Exercices - Série 12

Exercice 1

Dans la MHD, prouver que la force de Lorentz peut s'écrire comme :

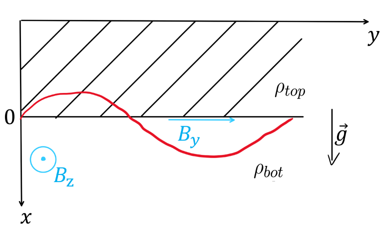
$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0} \vec{\kappa} \tag{1}$$

avec $\vec{\nabla}_\perp = \vec{\nabla} - \vec{\nabla}_\parallel$, $\vec{\nabla}_\parallel = \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})$ le gradient orthogonal au champ, le vecteur unitaire $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ et la courbure magnétique $\vec{\kappa} = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$.

Exercice 2

Dans le cadre de la MHD idéale, on considère un plasma à l'équilibre de densité

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{top} & \text{si } x \leq 0 \\ \rho_{bot} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$



plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_z\hat{z} + B_y\hat{y}$, et soumis au champ gravitationel terrestre d'accélération $\vec{g} = g\hat{x}$ (dans un tore, la courbure $\vec{\kappa}$ ferait office de champ $\vec{g}$, sachant que la gravitation y est négligeable). On suppose de plus que dans cette configuration, il existe un équilibre statique ($\vec{u}_0 = 0$).

On étudie alors la stabilité de ce plasma par rapport à une perturbation imposée par un vecteur déplacement de la forme

$$\vec{\xi} = \xi_x(x) \exp(iky - i\omega t)\hat{x} + \xi_y(x) \exp(iky - i\omega t)\hat{y}.$$

En considérant des modes incompressibles, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$,

1. écrivez l'équation de continuité, du mouvement et d'Ohm-Faraday linéarisées, ainsi que l'équation d'incompressibilité $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$, qui forment un système complet,
2. exprimez les quantités perturbées $\vec{B}_1$, $\vec{j}_1$ et ρ_1 en fonction de $\vec{\xi}$,
3. en projetant puis en intégrant l'équation du mouvement linéarisée selon $\hat{y}$, trouver une expression à l'ordre 1 de la perturbation en pression, p_1. On imposera pour cela $\langle p_1 \rangle_{y,t=0} = 0$.
4. en projetant l'équation du mouvement linéarisée selon $\hat{x}$, réduisez le système d'équations à une équation différentielle pour $\xi \equiv \xi_x(x)$,
5. trouvez la solution pour $\xi(x)$ pour $x < 0$ et $x > 0$ en supposant que ξ est continu et que $\lim_{|x| \to \infty} \xi = 0$.
6. en intégrant l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$, trouvez la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_{bot} - \rho_{top}}{\rho_{bot} + \rho_{top}} + \frac{2}{\mu_0} \frac{k^2 B_y^2}{\rho_{top} + \rho_{bot}}. \tag{2}$$

Montrez que $\vec{B}$ a un effet stabilisant quand la perturbation déforme les lignes de $\vec{B}$, et que si $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$, et $\rho_{bot} < \rho_{top}$, alors on a toujours instabilité. Cette instabilité est l'instabilité de Rayleigh-Taylor.