Corrigé des exercices - Série 9

Exercice 1

Dans le cadre de la MHD résistive, on considère un plasma de résistivité η et de vitesse fluide

$$\vec{u} = \omega(x\hat{x} - y\hat{y}),$$

supposée maintenue ainsi à tout moment, avec $\omega = const$. Le mouvement du plasma est donc dans le plan (x, y). Le plasma est immergé initialement dans un champ magnétique

$$\vec{B}(\vec{x}, t = 0) = B_0 \cos(k_0 y)\hat{x}.$$

avec k_0 et B_0 des constantes. On va montrer comment ce champ est amplifié (effet dynamo) puis dissipé (effet resistif).

a) En partant de l'expression pour la dérivée temporelle du champ magnétique de la MHD :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) + \frac{\eta}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}^2\vec{B}. \tag{1}$$

montrez que celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B + \omega y \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\eta}{\mu_0}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \tag{2}$$

en remarquant que, pour tout $t > 0$, $\vec{B} = B(y, t)\hat{x}$.

b) En utilisant l'ansatz $B(y, t) = \hat{B}(t)\cos(k(t)y)$, trouvez l'expression de $k(t)$ et $\hat{B}(t)$.

c) A partir de l'expression de $\hat{B}(t)$ de la question précédente, calculez le temps t^* pour lequel le champ magnétique est maximum.

Corrigé

a) On remarque d'abord que, puisque $\vec{B}(t = 0)$ est dirigé selon $\hat{x}$ et que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}|_{t=0} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}|_{t=0} = 0$, alors l'équation 1 est linéaire en $\vec{B}$ (pas de terme de source), de sorte que ces propriétés restent vraies pour sa dérivée temporelle $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}|_{t=0}$. Ainsi, en supposant toujours que seul le couplage avec le plasma (Eq. 1) agit sur la composante du champ B_x, nous pouvons en déduire que ces symétries se propagent dans le temps, de sorte que pour tout $t > 0$, $\vec{B} = B(y, t)\hat{x}$. Il ne reste plus qu'à prouver que dans ce cas l'équation 2 se vérifie.

Calculons le produit vectoriel entre la vitesse fluide et le champ magnétique

$$\vec{u} \times \vec{B} = \omega y B(y, t)\hat{z}, \tag{3}$$

puis son rotationnel

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = \omega\frac{\partial y B(y, t)}{\partial y}\hat{x} = \omega B(y, t)\hat{x} + \omega y\frac{\partial B(y, t)}{\partial y}\hat{x}. \tag{4}$$

De plus comme le champ magnétique ne dépend que de y, on obtient pour l'équation 1

$$\frac{\partial \vec{B}(y,t)}{\partial t} = \omega B(y,t)\hat{x} + \omega y \frac{\partial B(y,t)}{\partial y}\hat{x} + \frac{\eta}{\mu_0}\frac{\partial^2 B(y,t)}{\partial y^2}\hat{x}. \tag{5}$$

On peut alors projeter cette équation dans la direction $\hat{x}$ et on trouve l'expression de la donnée

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B + \omega y \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\eta}{\mu_0}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}. \tag{6}$$

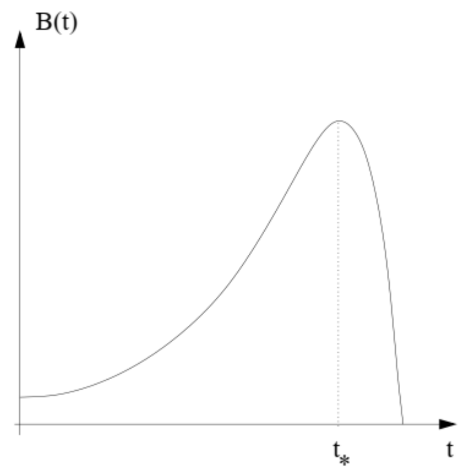


FIGURE 1 – Évolution temporelle de l'amplitude du champ magnétique du aux effets dynamo puis à la dissipation Ohmique.

b) On utilise ici l'ansatz dans l'équation 6

$$\cos(k(t)y)\frac{\partial \hat{B}(t)}{\partial t} - \hat{B}(t)y\sin(k(t)y)\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \omega \hat{B}(t)\cos(k(t)y) - \omega y \sin(k(t)y)k(t)\hat{B}(t) - \frac{\eta}{\mu_0}\hat{B}(t)k^2(t)\cos(k(t)y). \tag{7}$$

Pour que cette équation soit vérifiée quel que soit y et quel que soit t, il faut que les termes proportionnels à $\cos(k(t)y)$ s'annulent entre eux. De même pour les termes proportionnels à $\sin(k(t)y)$. Ces termes sont linéairement indépendants, et on peut donc séparer cette équation entre les termes en sinus et les termes en cosinus.
Prenons d'abord les termes en sinus :

$$\hat{B}(t)y\sin(k(t)y)\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \omega \hat{B}(t)y\sin(k(t)y)k(t), \tag{8}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \omega k(t). \tag{9}$$

La solution de cette équation différentielle en appliquant les conditions initiales devient

$$k(t) = k_0 \exp(\omega t). \tag{10}$$

On considère ensuite les termes en $\cos(k(t)y)$ de l'équation 7 en utilisant la solution pour $k(t)$

$$\frac{\partial \hat{B}(t)}{\partial t} = \omega \hat{B}(t) - \frac{\eta}{\mu_0}\hat{B}(t)k_0^2\exp(2\omega t). \tag{11}$$

En appliquant les conditions initiales la solution de cette équation est

$$\hat{B}(t) = B_0 \exp\left(\omega t - \frac{k_0^2 \eta}{2\omega\mu_0}(\exp(2\omega t) - 1)\right). \tag{12}$$

L'amplitude du champ magnétique va donc avoir une croissance exponentielle jusqu'à atteindre un maximum, puis va décroître à cause de la dissipation Ohmique pour devenir nul. Ce comportement est représenté à la figure 1. De plus, à cause de la dépendance temporelle de k, les lignes de champ magnétique vont se comprimer comme représenté à la figure 2.

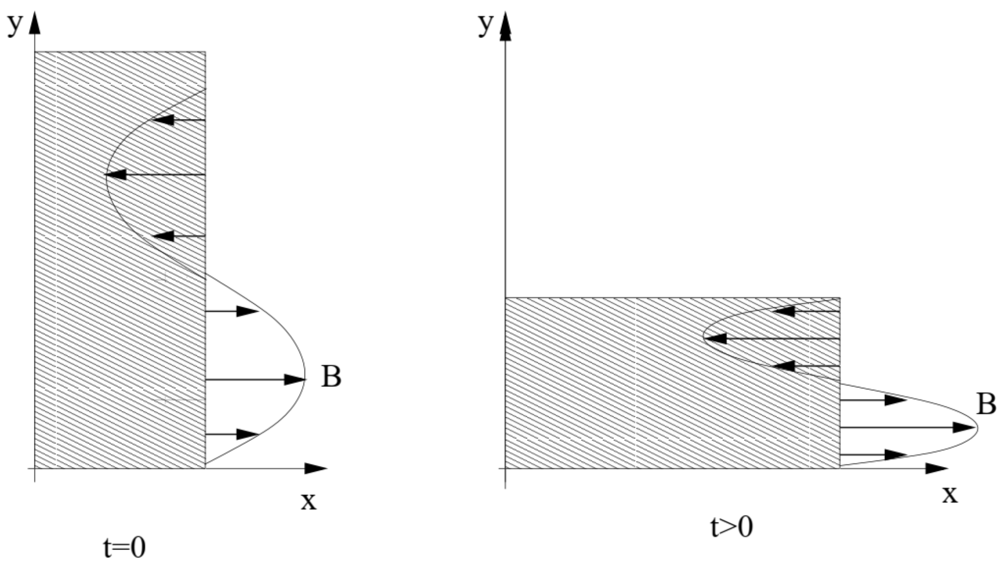


Figure 2 – Evolution de l'amplitude du champ magnétique entre le temps initial et un temps t positif.

c) Le champ magnétique est maximum au temps t^* quand

$$\left.\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|_{t=t^*} = 0. \tag{13}$$

Ceci peut être calculé à partir de l'équation 11

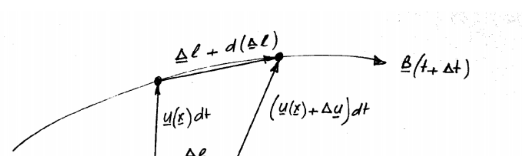
$$\omega - \frac{\eta}{\mu_0} k_0^2 \exp(2\omega t^*) = 0, \tag{14}$$

ce qui donne

$$t^* = \frac{1}{2\omega} \log\left(\frac{\omega\mu_0}{\eta k_0^2}\right) \tag{15}$$

Exercice 2

On considère deux éléments infinitésimaux de plasma positionnés sur la même ligne de champ magnétique dans le cadre de la MHD idéale. Si la distance entre



ces deux éléments est $\vec{\Delta l}$, initialement le long de la ligne de champ magnétique, montrez que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Delta l} \times \vec{B}\right) = 0 \tag{16}$$

avec $\frac{d}{dt}$ la dérivée totale. Aidez-vous pour cela du dessin ci-contre et de la relation

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{\Delta l}) \simeq \vec{u}(\vec{x}) + (\vec{\Delta l} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u}.$$

Corrigé

On commence par développer la dérivée temporelle 16

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Delta l} \times \vec{B}\right) = \vec{\Delta l} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} - B \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Delta l}. \tag{17}$$

La dérivée temporelle du champ magnétique peut se calculer en appliquant Faraday

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathbf{\nabla} \times \vec{E} \tag{18}$$

et la loi d'Ohm

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} \tag{19}$$

pour donner

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \mathbf{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = \underbrace{\vec{u}(\mathbf{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \vec{B}(\mathbf{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{B} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{B}. \tag{20}$$

Où on a appliqué une identité du rotationnel d'un produit vectoriel (voir NRL). On peut compléter cette dérivée partielle pour obtenir la dérivée totale du champ magnétique en suivant le mouvement du plasma

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{B} \\ &= -\vec{B}(\mathbf{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{B} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{B} + (\vec{u} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{B} \\ &= (\vec{B} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u} - \vec{B}(\mathbf{\nabla} \cdot \vec{u}).\end{aligned} \tag{21}$$

Pour calculer la dérivée temporelle de $\vec{\Delta l}$, on utilise le dessin de la donnée en remarquant que

$$\vec{u}(\vec{x})dt + \vec{\Delta l} + d(\vec{\Delta l}) = \vec{\Delta l} + \vec{u}(\vec{x} + \vec{\Delta l})dt. \tag{22}$$

En utilisant de plus l'indication, on trouve

$$\vec{u}(\vec{x})dt + d(\vec{\Delta l}) = [\vec{u}(\vec{x}) + (\vec{\Delta l} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u}]dt, \tag{23}$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Delta l} = (\vec{\Delta l} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u}. \tag{24}$$

On peut finalement combiner les deux dérivées temporelles totales dans l'équation 17

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Delta l} \times \vec{B}\right) = \vec{\Delta l} \times [(\vec{B} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u} - \vec{B}(\mathbf{\nabla} \cdot \vec{u})] - \vec{B} \times [(\vec{\Delta l} \cdot \mathbf{\nabla})\vec{u}], \tag{25}$$

et en utilisant le fait que $\vec{\Delta l} \parallel \vec{B}$, c'est à dire $\vec{\Delta l} = \alpha \vec{B}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Delta l} \times \vec{B}\right) &= \underbrace{\vec{\Delta l} \times [-\vec{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u})}_{=0} + (\vec{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] - \vec{B} \times [(\vec{\Delta l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] \\ &= \alpha\vec{B} \times [(\vec{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] - \vec{B} \times [(\alpha\vec{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] \\ &= \alpha\vec{B} \times [(\vec{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] - \alpha\vec{B} \times [(\vec{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{u}] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$