

## Exercices - Série 8

### Exercice 1

Montrez que dans le modèle à deux fluides, les équations de Maxwell  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$  et  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  sont automatiquement satisfaites si elles le sont à  $t = 0$ . Ici  $\rho_{el}$  est la densité de charge électrique.

### Exercice 2

Dans le modèle de la MHD, l'expression de l'énergie totale du plasma  $E_{\text{MHD}}$  peut s'écrire comme

$$E_{\text{MHD}} = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV. \quad (1)$$

où  $V$  est le volume total du plasma. On peut identifier le premier terme comme l'énergie cinétique, le deuxième comme l'énergie thermique et le troisième comme l'énergie magnétique du plasma.

On cherche à montrer que cette énergie est conservée au cours du temps dans la limite de la MHD idéale ( $\eta = 0$ ) et en supposant que le bord du plasma est un conducteur parfait, c'est dire  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{E} \times \vec{n} = 0$  au bord du plasma, avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à ce bord.

a) En utilisant l'équation de Newton, montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{2} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u^2. \quad (2)$$

b) En partant de l'équation d'état, montrez que :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} = \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \cdot (p \vec{u}). \quad (3)$$

c) Montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) = -\mu_0 (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (4)$$

en partant du terme de force de Lorentz magnétique (premier terme à droite de l'équation) et en utilisant la loi d'Ampère, d'Ohm et de Faraday.

d) Combinez les expressions obtenues en a), b) et c) pour obtenir une équation de continuité pour l'énergie du plasma, et montrez que cette quantité est conservée au cours du temps.