Corrigé des exercices - Série 12

Exercice 1

Dans la MHD, prouver que la force de Lorentz peut s'écrire comme :

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0} \vec{\kappa} \tag{1}$$

avec $\vec{\nabla}_\perp = \vec{\nabla} - \vec{\nabla}_\parallel$, $\vec{\nabla}_\parallel = \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})$ le gradient orthogonal au champ, le vecteur unitaire $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ et la courbure magnétique $\vec{\kappa} = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$.

Corrigé

On remarque que :

$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{B} &= -\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ &= -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant la définition du vecteur unitaire $\vec{b}$ et de la courbure de champ $\vec{\kappa}$, le deuxième terme peut se réécrire :

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = B(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})B\vec{b} = B^2 \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}}_{\vec{\kappa}} - \underbrace{\vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})}_{\vec{\nabla}_\parallel} \frac{B^2}{2} \tag{3}$$

Ce qui donne finalement :

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0} \vec{\kappa} \tag{4}$$

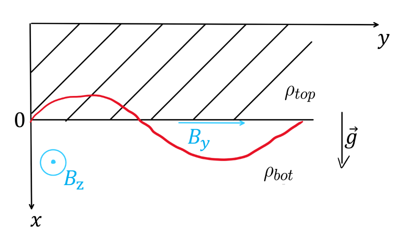
Nous avons ainsi exprimé la force de Lorentz comme la somme d'un gradient de la pression magnétique et d'une force de tension due à la courbure de champ.

Exercice 2

Dans le cadre de la MHD idéale, on considère un plasma à l'équilibre de densité

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{top} & \text{si } x \leq 0 \\ \rho_{bot} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_z \hat{z} + B_y \hat{y}$, et soumis au champ gravitationel terrestre d'accélération $\vec{g} = g\hat{x}$ (dans un tore, la courbure $\vec{\kappa}$ ferait office de champ $\vec{g}$, sachant que la gravitation y est négligeable). On suppose de plus que dans cette configuration, il existe un équilibre statique ($\vec{u}_0 = 0$).



On étudie alors la stabilité de ce plasma par rapport à une perturbation imposée par un vecteur déplacement de la forme

$$\vec{\xi} = \xi_x(x)\exp(iky - i\omega t)\hat{x} + \xi_y(x)\exp(iky - i\omega t)\hat{y}.$$

En considérant des modes incompressibles, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\xi} = 0$,

1. écrivez l'équation de continuité, du mouvement et d'Ohm-Faraday linéarisées, ainsi que l'équation d'incompressibilité $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\xi} = 0$, qui forment un système complet,
2. exprimez les quantités perturbées $\vec{B}_1$, $\vec{j}_1$ et ρ_1 en fonction de $\vec{\xi}$,
3. en projetant puis en intégrant l'équation du mouvement linéarisée selon $\hat{y}$, trouver une expression à l'ordre 1 de la perturbation en pression, p_1. On imposera pour cela $\langle p_1\rangle_{y,t=0} = 0$.
4. en projetant l'équation du mouvement linéarisée selon $\hat{x}$, réduisez le système d'équations à une équation différentielle pour $\xi \equiv \xi_x(x)$,
5. trouvez la solution pour $\xi(x)$ pour $x < 0$ et $x > 0$ en supposant que ξ est continu et que $\lim_{|x|\to\infty}\xi = 0$.
6. en intégrant l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$, trouvez la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk\frac{\rho_{bot} - \rho_{top}}{\rho_{bot} + \rho_{top}} + \frac{2}{\mu_0}\frac{k^2 B_y^2}{\rho_{top} + \rho_{bot}}. \tag{5}$$

   Montrez que $\vec{B}$ a un effet stabilisant quand la perturbation déforme les lignes de $\vec{B}$, et que si $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$, et $\rho_{bot} < \rho_{top}$, alors on a toujours instabilité. Cette instabilité est l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Corrigé

1.

L'équation de continuité linéarisée s'obtient en faisant le développement à l'ordre 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_0 + \rho_1}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot[\vec{u}_1(\rho_0+\rho_1)] =& \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\vec{u}_1\rho_0) \\ =& \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho_0 + \rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} \\ =& \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho_0 = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Comme $\{\rho_1, \xi\} \sim \exp(iky - i\omega t)$, on peut éliminer la dérivée temporelle :

$$\rho_1 + \vec{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho_0 = 0. \tag{7}$$

L'équation du mouvement linéarisée s'obtient de la même manière :

$$(\rho_0+\rho_1)\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}(p_0+p_1) + \vec{j}_1\times(\vec{B}_0+\vec{B}_1) + (\rho_0+\rho_1)\vec{g}, \tag{8}$$

et en supprimant les termes d'ordre 0 et d'ordre 2 et ils nous reste les termes d'ordre 1 :

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}(p_1) + \vec{j}_1\times(\vec{B}_0) + (\rho_1)\vec{g}. \tag{9}$$

L'équation d'Ohm-Faraday linéarisée s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 =& \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{\xi} \times \vec{B}_0\right) \\ =& (\vec{B}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\xi} \end{aligned} \tag{10}$$

L'équation d'incompressibilité nous permet finalement de lier ξ_x et ξ_y :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + ik\xi_y\right] \exp(iky - i\omega t), \tag{11}$$

donc

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial x} = -ik\xi_y. \tag{12}$$

2.

Le champ magnétique perturbé s'obtient directement à partir de l'équation 10 :

$$\vec{B}_1 = \left[ik\xi_x B_y \hat{x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x} B_y \hat{y}\right] \exp(iky i\omega t). \tag{13}$$

La densité de courant perturbée se calcule ensuite en prenant le rotationel du champ magnétique perturbé :

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 =& \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{B}_1\right) \\ =& \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} B_y + k^2 \xi_x B_y \end{pmatrix} \exp(iky - i\omega t). \end{aligned} \tag{14}$$

On en déduit ensuite :

$$\vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = \frac{B_y^2}{\mu_0} \exp(iky - i\omega t)(\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - k^2 \xi_x)\hat{x}. \tag{15}$$

Enfin, on exprime la densité perturbée ρ_1 à l'aide de l'équation de continuité linéarisée :

$$\rho_1 = -\vec{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho_0 = \xi_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \exp(iky - i\omega t). \tag{16}$$

3.

L'équation du mouvement linéarisée dans la direction y nous donne :

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_y \exp(iky - i\omega t) = -\frac{\partial p_1}{\partial y}. \tag{17}$$

Cette équation peut être intégrée selon y, et en utilisant $\langle p_1 \rangle_{y,t=0} = 0$ (constante d'intégration nulle), on trouve l'expression

$$p_1 = \frac{\omega^2 \rho_0}{ik} \xi_y \exp(iky - i\omega t) = \frac{\omega^2 \rho_0}{k^2} \exp(iky - i\omega t) \frac{\partial \xi_x}{\partial x}. \tag{18}$$

4.

En projetant cette fois l'équation du mouvement dans la direction x, puis en réinjectant les expressions 15, 16 et 18, on trouve :

$$\left[\omega^2\rho_0\xi_x - \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right) + \frac{B_y^2}{\mu_0}(\frac{\partial^2\xi_x}{\partial x^2} - k^2\xi_x) - g\xi_x\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right]\exp(iky - i\omega t) = 0. \quad (19)$$

On peut ainsi supprimer l'exponentielle et obtenir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - k^2\rho_0\xi - \frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - k^2\xi) + g\frac{k^2}{\omega^2}\xi\frac{\partial\rho_0}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

5.

Selon l'équilibre considéré : $\left.\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right|_{x\neq 0} = 0$. L'équation différentielle devient alors :

$$\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - k^2\rho_0\xi - \frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - k^2\xi) = 0, \quad (21)$$

dont la solution générale a pour forme

$$\xi = A\exp(\alpha x) + B\exp(-\alpha x). \quad (22)$$

On cherche une solution physique et continue en $x = 0$ ce qui impose

$$\xi(x) = \begin{cases} A\exp(kx) & \text{si } x \leq 0, \\ A\exp(-kx) & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (23)$$

6.

Par le choix de densité d'équilibre, la dérive de la densité d'équilibre par rapport à x peut s'exprimer :

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial x} = (\rho_{bot} - \rho_{top})\delta(x). \quad (24)$$

On intègre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - k^2\rho_0\xi - \frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - k^2\xi) + g\frac{k^2}{\omega^2}\xi\frac{\partial\rho_0}{\partial x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -k^2\rho_0\xi + k^2\frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}\xi + g\frac{k^2}{\omega^2}\xi\frac{\partial\rho_0}{\partial x}dx \\
&= \int_0^{\infty} -k^2\rho_{bot}A\exp(-kx)dx + \int_{-\infty}^{0} -k^2\rho_{top}A\exp(kx)dx + 2\int_0^{\infty} k^2\frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}\xi dx + g\frac{k^2}{\omega^2}A(\rho_{bot} - \rho_{top}) \\
&= -k(\rho_{top} + \rho_{bot})A + 2k\frac{k^2B_y^2}{\mu_0\omega^2}A + g\frac{k^2}{\omega^2}A(\rho_{bot} - \rho_{top}) = 0.
\end{aligned} \quad (25)$$

En réarrangeant les termes, on trouve alors la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk\frac{\rho_{bot} - \rho_{top}}{\rho_{bot} + \rho_{top}} + \frac{2}{\mu_0}\frac{k^2B_y^2}{\rho_{top} + \rho_{bot}}. \quad (26)$$

Cette relation de dispersion montre que, dans le cas où $\rho_{bot} < \rho_{top}$, le premier terme est négatif et donc déstabilisant. Le terme proportionnel à B_y est toujours positif et donc stabilisant. Ceci peut s'expliquer intuitivement par le fait que, dans ce cas, la perturbation doit déformer les lignes de champs magnétiques parallèles à k ce qui consomme de l'énergie. Ainsi si B_y est nul, et si $\rho_{bot} < \rho_{top}$, il y a toujours instabilité. Cette instabilité est appelée instabilité de "Rayleigh-Taylor".