

## Corrigé des exercices - Série 5

## Exercice 1

Cet exercice est en lien avec l'application COMSOL disponible à l'adresse suivante :  
[http://sbcomsol.epfl.ch:2036/app/magnetic\\_bottle\\_app\\_v5b\\_mph](http://sbcomsol.epfl.ch:2036/app/magnetic_bottle_app_v5b_mph).

On considère une particule chargée dans un miroir magnétique produit par deux bobines circulaires  $C_1$  et  $C_2$  de rayon  $R_c = 0.05$  m, disposées de manière parallèle et séparées d'une distance  $L = 0.2$  m. Les bobines ont  $N = 100$  tours et sont traversées par un courant  $I = 100$  A. Sur l'axe  $z$  passant par le centre des bobines, on libère un proton de masse  $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg de manière équidistante aux deux bobines, avec une énergie  $E_0 = 5$  eV et un rapport de vitesse  $|v_\perp|/|v| = \alpha$ .

- a) Calculez le rapport miroir  $R_m$  de cette configuration en utilisant l'expression du champ magnétique à l'axe, généré par une bobine idéale.

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIR_c^2}{((z - z_0)^2 + R_c^2)^{3/2}} \quad (1)$$

- b) Calculez le rapport de vitesse critique minimum à l'axe  $\alpha_c$  pour lequel une particule chargée est piégée.
- c) Utilisez l'application pour tracer la trajectoire de trois protons de rapport vitesse initial  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\alpha_2 = 0.43$  et  $\alpha_3 = 0.9$ .
- d) Utilisez l'application pour tracer la trajectoire d'un proton avec  $E_0 = 1$  eV et  $\alpha = 0.9$ . Expliquez qualitativement la raison de la dérive azimutale de la particule générée initialement loin de l'axe.

## Corrigé

- a) Le champ magnétique généré à l'axe par les deux bobines est :

$$B_z(z) = B_{z1}(z) + B_{z2}(z) = \frac{\mu_0 N I R_c^2}{2} \left( \frac{1}{((z - z_1)^2 + R_c^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z - z_2)^2 + R_c^2)^{3/2}} \right). \quad (2)$$

Le champ magnétique est maximum en  $z = z_1$  et  $z = z_2$

$$B_{z,\max} = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{R_c} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R_c^2}{(L^2 + R_c^2)^{3/2}} = 127 \text{ mT}, \quad (3)$$

et est minimum en  $z = 0$

$$B_{z,\min} = \frac{\mu_0 N I R_c^2}{((L/2)^2 + R_c^2)^{3/2}} = 22.5 \text{ mT}. \quad (4)$$

Le rapport miroir à l'axe est donc

$$R_m = \frac{B_{z,\max}}{B_{z,\min}} = 5.67 \quad (5)$$

- b) Le rapport critique est défini comme :

$$\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{R_m}} = 0.42 \quad (6)$$

c) (Voir les résultats de l'application) On peut observer que la particule 1 n'est pas confinée. La particule 2 est piégée et ses points de rebroussement sont proche des bobines. La particule 3 est aussi piégée mais l'amplitude des oscillations axiales sont beaucoup plus faibles.

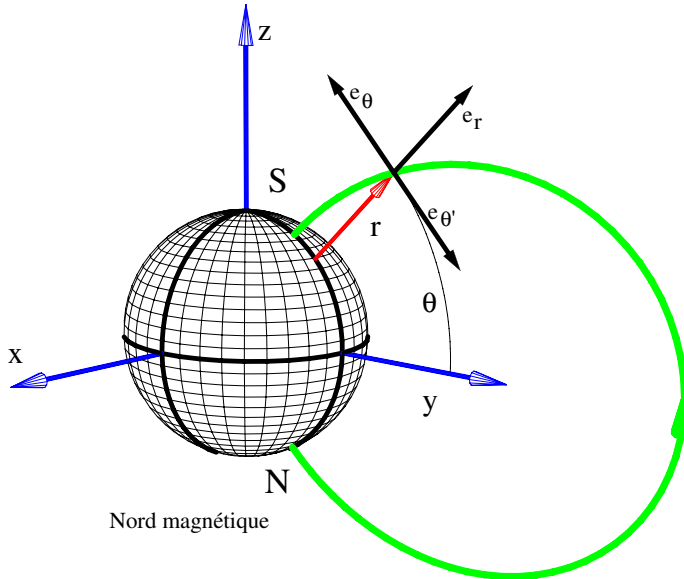
d) Comme le champ magnétique  $\vec{B} = B_r(r, z)\hat{e}_r + B_z(r, z)\hat{e}_z$  est non uniforme radialement et axialement, les particules subissent une dérive due au gradient de champ magnétique  $\vec{v}_d \propto \nabla B \times \vec{B}$  qui est dirigée selon  $\theta$ .

## Exercice 2

En coordonnées sphériques, le champ magnétique terrestre peut être approximé par celui d'un dipôle :

$$B_r(r, \theta) = -2 \frac{B_T R_T^3}{r^3} \sin(\theta)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{B_T R_T^3}{r^3} \cos(\theta)$$



où  $R_T$  et  $B_T$  sont le rayon terrestre ( $R_T = 6.5 \times 10^6$  m) et le champ magnétique à la surface de la terre  $R_T$  ( $B_T = 0.32 \times 10^{-4}$  T). Notez que  $\theta$  n'est pas l'angle polaire usuel  $\theta'$  mais  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$  ( $\theta$  est la latitude magnétique, voir figure ci-dessous).

a) Calculez  $B = |\vec{B}|$  et  $\nabla B$  en fonction de  $r$  et  $\theta'$ .

*Indication :* En coordonnées sphériques  $(r, \theta', \phi)$ , le gradient est donné par :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta'} \hat{e}_{\theta'} + \frac{1}{r \sin(\theta')} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

b) Les ions piégés dans le champ magnétique terrestre sont des protons dont l'énergie peut atteindre 1 MeV. Montrer que pour ces protons la condition d'adiabaticité :

$$\rho_L \frac{|\vec{\nabla} B|}{B} \ll 1$$

est vérifiée et donc qu'elle l'est à fortiori pour les électrons de même énergie.

- c) Les particules piégées dans le champ magnétique terrestre suivent trois mouvements périodiques. Discutez qualitativement de leur nature et de leur origine.
- d) Calculez la vitesse de dérive  $\vec{v}_{\nabla B}$  due à l'inhomogénéité de  $\vec{B}$ . Estimez sa valeur et sa direction pour un proton à l'équateur sur une ligne de champ telle que  $r(\theta = 0) = R_0 = 4R_T$ . Une ligne de champ (c'est-à-dire une ligne qui en tout point est tangente à  $\vec{B}$ ) est donnée par  $r = R_0 \cos^2(\theta)$ , où  $R_0$  est la valeur de  $r$  à l'équateur ( $\theta = 0$ ). On considère  $v_{\parallel} = v_{\perp}$  et une énergie de 1 keV.
- e) Pour des électrons et des protons de 1 keV sur les lignes de champ magnétiques définies par  $R_0 = 4R_T$ , estimez les quantités suivantes :
1. la période cyclotronique ;
  2. le temps mis pour en aller-retour pour les particules piégées  $\sim \frac{R_0}{v_{\parallel}}$  ;
  3. le temps mis pour dériver autour de la terre.

On supposera que à l'équateur  $v_{\parallel} \sim v_{\perp} \sim v_{th}$ .

---

### Corrigé

---

a) On applique d'abord le changement de coordonnées pour passer de  $\theta$  à  $\theta'$  et retrouver les coordonnées sphériques usuelles

$$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \cos(\theta') \quad \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \sin(\theta'). \quad (7)$$

Le champ magnétique,

$$\vec{B}(r, \theta) = B_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^3 [-2 \sin(\theta) \hat{e}_r + \cos(\theta) \hat{e}_{\theta}] \quad (8)$$

peut être écrite comme

$$\vec{B}(r, \theta') = -B_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^3 [2 \cos(\theta') \hat{e}_r + \sin(\theta') \hat{e}_{\theta'}]. \quad (9)$$

On calcule ensuite les grandeurs demandées en utilisant les définitions :

$$B(r, \theta') = \sqrt{B_r^2 + B_{\theta'}^2} = B_T \left(\frac{R_T}{r}\right)^3 \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')} \quad (10)$$

$$(\vec{\nabla} B)_r = \frac{\partial B}{\partial r} = -3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')} \quad (11)$$

$$(\vec{\nabla} B)_{\theta'} = \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta'} = -3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \frac{\cos(\theta') \sin(\theta')}{\sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')}} \quad (12)$$

On remarque que le gradient dans la direction radiale est dominant pour ce champ magnétique.

b) On calcule en premier le terme du au gradient de B :

$$\left| \frac{\vec{\nabla} B}{B} \right| = \frac{1}{B} \sqrt{\left(3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')}\right)^2 + \left(3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \frac{\cos(\theta') \sin(\theta')}{\sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')}}\right)^2}, \quad (13)$$

$$\frac{|\vec{\nabla} B|}{B} = \frac{1}{B} \left( 3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \right) \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta') + \frac{\cos^2(\theta') \sin^2(\theta')}{1 + 3 \cos^2(\theta')}}. \quad (14)$$

On cherche le pire cas, c'est à dire quand  $\nabla B$  est maximum ce qui est vrai pour  $\theta' = 0$  et  $r = R_T$ . Dans ce cas on trouve :

$$\frac{|\vec{\nabla} B|}{B} = \frac{1}{2B_T} \left( 3 \frac{B_T R_T^3}{r^4} \right) \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta')} = \frac{3}{2R_T}. \quad (15)$$

Ceci implique directement  $\rho_L \left| \frac{\nabla B}{B} \right| \sim \frac{\rho_L}{R_T} \ll 1$ . On calcule ensuite le rayon de Larmor

$$\rho_L = \frac{vm_i}{eB} = \frac{vm_i}{2eB_T} \sim 2\text{km} \quad (16)$$

et on suppose que la vitesse parallèle est nulle pour considérer le pire cas. On trouve finalement l'expression du critère d'adiabaticité :

$$\rho_L \frac{|\vec{\nabla} B|}{B} = \frac{vm_i}{2eB_T} \frac{3}{2R_T} \quad (17)$$

En passant aux valeurs numériques, on obtient

$$\rho_L \frac{|\vec{\nabla} B|}{B} \sim 10^{-3} \quad (18)$$

ce qui vérifie largement la condition d'adiabaticité.

c) On peut décomposer la trajectoire de la particule en trois mouvements quasi-périodiques distincts, auxquels correspondent trois périodes :

1. Le mouvement cyclotronique lié à la rotation de la particule autour des lignes de champ
2. Le mouvement d'aller-retour dans le miroir entre les pôles magnétiques
3. Un mouvement de dérive autour de la terre, dû à la courbure du champ

Comme nous l'avons vu précédemment la principale composante du gradient de la norme du champ est radiale, ce qui fait que la dérive de courbure est azimuthale. Une troisième période est associée à cette révolution. La dérive associée à la force de gravitation est également azimuthale, mais elle est négligeable.

d) La vitesse de dérive  $v_{\nabla B}$  dans un champ magnétique inhomogène est :

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_c} \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla}_{\perp} B)}{B^2} \quad (19)$$

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_c} \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla}_{\perp} B)}{B^2} = \frac{\mu_m}{q} \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla}_{\perp} B)}{B^2} = \frac{\mu_m}{2q} \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla}_{\perp} B^2)}{B^3} = \frac{\mu_m}{2q} \frac{\vec{B} \times (\vec{\nabla} B^2)}{B^3} \quad (20)$$

$$B^2(r, \theta') = B_r^2 + B_{\theta'}^2 = \frac{B_T^2 R_T^6}{r^6} [1 + 3 \cos^2(\theta')] \quad (21)$$

$$(\vec{\nabla} B^2)_r = -6 \frac{B_T^2 R_T^6}{r^7} [1 + 3 \cos^2(\theta')] \quad (22)$$

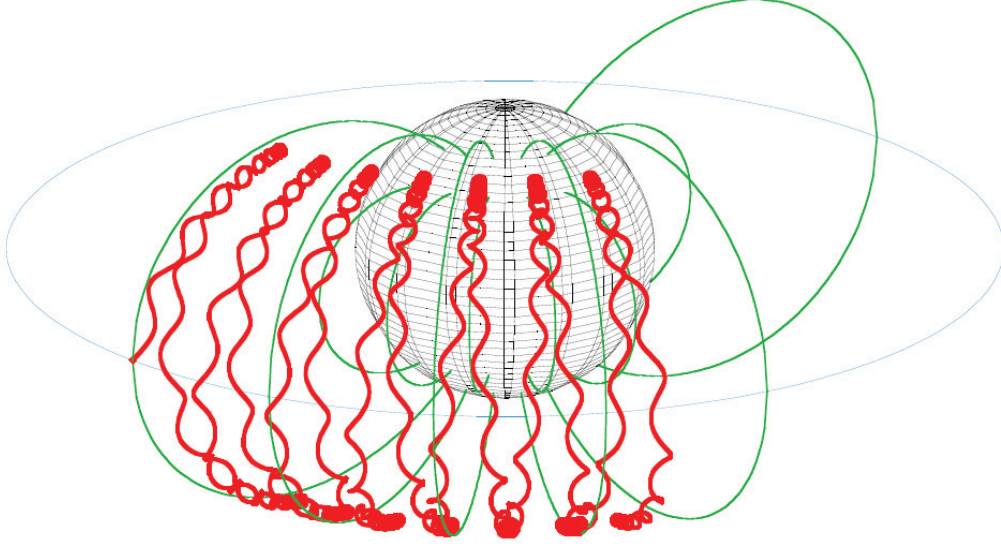


FIGURE 1 – Mouvement d'une particule piégée.

$$(\vec{\nabla} B^2)_{\theta'} = -6 \frac{B_T^2 R_T^6}{r^7} \cos(\theta') \sin(\theta') \quad (23)$$

On rappelle ici que  $\mu_m$  est le moment magnétique :

$$\mu_m = \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const} \quad (24)$$

La seule composante non-nulle de  $\vec{B} \times (\vec{\nabla} B^2)$  est selon  $\hat{e}_{\phi}$ .

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{\mu_m}{2qB^3} \left[ B_r (\vec{\nabla} B^2)_{\theta'} - B_{\theta'} (\vec{\nabla} B^2)_r \right] \hat{e}_{\phi} = -\frac{\mu_m}{2q} \frac{6 \sin(\theta') [1 + \cos^2(\theta')]}{r [1 + 3 \cos^2(\theta')]^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_{\phi} \quad (25)$$

Exprimée le long d'une ligne de champ  $r = R_0 \sin^2(\theta')$ , la vitesse de dérive est alors donnée par :

$$\vec{v}_{\nabla B}(R_0, \theta') = -\frac{\mu_m}{q} \frac{3}{R_0} \frac{\sin(\theta') [1 + \cos^2(\theta')]}{[1 + 3 \cos^2(\theta')]^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_{\phi} \quad (26)$$

On constate que c'est en général lorsque les particules sont proches de la terre qu'elles ont la plus grande dérive angulaire. Pour le cas de la donnée, la valeur numérique de la vitesse de dérive est :

$$v_{\nabla B}(4R_T, \pi/2) \approx 115 \text{ m/s} \quad (27)$$

e) En partant des formules dérivées dans cet exercice, on peut donner une estimation des différentes échelles de temps qui décrivent le mouvement d'une particule :

1. Période cyclotronique  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_c}$
2. Période d'un aller-retour dans le miroir magnétique  $T_1 \sim \frac{2\pi R_0}{v_{\parallel}}$
3. Période de dérive autour de la terre  $T_2 \sim \frac{2\pi R_0}{v_{\nabla B}}$

Pour cela, on suppose que les particules ont une énergie de 1 keV, qu'elles sont sur la ligne de champ  $R_0 = 4R_T$  et qu'à l'équateur  $v_{\perp} \sim v_{\parallel}$ .

	Electrons (1 keV)	Protons (1 keV)
$B_{min}$	$B_T / 64$	$B_T / 64$
$B_{max}$	$B_T \sqrt{4 - \frac{3}{4}}$	$B_T \sqrt{4 - \frac{3}{4}}$
Période cyclotronique $T_0$	$6 \times 10^{-7}(s)$	$1.1 \times 10^{-3}(s)$
$v$ (1 keV)	$1.9 \times 10^7(m/s)$	$4.4 \times 10^5(m/s)$
$v_{\perp}$	$1.3 \times 10^7(m/s)$	$3.1 \times 10^5(m/s)$
$v_{\nabla B}$	$115(m/s)$	$115(m/s)$
$T_1$	12 (s)	530 (s)
$T_2$	400 (heures)	400 (heures)

Dans le tableau ci-dessus,  $T_1$  représente le temps d'un aller-retour dans le miroir magnétique et  $T_2$  le temps de dérive autour de la terre. Les échelles de temps sont effectivement très différentes. Notez bien que les temps ci-dessus ne représentent que des estimations grossières. Elles servent cependant à bien différencier les trois échelles de temps qui gouvernent le mouvement des particules autour de la terre. Pour plus de détails :

“Physics of Solar System Plasmas”, Thomas E. Cravens, Cambridge University Press, Atmospheric and Space Science Series (1998), p.64