Corrigé des exercices - Série 11

Exercice 1

On considère un plasma de type Z-pinch à l'équilibre dans une chambre cylindrique de rayon a et dont les parois sont parfaitement conductrices. On considère un champ magnétique purement azimuthal $\vec{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}$ et on suppose que le profil de pression est de la forme $p = p_0(1 - r^2/a^2)$.

a) Trouvez l'expression de $B_\theta(r)$ et de $j_z(r)$. en fonction de p_0 et de a **Indication** : supposez que le champ magnétique est de la forme $B_\theta(r) = B_0 r^\alpha$ et explicitez B_0 et α.

b) Montrez que p_0 est proportionnel au carré du courant total induit dans le plasma.

c) Prouvez que $<\beta>= \frac{2\mu_0 <p>}{B_\theta^2(a)} = 1$ avec $< . >$ la moyenne sur le volume du plasma.

Corrigé

a)

On part de l'équation d'équilibre du cours (6.8) et on utilise le profil de pression de la donnée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = -2p_0\frac{r}{a^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0. \tag{1}$$

En remplaçant l'expression donnée en indication dans l'équation (1), on écrit :

$$-2p_0\frac{r}{a^2} + \frac{B_0^2}{\mu_0} r^{2\alpha-1}(\alpha+1) = 0 \tag{2}$$

On identifie alors :

$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad B_0 = \frac{\sqrt{p_0\mu_0}}{a} \tag{3}$$

On obtient donc la solution $B_\theta = B_0 r$. La densité de courant se calcule en prenant le rotationnel du champ magnétique

$$j_z(r) = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rB_\theta)}{\mathrm{d}r} = \frac{2}{\mu_0}\sqrt{\frac{p_0\mu_0}{a^2}}. \tag{4}$$

On vérifie bien que la densité de courant est une constante.

b)

Le courant total induit dans le plasma se calcule simplement en prenant l'intégrale de surface de la densité de courant

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} j_z r dr d\theta = 2\pi a\sqrt{\frac{p_0}{\mu_0}}. \tag{5}$$

La pression au coeur du plasma est alors

$$p_0 = \frac{I^2\mu_0}{4\pi^2 a^2}. \tag{6}$$

c)

En connaissant l'expression de $p(r)$ et $B_\theta(r)$, on peut calculer

$$\begin{aligned}
<\beta> &= \frac{1}{V}\int_V \frac{2\mu_0 p}{B_\theta(a)^2}dV = \frac{1}{\pi a^2 L}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^a 2\mu_0\frac{p_0(1-\frac{r^2}{a^2})}{B_0^2 a^2}rdrd\theta dz \\
&= \frac{4\mu_0}{a^2}\int_0^a \frac{p_0(1-\frac{r^2}{a^2})}{p_0\mu_0}rdr \\
&= \frac{4}{a^2}\int_0^a (1-\frac{r^2}{a^2})rdr \\
&= \frac{4}{a^2}(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{7}$$

Exercice 2

On considère un équilibre de type θ-pinch, de section cylindrique et confiné magnétiquement par un champ magnétique axial $\vec{B} = B_z(r)\hat{z}$. On va montrer que dans cette configuration (mais le résultat est général) le courant perpendiculaire à $\vec{B}$ est constitué d'un courant de dérive magnétique et d'un courant de magnétisation.

a) Montrer que la densité de courant totale dans la direction perpendiculaire à $\vec{B}$, $\vec{j}_{dia}$ (courant diamagnétique) est

$$\vec{j}_{dia} = \frac{1}{B_z(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\hat{\theta}.$$

b) En considérant que ce plasma est à l'équilibre thermodynamique, calculez la densité de courant $\vec{j}_{\boldsymbol{\nabla} B}$ due à la dérive magnétique $v_{\boldsymbol{\nabla} B}$ moyennée sur toutes les vitesses des particules.

c) Montrez que $\vec{j}_{dia} - \vec{j}_{\boldsymbol{\nabla} B} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{B_z}\right)\hat{\theta} = \boldsymbol{\nabla}\times(M\hat{z})$, puis identifiez et interprétez M.

Corrigé

a)

Comme vu en cours le courant à l'équilibre dans un θ-pinch est uniquement selon θ donc $\vec{j}_{dia} = j_\theta\hat{\theta}$. En partant de l'équation de Newton à l'équilibre de la MHD

$$\vec{j}\times\vec{B} = \boldsymbol{\nabla} p \tag{8}$$

on obtient

$$\vec{j}_{dia} = j_\theta\hat{\theta} = \frac{1}{B_z(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\hat{\theta}. \tag{9}$$

b)

Le courant de dérive magnétique se calcule pour chaque espèce d'après la définition de la vitesse de dérive d'une charge dans un champ magnétique non-uniforme

$$\vec{v}_{\boldsymbol{\nabla} B} = \frac{\mu}{q}\frac{\vec{B}\times\boldsymbol{\nabla} B}{B^2} \tag{10}$$

puis le courant total s'obtient en prenant la somme des contributions pour chaque espèce

$$\vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = \sum_{\alpha} q_\alpha n_\alpha \vec{u}_{\boldsymbol{\nabla}B,\alpha} = \sum_{\alpha} q_\alpha n_\alpha \frac{<\mu_\alpha>}{q_\alpha} \frac{\vec{B}\times\boldsymbol{\nabla}B}{B^2}. \tag{11}$$

Avec $\vec{u}_{\boldsymbol{\nabla}B,\alpha} =< \vec{v}_{\boldsymbol{\nabla}B,\alpha} >$ la vitesse moyenne de chaque espèce. Pour une distribution Maxwellienne de vitesses,

$$<\mu_\alpha>= \frac{1}{2} m_\alpha \frac{< v_{\perp,\alpha}^2 >}{B} = \frac{k_B T_\alpha}{B} = \frac{p_\alpha}{n_\alpha B}. \tag{12}$$

Le courant de dérive magnétique devient

$$\vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = \sum_{\alpha} \frac{p_\alpha}{B} \frac{\vec{B}\times\boldsymbol{\nabla}B}{B^2} = \frac{p}{B} \frac{\vec{B}\times\boldsymbol{\nabla}B}{B^2}, \tag{13}$$

où $p = \sum_\alpha p_\alpha$. Comme le champ magnétique est purement axial, ce courant s'écrit finalement

$$\vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = \frac{p}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{\theta}. \tag{14}$$

c)

On calcule finalement le courant ne provenant pas de la dérive magnétique :

$$\vec{j}_{dia} - \vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = \left(\frac{1}{B_z} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p(r)}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} \tag{15}$$

et on identifie une dérivée de produit de fonctions

$$\vec{j}_{dia} - \vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{B_z} \right) \hat{\theta}. \tag{16}$$

De même, on peut identifier à droite de l'égalité, le rotationel de $p\vec{B}/B^2$

$$\vec{j}_{dia} - \vec{j}_{\boldsymbol{\nabla}B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{p\vec{B}}{B_z^2} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\beta \vec{B}}{2\mu_0}. \tag{17}$$

On peut finalement identifier à l'aide de l'équation (12) $M = -\frac{p}{B_z} = n < \mu >$ la densité de moments magnétiques soit la magnétisation du plasma. Cette dernière induit un courant qui ne provient pas d'un déplacement de charge (dérive magnétique), mais d'un effet collectif du plasma (petits moments magnétiques combinés) dû à un gradient de densité ou de température dans le fluide. Ce phénomène est représenté à la figure 1.

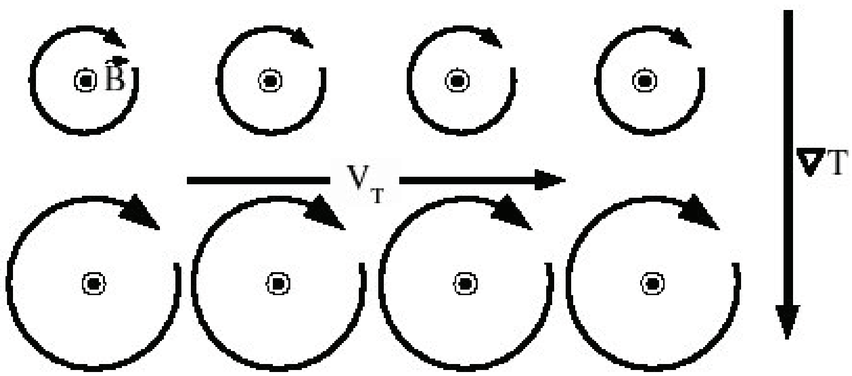

FIGURE 1 – Création du courant diamagnétique dans le cas d'un gradient de température. On voit que c'est la différence de vitesse des particules entre deux orbites qui en est la cause. Un tel phénomène existe aussi pour un gradient de densité et comme $p = nT$, ceci explique bien le courant du à l'inhomogénéité de pression.