

But de cette série : se familiariser avec les liaisons cristallines et la description des réseaux

1. Potentiel de Lennard-Jones

Le potentiel de Lennard-Jones peut être utilisé pour décrire l'interaction entre deux atomes d'un gaz monoatomique de type gaz rare en fonction de leur distance r . L'énergie potentielle associée est de la forme

$$U_{\text{LJ}}(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

Le terme à la puissance 6, appelé interaction de van der Waals, est attractif et domine à grande distance. Le terme à la puissance 12 est répulsif et domine à courte distance. Il rend compte de la répulsion de Pauli entre les électrons, qui empêche l'interpénétration mutuelle des nuages électroniques de deux atomes.

- (a) Trouver la distance d'équilibre r_0 .
- (b) Trouver l'énergie d'interaction à l'équilibre.

2. Constante de Madelung

Les cristaux ioniques sont formés d'ions positifs et négatifs. La liaison ionique résulte essentiellement de l'interaction électrostatique (coulombienne) entre ions de charge opposée.

Pour calculer l'énergie due à cette interaction, on peut considérer un ion de référence, et faire la somme des contributions dues aux autres ions. La convergence de ce type de somme est conditionnelle, c.a-d. que certaines façons de calculer la somme, de choisir les termes de la somme, ne sont pas adéquates. De plus, la convergence est très lente et non-monotone. Des techniques de calcul des ces sommes existent : deux exemples sont discutés dans l'exercice.

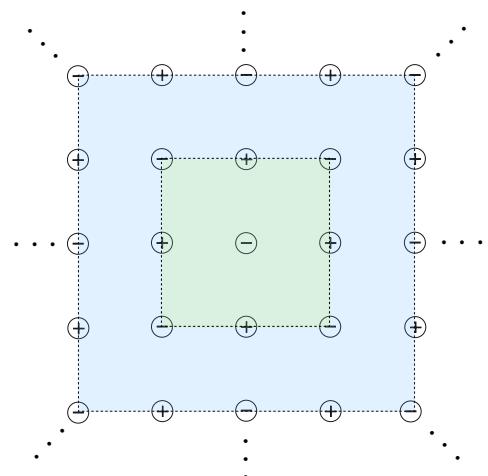
- (a) Cas unidimensionnel (1D) : Considérer une chaîne infinie d'ions de signes alternés (+) et (-), avec d_0 la distance entre deux ions adjacents. Calculer la constante de Madelung M_{d1D} pour ce cristal ionique unidimensionnel.

L'astuce ici est de reconnaître une série. On rappelle que $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

- (b) Cas bidimensionnel (2D) : Considérer un réseau ionique plan où les ions s'alternent comme dans la figure ci-contre, où seulement une petite portion du cristal est représentée. La distance entre deux ions plus proches voisins est d_0 . On va évaluer la constante de Madelung M_{d2D} en utilisant la méthode de Evjen.

Cette méthode de calcul consiste à appairer les charges en groupes neutres, ce qui permet une convergence rapide de la somme. Dans le cas bidimensionnel traité ici, une fois l'origine choisie, il faut considérer les fractions de charges contenues dans le premier carré ; ensuite les fractions de charges entre le premier et le deuxième carré, et ainsi de suite.

Evaluer la constante de M_{d2D} avec une précision de 10^{-2} .



3. Réseau de Bravais, cellules (mailles), base

Considérer les trois cristaux bidimensionnel dans la figure ci-dessous. Les points noirs et gris représentent différentes espèces d'atomes. Les distances entre atomes sont indiquées. Pour chaque cristal :

- dessiner un exemple de cellule (ou maille) primitive et donner les vecteurs primitifs ;
- dessiner un exemple de cellule (ou maille) conventionnelle ;
- identifier la base ;
- identifier les noeuds du réseau de Bravais ;
- dessiner la cellule (ou maille) de Wigner-Seitz.

