Introduction à la physique des Plasmas – Dr. Joaquim Loizu – Swiss Plasma Center

Semestre Printemps 2025 *Cassandre Contré*

Exercices - Série 9

Exercice 1

Dans le cadre de la MHD résistive, on considère un plasma de résistivité η et de vitesse fluide

$$\vec{u} = \omega(x\hat{x} - y\hat{y}),$$

supposée maintenue ainsi à tout moment, avec $\omega = const$. Le mouvement du plasma est donc dans le plan (x, y). Le plasma est immergé initialement dans un champ magnétique

$$\vec{B}(\vec{x}, t = 0) = B_0 \cos(k_0 y)\hat{x}.$$

avec k_0 et B_0 des constantes. On va montrer comment ce champ est amplifié (effet dynamo) puis dissipé (effet resistif).

a) En partant de l'expression pour la dérivée temporelle du champ magnétique de la MHD :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) + \frac{\eta}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla}^2 \vec{B}. \tag{1}$$

montrez que celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B + \omega y \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \tag{2}$$

en remarquant que, pour tout $t > 0$, $\vec{B} = B(y, t)\hat{x}$.

b) En utilisant l'ansatz $B(y, t) = \hat{B}(t) \cos(k(t)y)$, trouvez l'expression de $k(t)$ et $\hat{B}(t)$.

c) A partir de l'expression de $\hat{B}(t)$ de la question précédente, calculez le temps t^* pour lequel le champ magnétique est maximum.

Exercice 2

On considère deux éléments infinitésimaux de plasma positionnés sur la même ligne de champ magnétique dans le cadre de la MHD idéale. Si la distance entre ces deux éléments est $\vec{\Delta l}$, initialement le long de la ligne de champ magnétique, montrez que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Delta l} \times \vec{B}\right) = 0 \tag{3}$$

avec $\frac{d}{dt}$ la dérivée totale. Aidez-vous pour cela du dessin ci-contre et de la relation

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{\Delta l}) \simeq \vec{u}(\vec{x}) + (\vec{\Delta l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}.$$