

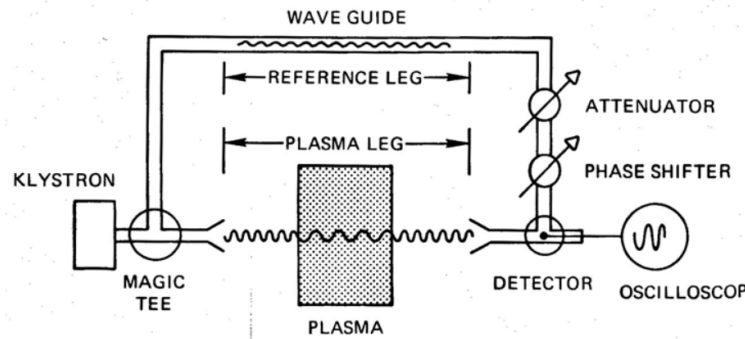
Corrigé des exercices - Série 13

Exercice 1

La relation de dispersion d'une onde électromagnétique transverse dans un plasma

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2, \quad (1)$$

nous indique que pour une fréquence ω donnée, le vecteur d'onde dans le plasma dépend de la fréquence plasma ω_{pe} et donc de sa densité. Cette propriété peut être utilisée pour mesurer la densité d'un plasma de laboratoire en faisant de l'interférométrie. Ce procédé est illustré dans le schéma ci-dessous.



Exemple de montage expérimental utilisé pour mesurer la densité de plasma par interférométrie.

En effet en mesurant le déphasage entre une onde traversant une longueur L de plasma et une onde de référence il est possible de calculer la densité de ce plasma. Pour comprendre ce résultat, calculez :

- le vecteur d'onde k en fonction de la fréquence de l'onde ω et de la densité électronique du plasma n_0 ,
- le déphasage $\Delta\Phi$ entre l'onde traversant une longueur L de plasma et l'onde traversant une longueur L de vide en fonction de L et n_0 .

Dans ce calcul, l'effet des ions a été négligé car ils apportent une faible correction.

- Montrez que les ions ajoutent une contribution ω_{pi}^2 à la relation de dispersion, et que cette contribution peut être négligée. Pour cela linéarisez les équations du modèle à deux fluides (sans collision) pour une onde électromagnétique transverse ($\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$) en conservant la contribution ionique.

Corrigé

- Le vecteur d'onde k peut-être obtenu directement de la relation de dispersion :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e}} \quad (2)$$

b) Le déphasage devient alors

$$\Delta\Phi = k_{plasma}(\omega)L - k_{vide}L = k_{plasma}(\omega)L - \frac{\omega L}{c} = \frac{L}{c} \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e}} - \omega \right) \quad (3)$$

c) Pour prendre en compte les ions, on part des équations pour le modèle à deux fluides, en conservant la contribution ionique et en négligeant les effets de pression. On suppose ici un plasma d'hydrogène ($Z = 1$).

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} + \nabla \cdot (n_l \vec{u}_l) = 0, \quad (4)$$

$$n_l m_l \left[\frac{\partial \vec{u}_l}{\partial t} + (\vec{u}_l \cdot \nabla) \vec{u}_l \right] = n_l q_l (\vec{E} + \vec{u}_l \times \vec{B}), \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7)$$

Avec $l = i, e$ représentant respectivement les ions et les électrons.

On linéarise les équations autour d'un équilibre avec une perturbation telle que :

$$n_e = n_{e,0} + n_{e,1} \quad (8)$$

$$n_i = n_{i,0} + n_{i,1} \quad (9)$$

$$\vec{u}_e = \vec{0} + \vec{u}_{e,1} \quad (10)$$

$$\vec{u}_i = \vec{0} + \vec{u}_{i,1} \quad (11)$$

$$\vec{E} = \vec{0} + \vec{E}_1 \quad (12)$$

$$\vec{B} = \vec{0} + \vec{B}_1 \quad (13)$$

On peut ainsi réécrire les équations fluides comme suit :

$$\frac{\partial n_{e,1}}{\partial t} + n_{e,0} \nabla \cdot \vec{u}_{e,1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial n_{i,1}}{\partial t} + n_{i,0} \nabla \cdot \vec{u}_{i,1} = 0, \quad (15)$$

$$n_{e,0} m_e \frac{\partial \vec{u}_{e,1}}{\partial t} = -en_{e,0} \vec{E}_1, \quad (16)$$

$$n_{i,0} m_i \frac{\partial \vec{u}_{i,1}}{\partial t} = en_{i,0} \vec{E}_1, \quad (17)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 e (n_{i,0} \vec{u}_{i,1} - n_{e,0} \vec{u}_{e,1}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}. \quad (19)$$

En passant dans l'espace de Fourier ces équations deviennent :

$$-i\omega n_{e,1} + n_{e,0} i\vec{k} \cdot \vec{u}_{e,1} = 0, \quad (20)$$

$$-i\omega n_{i,1} + n_{i,0} i\vec{k} \cdot \vec{u}_{i,1} = 0, \quad (21)$$

$$-i\omega n_{e,0} m_e \vec{u}_{e,1} = -en_{e,0} \vec{E}_1, \quad (22)$$

$$-i\omega n_{i,0} m_i \vec{u}_{i,1} = en_{i,0} \vec{E}_1, \quad (23)$$

$$i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1, \quad (24)$$

$$i\vec{k} \times \vec{B}_1 = \mu_0 e (n_{i,0} \vec{u}_{i,1} - n_{e,0} \vec{u}_{e,1}) - i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}_1. \quad (25)$$

Comme l'onde est transverse, $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = 0$, par l'équation des forces $\vec{k} \cdot \vec{u}_{l,1} = 0$, et par l'équation de continuité $n_{l,1} = 0$. Le set d'équations se réduit alors à :

$$\vec{u}_{e,1} = -i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}_1, \quad (26)$$

$$\vec{u}_{i,1} = i \frac{e}{m_i \omega} \vec{E}_1, \quad (27)$$

$$i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1, \quad (28)$$

$$i\vec{k} \times \vec{B}_1 = \mu_0 e (n_{i,0} \vec{u}_{i,1} - n_{e,0} \vec{u}_{e,1}) - i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}_1. \quad (29)$$

On multiplie alors vectoriellement la loi de Faraday par $i\vec{k}$, et on remplace l'expression des vitesses ioniques et électroniques dans la loi d'Ampère.

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1) &= \vec{k} \times (\omega \vec{B}_1) \\ &= \omega (\vec{k} \times \vec{B}_1) \\ &= \omega \left(-i\mu_0 e \left(i \frac{en_{i,0}}{m_i \omega} \vec{E}_1 + i \frac{en_{e,0}}{m_e \omega} \vec{E}_1 \right) - \omega \frac{1}{c^2} \vec{E}_1 \right) \\ &= \left(\frac{\mu_0 e^2 n_{i,0}}{m_i} \vec{E}_1 + \frac{\mu_0 e^2 n_{e,0}}{m_e} \vec{E}_1 \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 \end{aligned} \quad (30)$$

Le membre de gauche peut se réécrire en utilisant une identité vectorielle

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1) = (\vec{k} \cdot \vec{E}_1) \vec{k} - k^2 \vec{E}_1. \quad (31)$$

On passe tous les termes à gauche de l'égalité et on factorise finalement par \vec{E}_1

$$(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2) \vec{E}_1 = 0, \quad (32)$$

avec $\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_{e,0}}{\epsilon_0 m_e}$ et $\omega_{pi}^2 = \frac{e^2 n_{i,0}}{\epsilon_0 m_i}$. La condition d'existence d'une onde impose finalement la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (33)$$

Du fait du rapport des masses entre électrons et ions, nous avons $\omega_{pi}^2 / \omega_{pe}^2 = m_e / m_i \ll 1$. La contribution ionique n'apporte donc qu'une faible correction ce qui justifie de considérer uniquement les électrons dans la dérivation du cours.

Exercice 2 : Facultatif

Un pulsar émet un large spectre de radiation électromagnétique que l'on détecte depuis la Terre. La dispersion en vitesse de groupe causée par le plasma interstellaire fait que chaque impulsion d'onde EM détectée a un glissement en fréquence df/dt , où f est la fréquence mesurée au temps t .

- a) En supposant $\omega^2 \gg \omega_{pe}^2$ et en négligeant le champ magnétique dans l'espace interstellaire, calculer le temps que mets une impulsion à atteindre la terre en fonction de sa fréquence $t(\omega)$.
- b) Montrer que :

$$\frac{df}{dt} \approx -\frac{c}{L} \frac{f^3}{f_{pe}^2} \quad (34)$$

où $f_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi}$ et L est la distance entre le pulsar et la terre.

On suppose que le pulsar est détecté sur Terre par une antenne accordée autour de 80MHz. Le glissement en fréquence mesuré dans la bande passante vaut $df/dt = -5$ MHz/s. Comme cette valeur est négative, cela veut dire que les hautes fréquences arriveront plus vite sur terre que les basses fréquences.

- c) En supposant la densité moyenne de l'espace interstellaire $n_{e0} = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$, à quelle distance se trouve le pulsar ?
(Exprimer la distance en parsec : 1 parsec = $3 \cdot 10^{16} \text{ m}$)

Corrigé

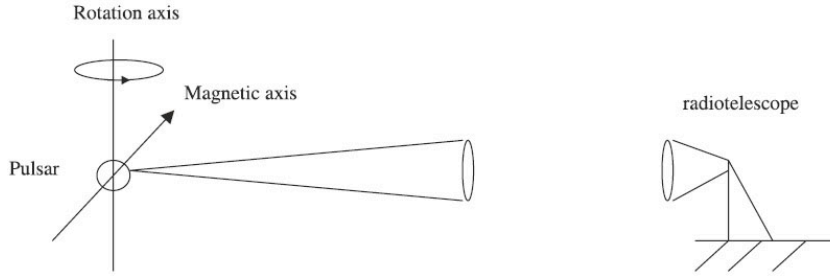


FIGURE 1 – Un pulsar est une étoile à neutron fortement magnétisée et dont l'axe magnétique ne correspond pas à l'axe de rotation. C'est de cela que viennent ces émissions pulsées.

- a) Une schéma du problème est illustré dans la Figure 1. L'espace interstellaire peut être modélisé par un plasma de faible densité où l'onde électromagnétique a une relation de dispersion du type :

$$\omega(k) = (\omega_{pe}^2 + k^2 c^2)^{1/2} \quad (35)$$

et une vitesse de groupe égale à :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} \quad (36)$$

Une impulsion émise par un pulsar à distance L de la terre arrive après un temps :

$$t(\omega) = \frac{L}{v_g(\omega)} = \frac{L}{c \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{1/2}} \approx \frac{L}{c} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] \quad (37)$$

si $\omega \gg \omega_{pe}$. En inversant cette équation, $\omega(t)$, on remarque que les fréquences les plus basses seront retardées par rapport aux fréquences élevées. Ceci est illustré dans la figure 2.

- b) À partir de l'équation 37, on obtient le glissement en fréquence :

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dt}{d\omega} \right)^{-1} \approx -\frac{c}{L} \frac{f^3}{f_{pe}^2} \quad (38)$$

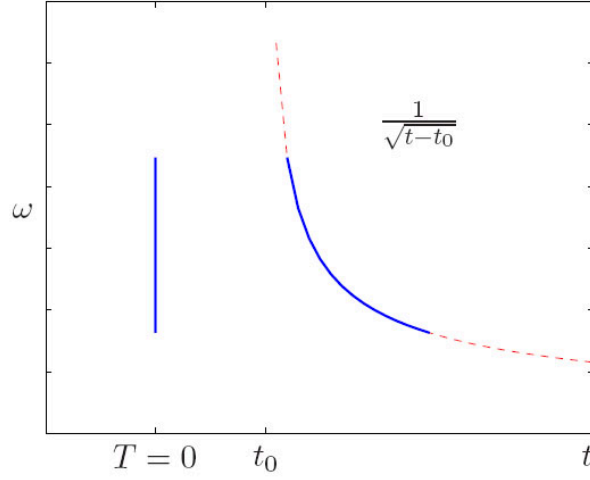


FIGURE 2 – Représentation qualitative du spectre émis par le pulsar ($T=0$) et reçu par l'observateur à $T = t + t_0$. On voit bien que comme le signal est dispersif, on ne reçoit pas les différentes fréquences d'un même signal au même moment.

Le décalage temporel du signal mesuré avec deux filtres passe-bande différents est montré dans les figures 3 et 4.

c) Si on suppose la densité moyenne de l'espace interstellaire $n_e = 2 \cdot 10^6 \text{m}^{-3}$, on obtient :

$$L \approx 1.9 \cdot 10^{17} \text{m} \approx 6 \text{ parsec} \approx 20 \text{ années lumières} \quad (39)$$

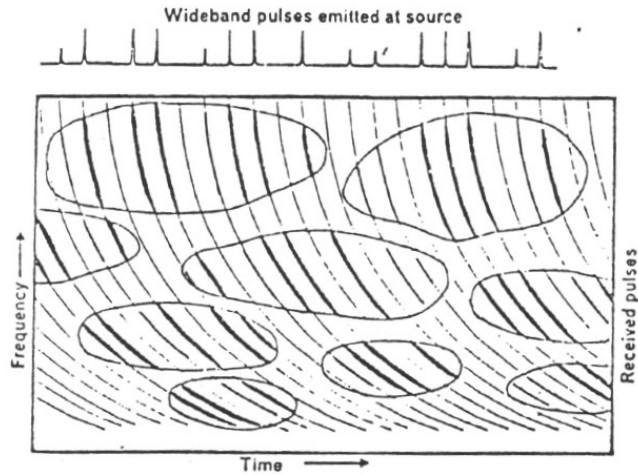


FIGURE 3 – Exemple de réception du signal émis par un pulsar où l'on peut observer la variation de la fréquence selon le temps.

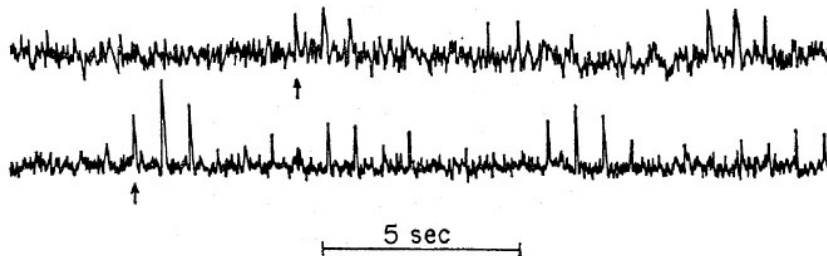


FIGURE 4 – Exemple d'enregistrement d'émissions pulsées du pulsar CP 0328 au fréquences de 151 et 408 MHz.