Exercices - Série 5

Exercice 1

Cet exercice est en lien avec l'application COMSOL disponible à l'adresse suivante :
http://sbcomsol.epfl.ch:2036/app/magnetic_bottle_app_v5b_mph.

On considère une particule chargée dans un mirroir magnétique produit par deux bobines circulaires C_1 et C_2 de rayon $R_c = 0.05$ m, disposées de manière parallèle et séparées d'une distance $L = 0.2$ m. Les bobines ont $N = 100$ tours et sont traversées par un courant $I = 100$ A. Sur l'axe z passant par le centre des bobines, on libère un proton de masse $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$kg de manière équidistante aux deux bobines, avec une énergie $E_0 = 5$ eV et un rapport de vitesse $|v_\perp|/|v| = \alpha$.

a) Calculez le rapport miroir R_m de cette configuration en utilisant l'expression du champ magnétique à l'axe, généré par une bobine idéale.

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIR_c^2}{((z - z_0)^2 + R_c^2)^{3/2}} \tag{1}$$

b) Calculez le rapport de vitesse critique minimum à l'axe α_c pour lequel une particule chargée est piégée.

c) Utilisez l'application pour tracer la trajectoire de trois protons de rapport vitesse initial $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.43$ et $\alpha_3 = 0.9$.

d) Utilisez l'application pour tracer la trajectoire d'un proton avec $E_0 = 1$ eV et $\alpha = 0.9$. Expliquez qualitativement la raison de la dérive azimutale de la particule générée initialement loin de l'axe.

Exercice 2

En coordonnées sphériques, le champ magnétique terrestre peut être approximé par celui d'un dipôle :

$$B_r\,(r, \theta) = -2\,\frac{B_T R_T^3}{r^3}\sin(\theta)$$

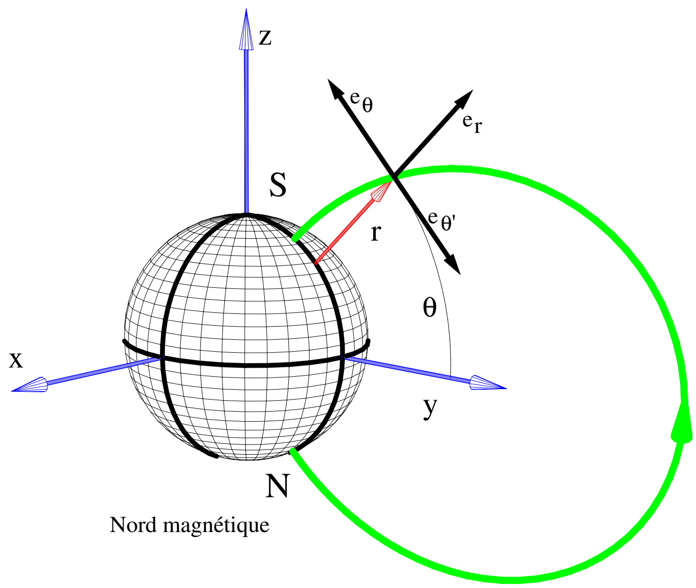
$$B_\theta\,(r, \theta) = \frac{B_T R_T^3}{r^3}\cos(\theta)$$

où R_T et B_T sont le rayon terrestre ($R_T = 6.5 \times 10^6$ m) et le champ magnétique à la surface de la terre R_T ($B_T = 0.32 \times 10^{-4}$ T). Notez que θ n'est pas l'angle polaire usuel θ' mais $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$ (θ est la latitude magnétique, voir figure ci-dessous).

a) Calculez $B = |\vec{B}|$ et $\boldsymbol{\nabla} B$ en fonction de r et θ'.

Indication : En coordonnées sphériques (r, θ', ϕ), le gradient est donné par :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta'}\hat{e}_{\theta'} + \frac{1}{r\sin(\theta')}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi$$



b) Les ions piégés dans le champ magnétique terrestre sont des protons dont l'énergie peut atteindre 1 MeV. Montrer que pour ces protons la condition d'adiabaticité :

$$\rho_L \frac{\left|\vec{\nabla} B\right|}{B} << 1$$

est vérifiée et donc qu'elle l'est à fortiori pour les électrons de même énergie.

c) Les particules piégées dans le champ magnétique terrestre suivent trois mouvements périodiques. Discutez qualitativement de leur nature et de leur origine.

d) Calculez la vitesse de dérive $\vec{v}_{\boldsymbol{\nabla} B}$ due à l'inhomogénéité de $\vec{B}$. Estimez sa valeur et sa direction pour un proton à l'équateur sur une ligne de champ telle que $r(\theta = 0) = R_0 = 4R_T$. Une ligne de champ (c'est-à-dire une ligne qui en tout point est tangente à $\overrightarrow{B}$) est donnée par $r = R_0 \cos^2(\theta)$, où R_0 est la valeur de r à l'équateur ($\theta = 0$). On considère $v_\parallel = v_\perp$ et une énergie de 1 keV.

e) Pour des électrons et des protons de 1 keV sur les lignes de champ magnétiques définies par $R_0 = 4R_T$, estimez les quantités suivantes :

1. la période cyclotronique ;
2. le temps mis pour en allez-retour pour les particules piégées $\sim \frac{R_0}{v_\parallel}$;
3. le temps mis pour dériver autour de la terre.

On supposera que à l'équateur $v_\parallel \sim v_\perp \sim v_{th}$.