ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

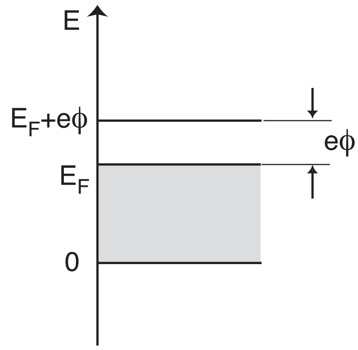
Exercices de Physique du Solide — Prof. H. Brune

Série No. 8 — **8 Avril 2025**

But de cette série : étudier quelques propriétés des métaux qui sont bien décrites par le modèle des électrons libres

1. Emission thermoélectronique

En 1873, Guthrie a découvert qu'un métal chaud émet des électrons. Pour quitter le métal, les électrons doivent avoir suffisamment d'énergie cinétique dans la direction perpendiculaire à la surface pour échapper à l'attraction des ions. Dans cet exercice on cherche à quantifier cette émission d'électrons, dite thermo-électronique (parfois thermoionique).



Une surface métallique plane (cathode) perpendiculaire à l'axe z est portée à la température T. ϕ est le potentiel d'extraction des électrons libres (de conduction), eϕ est le travail de sortie.

Par simplicité, on va approximer le potentiel chimique $\mu(T)$ par sa valeur à $T = 0$, c'est-à-dire E_F.

(a) Dans l'espace des vecteurs d'onde, on repère par k_x, k_y et k_z la position d'un élément de volume de dimensions dk_x, dk_y et dk_z. Quelle condition, exprimée sous la forme d'une inégalité, est imposée sur la composante k_z du vecteur d'onde pour que les électrons contenus dans cet élément de volume soient susceptibles de sortir du métal ?

Indication : passer d'une condition sur la composante de la vitesse à une condition sur la composante de k.

(b) Montrer que la densité d'électrons dn dans l'élément $dk_xdk_ydk_z$ à la température T est donné par :

$$dn = \frac{dk_xdk_ydk_z}{4\pi^3}\, f(E)$$

(c) Déduire l'expression de la densité de courant élémentaire dj_z en fonction de T :

$$dj_z = -\frac{e}{4\pi^3}\,\frac{\hbar k_z}{m}\,\exp(\frac{E_F}{\mathrm{k}_BT})\,\exp(-\frac{\hbar^2k^2}{2m\mathrm{k}_BT})\,dk_xdk_ydk_z$$

Indication : faire une approximation pour la distribution de Fermi-Dirac en tenant compte du fait que $e\phi \gg \mathrm{k}_BT$.

(d) En déduire la densité de courant totale émise par la cathode. Montrer que le résultat final peut se mettre sous la forme (loi de Richardson-Dushman) :

$$j_z = A\,T^2\,\exp\left(-\frac{e\phi}{\mathrm{k}_BT}\right)$$

Expliciter l'expression et la valeur numérique de A.

Indications :

- dans l'intégration, pour les valeurs de k_z on considère bien la condition trouvée dans la partie (a) ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(e) En réalité les valeurs expérimentales de A dependent du matériau et sont inférieures à la valeur théorique qui néglige en particulier la réflexion interne, sur l'interface métal/vide, des électrons susceptibles de sortir de la cathode. A partir des données expérimentales de A et de ϕ données dans le tableau ci-dessous, évaluer les densités de courant émises par les cathodes respectives, chacune étant portée à une température de fonctionnement T_{fonct} légèrement inférieure à la température de fusion.

	cathodes		
	W	BaO + SrO sur Ni	LaB_6
A (10^4 A m^{-2} K^{-2})	75	0.05	40
ϕ (V)	4.5	1	2.4
T_{fonct} (K)	2700	1100	1800

2. Conductivité électrique dans le modèle de Sommerfeld - Temps de vol

Dans le modèle de Sommerfeld, la probabilité de collision d'un électron avec un ion du réseau est supposée indépendante du temps. La probabilité qu'un électron subisse une collision durant l'intervalle de temps infinitésimal dt est proportionnelle à dt, soit $\dfrac{dt}{\tau}$. La constante τ qui caractérise la collision s'appelle temps de relaxation.

(a) Montrer qu'un électron pris au hasard à l'instant $t = 0$ ne subira aucune collision pendant le temps t à venir avec une probabilité $e^{-t/\tau}$.

(b) Montrer que la probabilité qu'il subisse sa première collision entre t et $t + dt$ est donnée par $\dfrac{dt}{\tau}e^{-t/\tau}$.

(c) Montrer que, pour un électron donné, le temps moyen entre deux collisions (ou temps de vol moyen ou temps de relaxation) est égal à τ.

Indication : $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad (n > 0, a > 0).$

3. Conductivité électrique dans le modèle de Sommerfeld

Dans le modèle de Sommerfeld la densité de courant s'écrit

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2}{4\pi^3\,\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\,\tau(\mathbf{k})\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{k}}\right)\mathbf{v}(\mathbf{k})$$

τ est le temps de vol. f_0 est la distribution de Fermi-Dirac en termes de $\mathbf{k}$. $\mathbf{v}$ est la vitesse des électrons. $\mathbf{E}$ est le champ électrique appliqué. Nous considérons ici $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$.

Montrer que pour un gaz d'électrons libres à $T = 0$ K

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{ne^2\tau(E_F)}{m}.$$

Indications :

$\dfrac{\partial f_0}{\partial E} = -\delta(E - E_F) \qquad$ (E est l'énergie) ;

utiliser les coordonnées sphériques pour calculer les intégrales ;

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \qquad \int \sin^3 x\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.