

## Série 3: Loi uniforme, et gaz parfait

### \* Exercice 1      Le gaz parfait

#### *Part I — Une particule quantique dans une boîte*

Une particule de masse  $m$  est confinée dans une enceinte cubique de dimension linéaire  $L$  et de volume  $V = L^3$ .

- Q1.** Donner les états propres du Hamiltonien ainsi que les énergies correspondantes.
- Q2.** Calculer l'énergie des 15 premiers niveaux d'énergie et donner leur dégénérescence  $\Omega(E, V)$ . À quelle propriété du système cette dégénérescence est-elle attribuable ? Comment  $\Omega(E, V)$  varie-t-elle avec  $E$  ?

On cherche à évaluer sommairement la façon dont le nombre de microétats  $\Omega(E, V)$  varie avec  $E$  et  $V$ . Pour cela, on se place dans l'approximation des grands nombres quantiques, de telle façon que l'énergie varie quasi continûment avec les nombres quantiques associés. On suppose donc que la fonction  $\Omega(E, V)$  est alors elle-même une fonction continue de  $E$ .

- Q3.** On considère tout d'abord le cas d'une particule dans une boîte à *une* dimension de taille  $L$ . À partir de l'expression des niveaux d'énergie de la particule évaluer le nombre d'états  $\Phi(E, L)$  d'énergie inférieure ou égale à  $E$ . En déduire l'expression de la densité  $\omega(E, L)$  d'états compris entre les énergies  $E$  et  $E + \delta E$  avec  $\delta E \ll E$ , ainsi que  $\Omega(E, L)$ . Retrouver ce résultat par un calcul classique.
- Q4.** Obtenir la densité d'états  $\omega(E, L)$  en *deux* puis en *trois* dimensions quantiquement et classiquement.
- Q5.** Calculer le nombre de microétats accessibles pour un atome d'argon de masse molaire  $M = 40$  g.mol<sup>-1</sup> d'énergie comprise entre  $E$  et  $E + \delta E$ , où  $E = 6 \cdot 10^{-21}$  J et  $\delta E = 10^{-31}$  J, dans un volume d'un litre.

#### *Part II — Le gaz parfait quantique*

L'enceinte contient  $N$  particules sans interaction et supposées *discernables*. Malgré cette hypothèse nous allons étudier ce système dans le cadre de la mécanique quantique.

- Q1.** Montrer que ce gaz parfait est équivalent à une particule évoluant dans un espace à  $3N$  dimensions. Calculer  $\Phi(E, V, N)$  et  $\omega(E, V, N)$  en vous inspirant de la question **2-4**.

#### *Part III — Le gaz parfait classique*

Le gaz parfait de  $N$  particules de masse  $m$  est traité dans l'approximation classique.

- Q1.** Écrire le Hamiltonien du système.
- Q2.** Exprimer  $\Phi(E, V, N)$  comme une intégrale dans l'espace des phases et interpréter géométriquement l'intégrale sur les impulsions. En déduire  $\Phi(E, V, N)$  et  $\omega(E, V, N)$ .

## \* Exercice 2      Dynamique dans l'espace des phases

Une balle de masse  $m$  est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$ .

- Q1.** Donner le Hamiltonien de ce système. Écrire et intégrer les équations de Hamilton.
- Q2.** En supposant que la balle rebondit élastiquement sur le sol, dessiner le portrait de phase correspondant (trajectoire dans l'espace des phases).

Des particules identiques, de masse  $m$  et sans interactions entre elles, se déplacent verticalement dans le champ de pesanteur  $g$ . À  $t = 0$  leurs points représentatifs dans l'espace des phases se trouvent dans un rectangle dont les quatre sommets ont pour coordonnées  $A(q_A, p_A)$ ,  $B(q_A + \Delta q, p_A)$ ,  $C(q_A + \Delta q, p_A + \Delta p)$  et  $D(q_A, p_A + \Delta p)$ .

- Q3.** Calculer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  et  $D'$  représentant, à l'instant  $t$ , les particules qui se trouvaient initialement aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Calculer les aires des domaines  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$ . Conclusion ?

## \* Exercice 3      Particules discernables et indiscernables

Considérons un système quantique de  $N$  particules. À chaque niveau d'énergie  $E_i$  est associé un nombre d'états quantiques  $g_i$  (dégénérescence). Un état macroscopique d'énergie  $E$  est défini par l'ensemble des nombres  $N_i$  de particules dans chaque niveau d'énergie  $E_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, r$ . On a donc:

$$E = \sum_{i=1}^r N_i E_i, \quad \text{et} \quad N = \sum_{i=1}^r N_i. \quad (41)$$

- Q1.** Montrer que le nombre  $\Omega(E, N)$  de microétats associés à cette répartition  $\{N_i\}_{i=1}^r$  peut se décomposer sous la forme suivante

$$\Omega(E, N) = \Omega_0 \prod_{i=1}^r \Omega_i, \quad (42)$$

où  $\Omega_0$  est le nombre de façons de repartir les  $N$  particules sur  $r$  niveaux d'énergies et  $\Omega_i$  le nombre de façons de distribuer les  $N_i$  particules du niveau d'énergie  $E_i$  parmi les  $g_i$  états quantiques.

### Part I — Particules discernables

Supposons les  $N$  particules *discernables* (elles sont, par exemple, numérotées de 1 à  $N$ ).

- Q1.** Calculer  $\Omega_0$  et  $\Omega_i$  dans le cas où un nombre quelconque de particules peut être dans un même état quantique. En déduire  $\Omega(E, N)$  en fonction des  $N_i$  et des  $g_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, r$ .

### Part II — Particules indiscernables

Supposons à présent les  $N$  particules *indiscernables*.

- Q1.** Quelle est maintenant la valeur de  $\Omega_0$  ?
- Q2.** (*Les bosons*) Calculer  $\Omega_i$  dans le cas où un nombre quelconque de particules peut être dans un même état quantique. En déduire  $\Omega(E, N)$  et son expression dans la limite  $N_i \ll g_i$  (faible densité de particules par niveau).
- Q3.** (*Les fermions*) Calculer  $\Omega_i$  dans le cas où une particule *au plus* peut être dans un état quantique donné. On a alors la condition  $0 \leq N_i \leq g_i$ . En déduire  $\Omega(E, N)$  et son expression dans la limite des faibles densités de particules par niveau.