

Corrigé des exercices - Série 8

Exercice 1

Montrez que dans le modèle à deux fluides, les équations de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$ et $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sont automatiquement satisfaites si elles le sont à $t = 0$. Ici ρ_{el} est la densité de charge électrique.

Corrigé

Divergence du champ électrique

On applique la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right). \quad (1)$$

On utilise ensuite la loi d'Ampère :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = \nabla \cdot \left(-c^2 \mu_0 \vec{j} + c^2 \nabla \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{j}. \quad (2)$$

Car par propriété de la divergence du rotationnel le deuxième terme est nul. On utilise ensuite l'équation de continuité pour les ions et les électrons. En multipliant chacune de ces équations par la charge et en les ajoutant, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3)$$

et donc

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E}. \quad (4)$$

Finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}. \quad (5)$$

Ainsi si $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$ au temps initial alors $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$ à n'importe quel temps.

Divergence du champ magnétique

On commence par appliquer la dérivée temporelle.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right). \quad (6)$$

On utilise ensuite la loi de Faraday :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = \nabla \cdot \left(-\nabla \times \vec{E} \right). \quad (7)$$

Par propriété de la divergence du rotationnel :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0. \quad (8)$$

Ainsi si $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ au temps initial alors $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ à n'importe quel temps.

Exercice 2

Dans le modèle de la MHD, l'expression de l'énergie totale du plasma E_{MHD} peut s'écrire comme

$$E_{\text{MHD}} = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV. \quad (9)$$

où V est le volume total du plasma. On peut identifier le premier terme comme l'énergie cinétique, le deuxième comme l'énergie thermique et le troisième comme l'énergie magnétique du plasma.

On cherche à montrer que cette énergie est conservée au cours du temps dans la limite de la MHD idéale ($\eta = 0$) et en supposant que le bord du plasma est un conducteur parfait, c'est dire $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{E} \times \vec{n} = 0$ au bord du plasma, avec \vec{n} le vecteur normal à ce bord.

a) En utilisant l'équation de Newton, montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{2} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u^2. \quad (10)$$

b) En partant de l'équation d'état, montrez que :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} = \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \cdot (p \vec{u}). \quad (11)$$

c) Montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) = -\mu_0 (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (12)$$

en partant du terme de force de Lorentz magnétique (premier terme à droite de l'équation) et en utilisant la loi d'Ampère, d'Ohm et de Faraday.

d) Combinez les expressions obtenues en a), b) et c) pour obtenir une équation de continuité pour l'énergie du plasma, et montrez que cette quantité est conservée au cours du temps.

Corrigé

On considère la dérivée temporelle de chaque terme un à un.

a) Energie cinétique

On commence avec la dérivée temporelle de l'énergie cinétique. Pour cela on multiplie l'équation de Newton par \vec{u}

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p. \quad (13)$$

On utilise les propriétés de la dérivée temporelle totale et de la dérivée de produits de fonctions

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{1}{2} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u^2. \quad (14)$$

Ceci donne en remplaçant l'équation 13 dans 14

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{2} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u^2. \quad (15)$$

b) Energie thermique

Pour ce terme on part de l'équation d'état :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -p\gamma\rho^{-\gamma-1} \frac{d\rho}{dt} + \rho^{-\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho^{-\gamma} \vec{u} \cdot \nabla p = 0. \quad (16)$$

Ce qui donne en développant la dérivée temporelle totale et en utilisant l'équation de continuité

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla p - p\gamma\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} &= \vec{u} \cdot \nabla p - p\gamma\rho^{-1} (-\nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \vec{u} \cdot \nabla \rho) + \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \vec{u} \cdot \nabla p + p\gamma \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma (\nabla \cdot (p\vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Donc

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla \cdot (p\vec{u}). \quad (18)$$

c) Energie magnétique

On part ici du terme de force de Lorentz magnétique obtenu à l'équation 15 et on utilise Ampère puis une identité de produits vectoriels :

$$\mu_0 \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} = \left[\left(\nabla \times \vec{B} \right) \times \vec{B} \right] \cdot \vec{u} = \left(\vec{B} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right). \quad (19)$$

On utilise ensuite la loi d'Ohm puis encore une identité vectorielle :

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} &= \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) \\ &= \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

On applique Faraday

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} &= -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Au final :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) = -\mu_0 \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \quad (22)$$

d) Combinaison des termes

On combine les trois termes obtenu précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) &= \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u}} - \cancel{\vec{u} \cdot \nabla p} - \frac{1}{2} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u^2 \\ &\quad + \cancel{\vec{u} \cdot \nabla p} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \cdot (p\vec{u}) \\ &\quad - \cancel{\left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u}} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

On utilise ensuite l'équation de continuité de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (24)$$

pour obtenir une expression de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}). \quad (25)$$

On peut aussi identifier à partir des termes dépendant de ρ une divergence de produit :

$$\nabla \cdot \left(\rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \right) = \frac{1}{2} u^2 \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \nabla u^2. \quad (26)$$

On remplace dans l'équation 23 les expressions des dérivées temporelles de la densité de masse et l'équation 26

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left(\rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \right) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \cdot (p\vec{u}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B} \right). \quad (27)$$

On peut finalement prendre l'intégrale volumique de chaque côté de l'égalité, utiliser le théorème de la divergence et appliquer les conditions aux bords :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] dV = \int_S \left[- \left(\rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \cdot \vec{n} \right) - \frac{\gamma p \vec{u} \cdot \vec{n}}{\gamma - 1} - \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \right] dS = 0. \quad (28)$$

où la deuxième intégrale est nulle car le bord du plasma est un conducteur parfait, et donc $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{E} \times \vec{n} = 0$, ce qui implique que $(\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} = 0$ et, par la loi d'Ohm idéale, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. On vient de prouver que $\frac{\partial}{\partial t} E_{MHD} = 0$.