = \begin{pmatrix} t & r \\ r & t \end{pmatrix}$      $M = \begin{pmatrix} 1 / t^* & r / t \\ r^* / t^* & 1 / t \end{pmatrix}$

## Bonus: Exemples de matrices S, M

- Propagation dans un milieu homogène, avec un indice  $n$  et épaisseur  $d$ :  
Il n'y a pas de réflexion, ni de réfraction; seulement un déphasage:
 
$$M = \begin{pmatrix} e^{-inkd} & 0 \\ 0 & e^{inkd} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} e^{-inkd} & 0 \\ 0 & e^{-inkd} \end{pmatrix}$$
- Interface entre deux matériaux, en incidence normale, les équations de Fresnel donnent:
 
$$S = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_1 + n_2} \begin{pmatrix} 2n_1 & n_2 - n_1 \\ n_1 - n_2 & 2n_2 \end{pmatrix}$$
- En conséquence, la matrice M est:
 
$$M = \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{pmatrix}$$
- Un miroir semi-transparent, avec transmission  $t$  et réflexion  $r$ :  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ 

$$S = \begin{pmatrix} |t| & i|r| \\ i|r| & |t| \end{pmatrix} \quad M = \frac{1}{|t|} \begin{pmatrix} 1 & i|r| \\ -i|r| & 1 \end{pmatrix}$$
- L'étalon Fabry-Pérot: une combinaison de deux miroirs et un milieu transparent:
 
$$M = \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} 1 & ir_2 \\ -ir_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-inkd} & 0 \\ 0 & e^{inkd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ir_1 \\ -ir_1 & 1 \end{pmatrix}$$
- La transmission est donc:  $T = |t|^2 = \frac{1}{|D|^2} = \frac{|t_1 t_2 e^{-inkd}|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{-i2nk d}|^2} = \frac{|t_1 t_2|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{-i2nk d}|^2}$ 

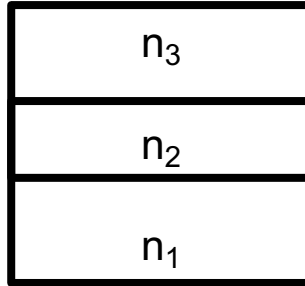
$$M = \begin{pmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{pmatrix}$$

# Bonus: La couche antireflet revisitée

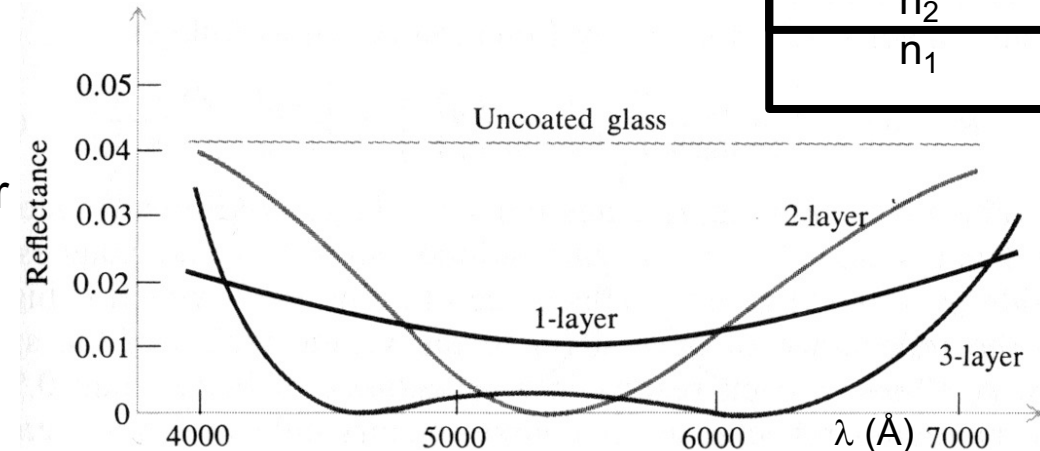
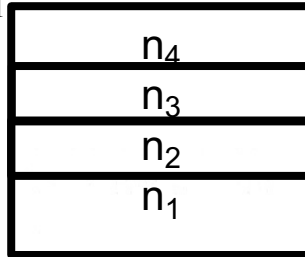
- Une couche avec indice  $n_2$  entre deux matériaux avec indices  $n_1, n_3$  (p. ex. air et verre) en incidence normale. La matrice de transmission est:

$$M = \frac{1}{4n_2n_3} \begin{pmatrix} n_3 + n_2 & n_3 - n_2 \\ n_3 - n_2 & n_3 + n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-in_2kd_2} & 0 \\ 0 & e^{in_2kd_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{4n_2n_3} \begin{pmatrix} (n_3 + n_2)(n_2 + n_1)e^{-in_2kd_2} + (n_3 - n_2)(n_2 - n_1)e^{in_2kd_2} & (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{-in_2kd_2} + (n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{in_2kd_2} \\ (n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{-in_2kd_2} + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{in_2kd_2} & (n_3 - n_2)(n_2 - n_1)e^{-in_2kd_2} + (n_3 + n_2)(n_2 + n_1)e^{in_2kd_2} \end{pmatrix}$$



- La réflexion est donnée par:  $C / D = \frac{(n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{-in_2kd_2} + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{in_2kd_2}}{4n_2n_3D}$
- Pour une couche antireflet, il faut que  $C=0$ , ou:  $(n_3 - n_2)(n_2 + n_1) + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{2in_2kd_2} = 0$
- Si nous supposons :  $2n_2kd_2 = \pi$ , ou  $n_2d_2 = \lambda/4$ , cela donne:  $(n_3 - n_2)(n_2 + n_1) = (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)$  ou:  $n_2^2 = n_3n_1$
- Nous avons vu que c'est difficile de trouver des matériaux avec l'indice intermédiaire requis.
- De la même manière, pour deux couches avec indices  $n_2, n_3$  entre deux matériaux avec indices  $n_1, n_4$ .  
la réflexion est nulle si:  $n_2d_2 = \lambda/4$ ,  $n_3d_3 = \lambda/4$ , et:  $\frac{n_4}{n_1} = \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2$
- Il est plus facile de trouver des deux matériaux intermédiaires pour satisfaire le rapport entre les indices demandé par cette équation.
- Avec 3 couches, on peut diminuer la réflexion d'avantage dans une gamme étendue des longueurs d'onde.



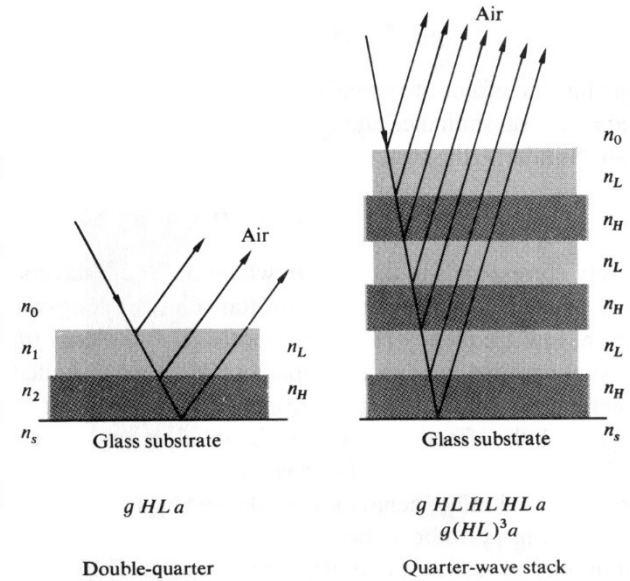


- Une structure de paires des couches avec des indices haut  $n_H$  et bas  $n_L$  , en incidence normale. La matrice de

Pour un nombre N de paires, et  $n_H d_H = n_L d_L = \lambda/4$ ,  $R = \left[ \frac{n_0 n_H^{2N} - n_S n_L^{2N}}{n_0 n_H^{2N} + n_S n_L^{2N}} \right]^2 = \left[ \frac{\frac{n_0}{n_S} \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2N} - 1}{\frac{n_0}{n_S} \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2N} + 1} \right]^2$ .

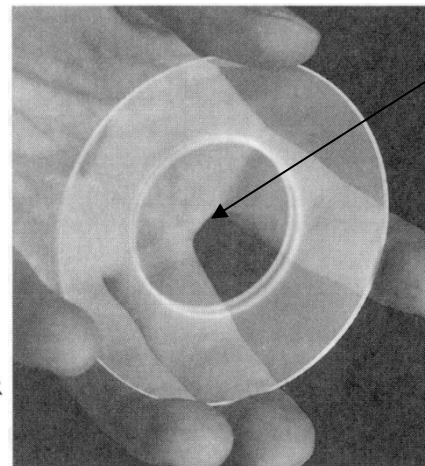
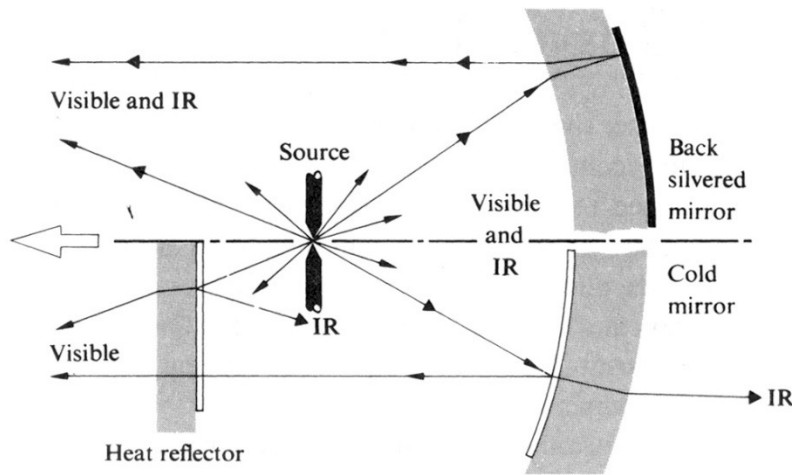
- La gamme de longueur d'onde est limité par la condition de la phase ci-dessus, à:  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{n_H - n_L}{n_H + n_L} \right)$ .

- On l'appelle **miroir de Bragg** .

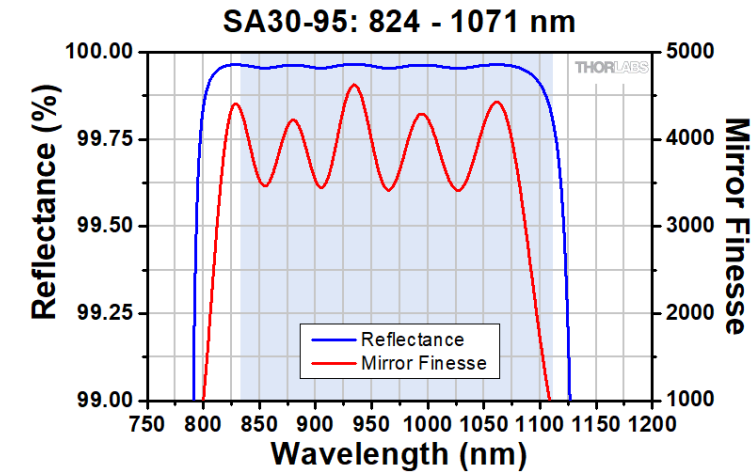


# Bonus: Utilisation des miroirs diélectriques:

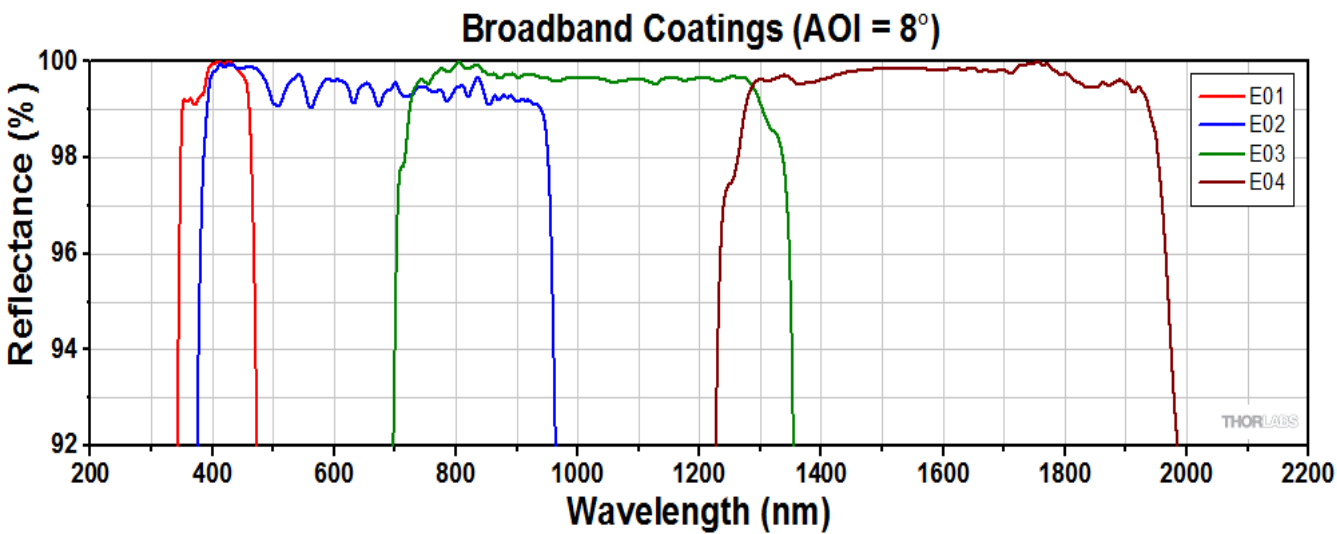
Miroir sélectif IR/visible pour une lampe "froide":



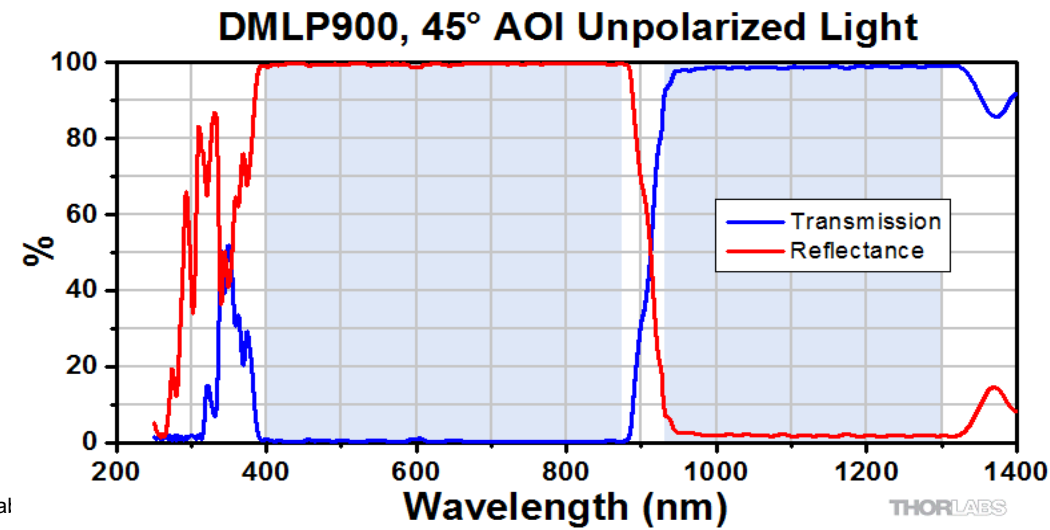
Couches anti-reflet:



... Mais aussi pour des miroirs "parfaits" ( $R > 0.99$ ), pour des faisceaux laser de puissance et pour l'interféromètre F-P



<https://www.thorlabs>



THORLABS

## Bonus: Comparaison des moyens de spectroscopie ( $\lambda=500\text{nm}$ )

Paramètre	Prisme	Réseau	Etalon F-P	FTIR (à $\lambda=1\mu\text{m}$ )
Caractéristiques	Verre N-PK52A $\alpha=30^\circ$ $D=5\text{cm}$	$1200\text{ l/mm}$ $L=5\text{cm}$	$L = 10\text{ mm}$ $F=1000$	$L = 1\text{ cm}$
Dispersion	$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \alpha$ $= 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ rad / nm}$	$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos \theta}$ $= 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad / nm}$	-	$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2 \Delta\sigma} = \frac{x_{\max}}{\lambda}$
Résolution	$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1.22}{D\alpha \frac{dn}{d\lambda}} = 1 \cdot 10^{-3}$ $d\lambda = 500\text{ pm}$	$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} = 1.7 \cdot 10^{-5}$ $d\lambda = 8.5\text{ pm}$	$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{4LF} = 1.2 \cdot 10^{-8}$ $d\lambda = 6.3\text{ pm}$	$\Delta\lambda/\lambda = 10^{-4}$ $d\lambda = 100\text{ pm}$
Gamme spectrale	$300\text{-}2500\text{ nm}$	$\frac{\lambda}{m+1} = 250\text{ nm}$	$\frac{\lambda^2}{4L} = 6.3\text{ nm}$	$1\text{-}100\text{ }\mu\text{m}$