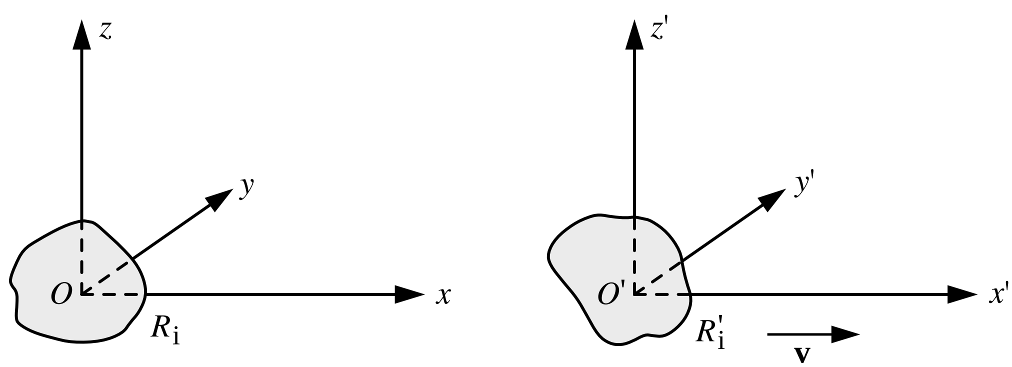
3. Introduction à la relativité spéciale

Ces notes sont inspirées par les notes de mon collègue André Châtelain que je remercie chaleureusement de les avoir partagées avec moi.

3.1 Le groupe de Galilée et le principe de relativité en mécanique classique

Considérons deux référentiels d'inertie ou Galiléens R_i et R_i' caracterisés par une translation de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{cste}$. Sans limiter la généralité de la discussion, on peut les munir de repères $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ en translation de vitesse $\mathbf{v}$ selon les axes $Ox \parallel Ox'$. On choisit ainsi Oy et Oz parallèles à $O'y'$ et $O'z'$.



La deuxième loi de Newton affirme que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

m est une constante qui ne dépend pas du référentiel. Le mouvement de R_i' par rapport à R_i étant de translation, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ et $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$.

Par conséquent, les lois auxquelles obéissent les expériences de mécanique faites dans R_i sont identiques à celles faites en R_i'. Il est impossible par des expériences de mécanique faites dans un référentiel inertial R_i' de mettre en évidence un mouvement de translation rectiligne et uniforme de R_i'.

Tous les référentiels d'inertie tels $R_i et R_i'$ sont **équivalents** pour formuler les lois de la mécanique. **C'est le principe de relativité**. Exprimons encore les relations entre systèmes de coordonnées en posant qu'en $t = 0$, les deux systèmes de coordonnées sont confondus (conditions initiales) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = ct \end{cases}$$

Si $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ n'est pas dirigé selon x la matrice de passage s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_x/c \\ 0 & 1 & 0 & -v_y/c \\ 0 & 0 & 1 & -v_z/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette transformation est appelée transformation de Galilée. L'ensemble des référentiels d'inertie munis de la transformation de Galilée s'appelle le **groupe de Galilée**.

On vérifie cette proposition en effectuant le produit de deux matrices de transformation avec $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ par exemple.

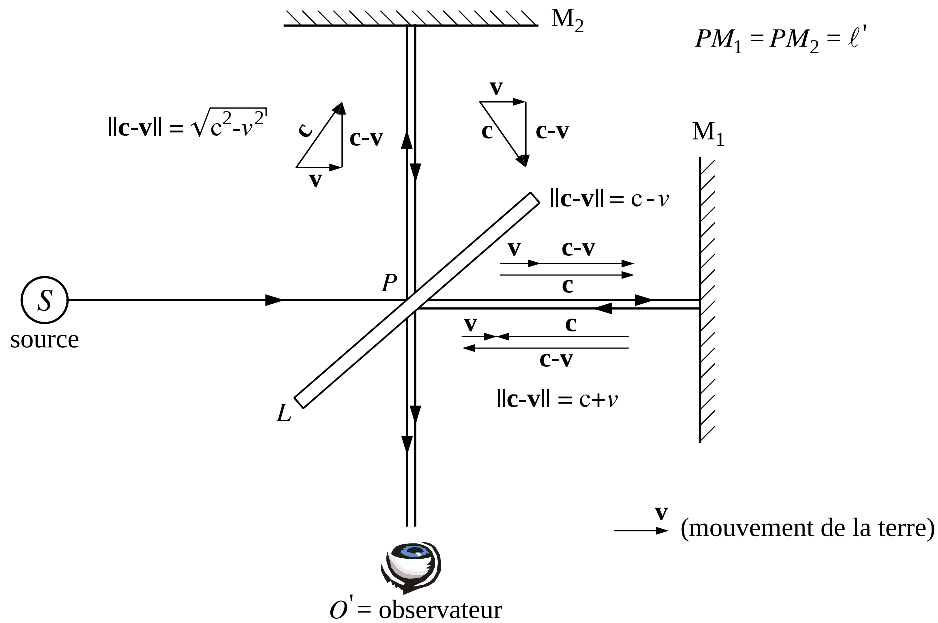
3.2 Recherche du mouvement absolu, expérience de Michelson

A la fin du $19^{\text{ième}}$ siècle, les physiciens ne se rendaient pas compte de l'importance du principe de relativité. En général, on essayait de mettre en évidence, par des phénomènes optiques entre autres, le **mouvement absolu** de la terre dans l'espace.

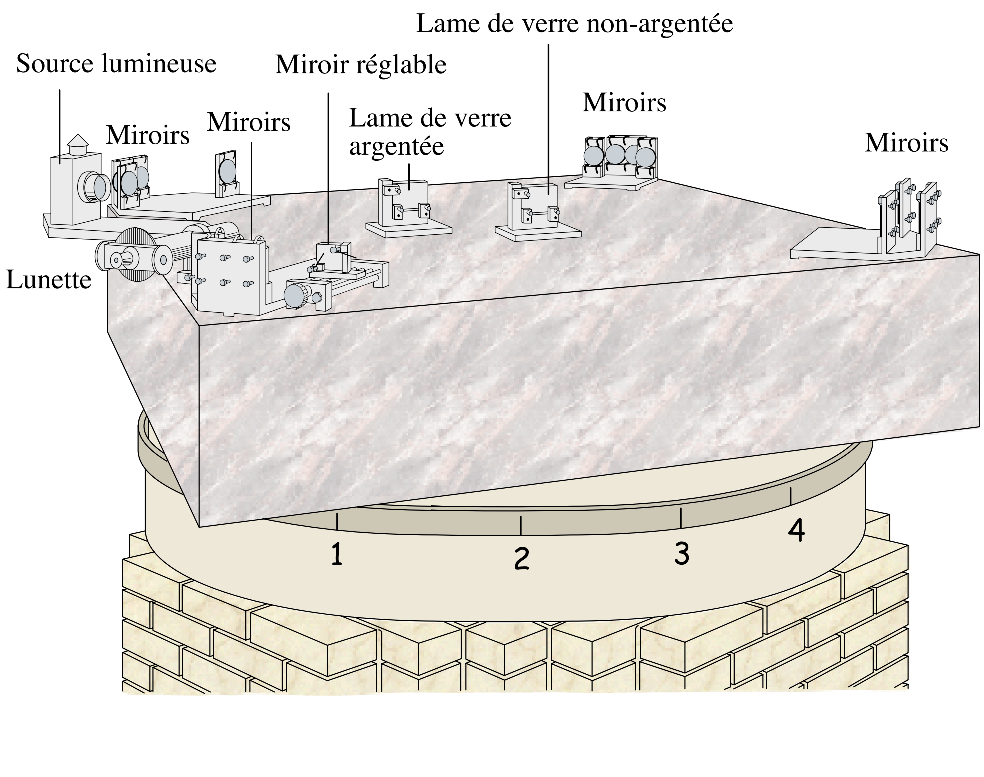
On attribuait à l'espace, vide de matière, une propriété dite d'*éther*. La question était de savoir comment les corps se déplaçaient dans ce milieu. On pensait que la lumière se propageait dans l'éther en créant des vibrations analogues aux vibrations d'amplitudes ou de pressions existant dans la propagation des sons dans l'air. Si l'on suppose l'éther fixe et la vitesse de la lumière valant $\mathbf{c}$ dans l'éther, le mouvement de la terre produit un "vent d'éther" et donne lieu à des effets d'anisotropie des phénomènes optiques. Ainsi, si $\mathbf{c}$ est la vitesse absolue de la lumière par rapport à l'éther, et $\mathbf{v}$ la vitesse absolue de la terre par rapport à l'éther (vitesse d'entraînement), la vitesse relative de la lumière par rapport à la terre s'écrit $\mathbf{v}_r = \mathbf{c} - \mathbf{v}$. Pour un observateur situé sur la terre, en amplitude, la vitesse de propagation de la lumière devrait être de $c - v$ dans la direction de déplacement de la terre, de $c + v$ dans la direction contraire, et de $\sqrt{c^2 - v^2}$ dans une direction perpendiculaire.

En 1881, Michelson et Morley tentèrent précisément une expérience devant faire connaître la vitesse du vent d'éther, c'est-à-dire $\mathbf{v}$. Pour réaliser cette expérience, Michelson s'est servi d'un interféromètre dont le principe est le suivant.

Une lame semi-argentée L sépare un rayon incident SP en deux rayons lumineux PM_1 et PM_2. Ces rayons sont réfléchis sur les miroirs M_1 et M_2 respectivement et se superposent à nouveau en P pour atteindre l'observateur O'. Si $PM_1 = PM_2$ et que la vitesse de la lumière est la même dans les deux directions, les 2 rayons arrivent exactement en phase. Dans le cas contraire, soit que $PM_1 \neq PM_2$, ou que la vitesse de propagation ne soit pas la même dans les deux directions, les deux rayons arrivent en P avec un déphasage dont le résultat est un phénomène d'interférence. Ces interférences se manifestent sur un écran par une alternance de régions sombres et claires, et elles se prêtent à des mesures d'une extraordinaire sensibilité.



M$_2$
$PM_1 = PM_2 = \ell'$
$\|\mathbf{c}\text{-}\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2\text{-}v^2}$
c
c-v
v
v
c
c-v
M$_1$
$\|\mathbf{c}\text{-}\mathbf{v}\| = c - v$
v
c-v
c
P
S
source
v
c
c-v
$\|\mathbf{c}\text{-}\mathbf{v}\| = c+v$
L
v
(mouvement de la terre)
O' = observateur



Lame de verre non-argentée
Source lumineuse
Miroir réglable
Miroirs
Miroirs
Lame de verre
argentée
Miroirs
Miroirs
Lunette
1
2
3
4

Dans l'expérience de Michelson et avec l'hypothèse du vent d'éther, la durée du trajet PM_1 et retour dépend de l'orientation de l'appareil par rapport au mouvement de la terre. De même pour PM_2. Il en résulte qu'en modifiant progressivement l'orientation de tout l'appareil (à cet effet, Michelson l'avait placé sur une dalle flottant sur un bain de mercure), on devrait observer un déplacement progressif des franges d'interférences. Ce déplacement serait maximum pour une rotation de $\pi/2$. Faisons le calcul en supposant que les deux bras ont exactement la même longueur ℓ', hypothèse qui n'est d'ailleurs pas essentielle et qui n'a pas d'influence sensible sur le résultat.

Dans le cas de figure donné :

$$\left.\begin{aligned} t'_{\parallel} &= \text{ temps pour que la lumière parcoure } PM_1P \\ t'_{\perp} &= \text{ temps pour que la lumière parcoure } PM_2P \end{aligned}\right\}\text{temps mesuré par } O'$$

$$t'_{\parallel} = \frac{\ell'}{c-v} + \frac{\ell'}{c+v} = \frac{2\ell'/c}{1-v^2/c^2}$$

$$t'_{\perp} = \frac{2\ell'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

On remarque que $t'_{\parallel} \neq t'_{\perp}$; soit $\Delta t' = t'_{\parallel} - t'_{\perp}$.

Dans la position perpendiculaire, les deux bras ont permuté leurs rôles d'où, pour la différence des temps de parcours, la valeur $-\Delta t'$.

Avec surprise, les expérimentateurs n'ont observé aucune modification des franges d'interférences et ont donc conclu que $\Delta t' = 0$. Des expériences utilisant d'autres méthodes ont été entreprises, plus récemment, toujours dans le but de mettre en évidence la vitesse d'entraînement de la terre. Les conclusions sont en accord avec celles de l'expérience de Michelson.

On proposa d'abord que l'absence d'effets pouvait être expliquée par un entraînement partiel de l'éther par les milieux transparents en mouvement. Une explication alternative due à Lorentz et Fitzgerald est que tous les objets se déplaçant dans l'éther subissent une **contraction "réelle"** dans la direction du mouvement et que cette contraction est précisément celle qui entraîne $t'_{\parallel} = t'_{\perp}$. Cela signifie que perpendiculairement à la direction du mouvement de la terre, la longueur est inchangée tandis que parallèlement il y a contraction.

Au lieu de ℓ', écrivons ℓ dans l'expression de $t'_\parallel$ et égalons $t'_\parallel$ et $t'_\perp$. Il vient :

$$\frac{2\ell/c}{1-v^2/c^2} = \frac{2\ell'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \longrightarrow \boxed{\ell = \sqrt{1-v^2/c^2}\ \ell'}$$

Cette relation relie les longueurs PM_1 et PM_2 vues par un observateur O dans l'éther. L'observateur O' ne peut pas observer cette contraction car sa règle étalon de mesure se contracte avec la même proportion lorsqu'il mesure dans la direction parallèle. Par conséquent, pour O', $\ell = \ell'$.

Une autre explication de l'expérience de Michelson a été celle qui consistait à admettre que la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions quel que soit l'état de mouvement de O'. Dans ce cas, $t'_\parallel = t'_\perp = 2\ell'/c$. Cette opinion était celle d'Albert Einstein lorsqu'il formula son principe de relativité.

3.3 Postulats d'Einstein

Einstein pose donc **en principe** qu'un observateur Galiléen ne peut mettre en évidence, par des expériences de physique, un mouvement absolu de son référentiel et que, par conséquent, **tous les référentiels galiléens sont équivalents pour formuler les lois de la Nature. Pour tous les observateurs, ces lois doivent s'exprimer par des équations de même forme**.

A ce principe de **relativité spéciale**, Einstein ajouta les deux principes suivants, qui en résultent d'ailleurs de manière inéluctable, mais qu'il est bon d'énoncer explicitement :

1. *Dans tout référentiel galiléen, la vitesse de la lumière est indépendante de la direction (isotropie).*
2. *La vitesse de la lumière a la même valeur dans tous les référentiels galiléens (invariance).*

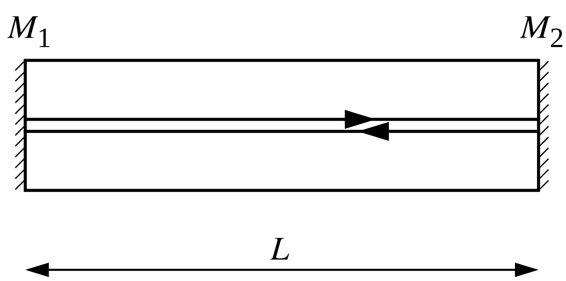
3.4 Le temps physique

Une idée fondamentale d'Einstein est qu'une grandeur n'est physiquement définie que si l'on peut décrire un processus opératoire qui permet, au moins en principe, de la **mesurer**.

Pour la longueur, sa définition est, comme en physique newtonienne, celle de la géométrie euclidienne, basée sur la notion de solide indéformable. Pour la mesure, on utilise une règle.

En ce qui concerne le temps, la notion que s'en fait le sens commun n'est pas suffisante. En effet, la notion d'intervalles de temps égaux et celle de simultanéité de deux évènements en deux lieux distincts ne sont pas des notions claires.

Le temps, en un point donné d'un système galiléen, doit être défini au moyen d'une horloge et, selon Einstein, l'horloge théoriquement parfaite est la "boîte à lumière" : elle se compose d'un tube de longueur L connue, fermée aux deux bouts par des miroirs M_1 et M_2 parallèles entre lesquels chemine indéfiniment un signal lumineux :



L'intervalle de temps qui sépare deux évènements, au point où se trouve le miroir M_1 de l'horloge, est mesuré par le nombre de réflexions du signal lumineux ayant eu lieu en M_1 entre les deux évènements considérés.

Une telle horloge est indépendante de son orientation (principe d'isotropie). Pour que le temps soit partout défini à l'intérieur d'un référentiel galiléen, il faut synchroniser les horloges se trouvant en des points différents. Soit un observateur en A et un autre en B. A envoie un signal lumineux en direction de B en t_{A_1}. B reçoit le signal en t_{B_1} ; B possède un miroir qui renvoie le signal en A. A reçoit ce signal en t_{A_2}. Les deux horloges sont synchronisées d'après le principe d'isotropie, si :

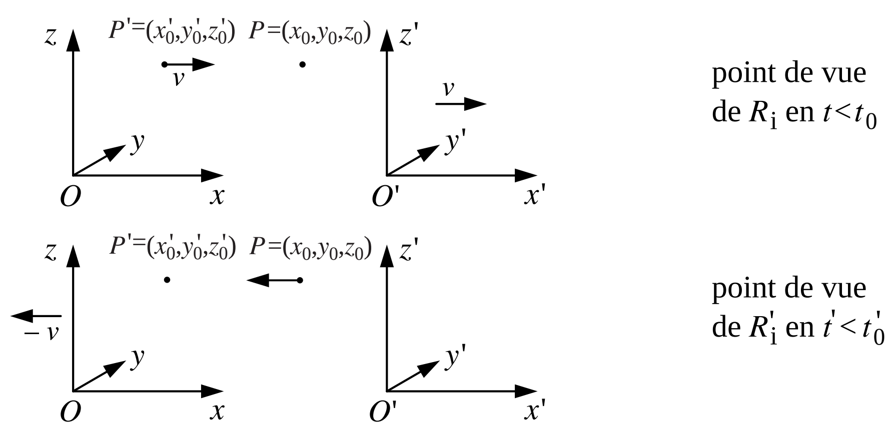
$$t_{B_1} = \frac{t_{A_1} + t_{A_2}}{2}$$

Il est bien clair que la vitesse c intervient dans la définition.

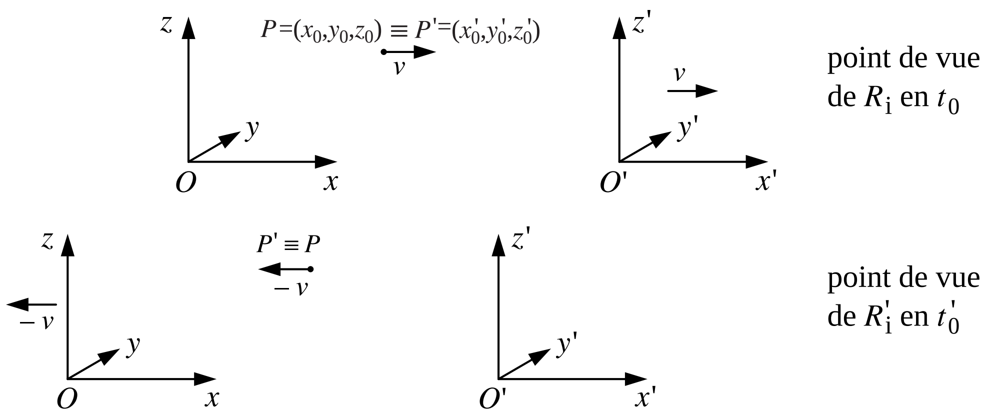
3.5 L'intervalle

Le temps étant défini de la même manière dans tous les référentiels galiléens, avec la même valeur c pour la vitesse de la lumière, un problème fondamental se pose : étant donné un évènement ayant lieu pour un observateur de R_i à l'instant t en x, y, z, et ayant lieu pour un observateur de R_i' à l'instant t' en x', y', z', exprimer x', y', z' et t' en fonction de x, y, z et t et inversement.

Considérons R_i et R_i' munis de repères O, x, y, z et O', x', y', z' avec les axes parallèles. Comme nous l'avons déjà dit, cette manière de choisir les repères ne limite pas la généralité. Soit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ la vitesse des points de R_i' par rapport à R_i. Réciproquement, un observateur de R_i' voit les points de R_i animés d'une vitesse $-\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$ (voir Figure ci-après).

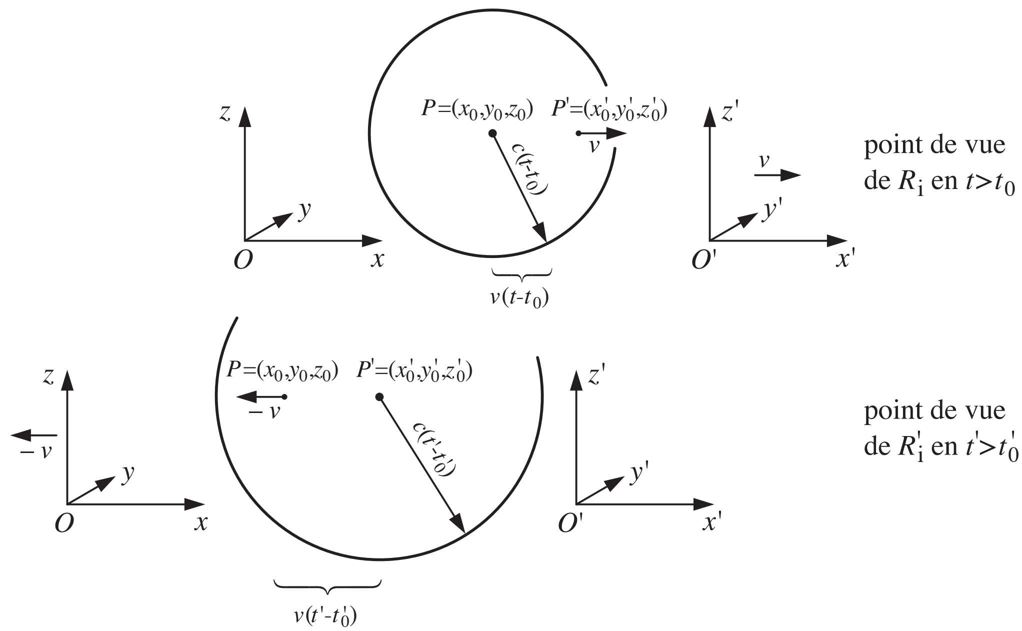


Considérons un point $P' = (x'_0, y'_0, z'_0)$ fixe dans R'_i. Par rapport à R_i, il se déplace horizontalement à vitesse $\mathbf{v}$. Soit $P = (x_0, y_0, z_0)$ fixe dans R_i. En t_0, on suppose que $P' = P$ et qu'une impulsion électromagnétique est émise (flash lumineux). Pour l'observateur de R'_i, P se déplace horizontalement à vitesse $-\mathbf{v}$. Le flash est émis en t'_0 lorsque $P' \equiv P$ (voir Figure ci-après).



La propagation des ondes électromagnétiques obéit aux équations de Maxwell. Les équations de Maxwell sont des lois de la nature qui doivent avoir **la même forme dans tous les référentiels d'inertie** en vertu des postulats d'Einstein. En particulier, pour le flash lumineux envisagé, la solution est une onde sphérique.

Au temps $t > t_0$, l'observateur de R_i observera que le signal lumineux se trouve aux points de coordonnées (x, y, z) tels que ces points sont sur une sphère centrée en $P = (x_0, y_0, z_0)$ et de rayon valant $c(t - t_0)$. Pour l'observateur de R'_i, en $t' > t'_0$, le signal lumineux se trouve aux points de coordonnées (x', y', z') tels que ces points sont sur une sphère centrée en $P' = (x'_0, y'_0, z'_0)$ et de rayon valant $c(t' - t'_0)$ (voir Figure ci-après).



Dans R_i : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2$

Dans R_i' : $(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 = c^2 (t' - t_0')^2$

Il faut qu'en remplaçant x, y, z et t dans la 1$^{\text{ère}}$ équation par leurs valeurs en fonction de x', y', z' et t', on obtienne la deuxième équation et inversement. Ce ne serait pas le cas si l'on utilisait les formules de la transformation de Galilée. On définit alors l'**intervalle** Δs ou $\Delta s'$ par :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

La double condition énoncée ci-dessus revient à dire que les relations qui existent entre x, y, z, t et x', y', z', t' doivent être telles que Δs^2 et $\Delta s'^2$ soient nuls simultanément. Autrement dit, deux évènements caractérisés par $\Delta s = 0$ pour un personnage appartenant à R_i sont caractérisés par $\Delta s' = 0$ pour un personnage appartenant à R_i'.

Cette remarque permet d'écrire $\Delta s = K(\mathbf{v}) \Delta s'$ où $K(\mathbf{v})$ est un coefficient qui dépend à priori de la vitesse. L'équivalence des référentiels R_i et R_i' entraîne la relation $\Delta s' = K(-\mathbf{v})\Delta s$. De ces deux relations, on tire :

$$K\left(\mathbf{v}\right) K\left(-\mathbf{v}\right) = 1$$

D'autre part, la fonction $K(\mathbf{v})$ est nécessairement symétrique, car l'intervalle reste inchangé dans la transformation $x \to -x\,;\, y \to -y\,;\, z \to -z$. Et donc :

$$K\left(\mathbf{v}\right) = K\left(-\mathbf{v}\right)$$

Il résulte :

$$K^2\left(\mathbf{v}\right) = 1 \longrightarrow K\left(\mathbf{v}\right) = \pm 1$$

Comme $K(\mathbf{v})$ doit se réduire à $+1$ pour $\mathbf{v} = 0$, seule la solution $K = 1$ convient. Finalement, les formules de transformation qui font passer de x, y, z, t à x', y', z', t' doivent être telles que :

$$\boxed{\Delta s = \Delta s'}$$

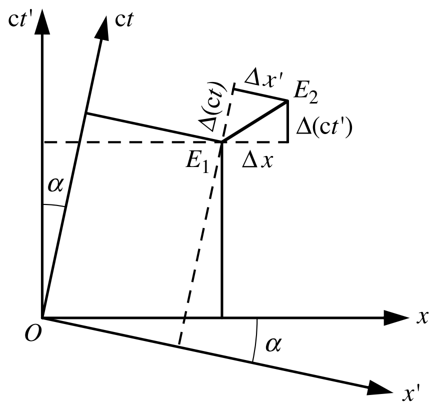
L'intervalle est un invariant relativiste pour des référentiels galiléens.

Revenons à la notion générale d'intervalle. Un évènement E_1, pour un observateur de R_i est caractérisé par x_1, y_1, z_1, t_1. Soit un autre évènement E_2 caractérisé par x_2, y_2, z_2, t_2. L'intervalle entre les deux évènements vaudra :

$$s_{12} = \sqrt{c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

Si les deux évènements sont reliés entre eux par une onde électromagnétique (onde lumineuse), l'intervalle est nul. Dans le cas où les deux évènements sont séparés par une distance plus petite que celle que la lumière peut parcourir durant le temps $(t_2 - t_1)$, l'intervalle est réel et est appelé **intervalle du genre temps**. Dans le cas contraire, c'est **un intervalle du genre espace** (s_{12} est imaginaire).

Pour rendre compte de l'invariance de l'intervalle dans les référentiels d'inertie, il est possible de dessiner des diagrammes. Par exemple, **le diagramme de Brehme** :



E_1 et $E_2 =$ évènements

$$c^2t_1^2 + x_1'^2 = c^2t_1'^2 + x_1^2$$

$$c^2t_2^2 + x_2'^2 = c^2t_2'^2 + x_2^2$$

$$c^2\Delta t^2 + \Delta x'^2 = c^2\Delta t'^2 + \Delta x^2$$

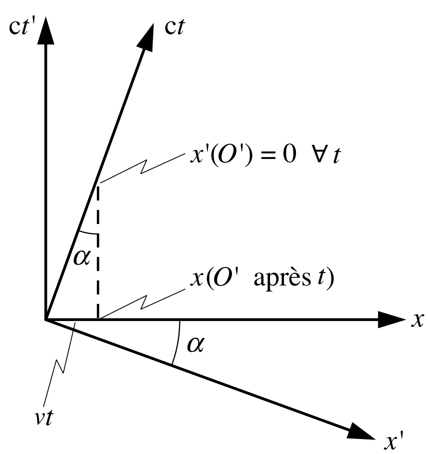
$$\underline{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2}$$

Etant donné que la translation de R_i' par rapport à R_i se fait selon l'axe Ox, il est naturel de poser :

$$\underline{y_1' = y_1 \qquad z_1' = z_1 \qquad et \qquad y_2' = y_2 \qquad z_2' = z_2}$$

Ainsi, on a bien $\Delta s' = \Delta s$.

Remarquons que le mouvement de l'origine O' est repéré par la ligne $x'_{(O')} = 0$ dans R_i' et $x_{(O')} = vt$ dans R_i, si en $t = 0$, les repères sont confondus. Cela nous permet de trouver une expression pour α :

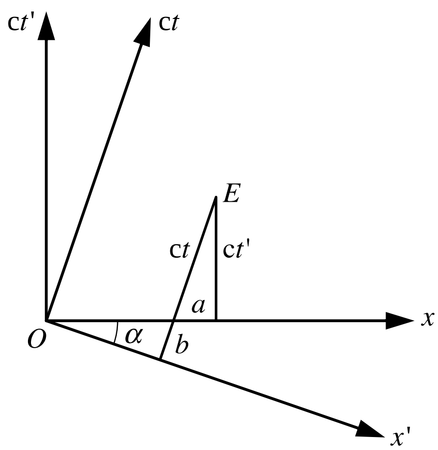


$$\boxed{\sin\alpha = \frac{v}{c}}$$

3.6 La transformation de Lorentz

Le groupe de transformation qui relie les coordonnées d'espace et de temps de deux référentiels galiléens est appelé **"groupe propre de Lorentz"** (c'est un sous-groupe d'une transformation plus générale). On trouve facilement les éléments de la matrice de transformation en exprimant l'invariance de l'intervalle.

i) Approche par diagramme de Brehme



Le diagramme de Brehme fournit les relations géométriques suivantes

$$\frac{a}{ct'} = \tan\alpha \qquad \frac{b}{x'} = \tan\alpha$$

$$x' = (x - a)\cos\alpha$$

$$ct' = (ct - b)\cos\alpha$$

Avec un peu d'algèbre on élimine a et b :

$$\begin{aligned}
x' &= (x - a)\cos\alpha \\
&= x\cos\alpha - ct'\sin\alpha \\
&= x\cos\alpha - (ct - b)\cos\alpha\ \sin\alpha \\
&= x\cos\alpha - ct\cos\alpha\ \sin\alpha + x'\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{1-\sin^2\alpha}\left(x\cos\alpha - ct\cos\alpha\ \sin\alpha\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(x\cos\alpha - ct\cos\alpha\ \sin\alpha\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$x' = \frac{1}{\cos\alpha}\left(x - ct\sin\alpha\right)$$

De façon similaire on obtient l'expression pour ct' :

$$ct' = \frac{1}{\cos\alpha}\left(ct - x\sin\alpha\right)$$

En introduisant $\dfrac{v}{c} = \sin\alpha$ et en utilisant $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, on trouve :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(x - ct\left(\frac{v}{c}\right)\right)$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(ct - x\left(\frac{v}{c}\right)\right)$$

Ensuite, avec $z = z'$, $y = y'$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

La transformation peut aussi s'écrire sous une forme générale :

$$\boxed{x'^{\,k} = \mathcal{L}^k_j\,(v)\,x^j}$$

où $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, et $x^4 = ct$. Le déterminant de la matrice $\mathcal{L}$ vaut $\left\|\mathcal{L}^k_j\right\| = 1$.

Il est facile d'exprimer la transformation inverse $\mathcal{L}^{-1}$. On trouve naturellement :

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}(v) = \mathcal{L}(-v)}$$

Ce qui entraîne

$$\underline{x^k = \mathcal{L}_j^k(-v)\, x'^j}$$

Pour vérifier la structure de groupe de cet ensemble de transformations, on est amené à calculer le produit de deux matrices du type $\mathcal{L}$ et vérifier que l'on obtient encore une matrice de ce type. On vérifie que :

$$\mathcal{L}(v_2(1)) \cdot \mathcal{L}(v_3(2)) = \mathcal{L}(v_3(1))$$

avec

$$\boxed{v_3(1) = \frac{v_3(2) + v_2(1)}{1 + \dfrac{v_2(1)\, v_3(2)}{c^2}}}$$

où $v_i(k)$ est la vitesse du référentiel i mesuré dans le référentiel k.

On remarque que la loi de composition des vitesses n'est plus la même en relativité que dans la mécanique de Galilée (dans ce cas, on aurait eu $v_3(1) = v_2(1) + v_3(2)$).

On remarque que si l'une des vitesses, $v_2(1)$ par exemple, vaut c, $v_3(1)$ vaudra c quelle que soit la valeur de l'autre vitesse ($v_3(2)$ dans notre cas). c apparaît donc comme une vitesse limite.

La transformation de Lorentz se réduit à celle de Galilée si l'on attribue à c une valeur infinie. Cependant, cette conception n'est pas physique et il est préférable de considérer le cas particulier où $v \lll c$.

ii) Approche par calcul

On suppose que la relation $x' \longmapsto x$ est de la forme :

$$x' = \gamma\left(x - vt\right)$$

avec $\gamma = \gamma(c, v)$ et $\lim\limits_{v \to 0} \gamma = 1$. L'équivalence des référentiels R_i et R'_i permet d'écrire

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right)$$

$$\begin{aligned}
x &= \gamma\left(\gamma\left(x - vt\right) + vt'\right) \\
\gamma vt' &= x - \gamma^2\left(x - vt\right) \\
t' &= \frac{1}{\gamma v}\left(x\left(1 - \gamma^2\right) + \gamma^2 vt\right) \\
t' &= \gamma\left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2}\frac{x}{v}\right)
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ conserve Δs, en particulier $\Delta s = 0$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

implique

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

La première équation s'écrit en appliquant les transformations obtenues jusqu'à présent :

$$\gamma^2\left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2\left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2}\frac{x}{v}\right)^2$$

Vu qu'elle doit être identique à la deuxième équation, on peut faire les considérations suivantes :

i) terme devant x^2 doit être 1
ii) terme devant t^2 doit être c^2
iii) terme xt doit être 0

Selon i)

$$\gamma^2 - c^2\gamma^2 \, \frac{\left(1-\gamma^2\right)^2}{\gamma^4} \, \frac{1}{v^2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$-\,c^2 \, \frac{\left(1-\gamma^2\right)^2}{\gamma^2 v^2} = 1 - \gamma^2$$

$$-\,c^2 \, \frac{\left(1-\gamma^2\right)}{\gamma^2 v^2} = 1$$

$$-\,c^2 + c^2\gamma^2 = v^2\gamma^2$$

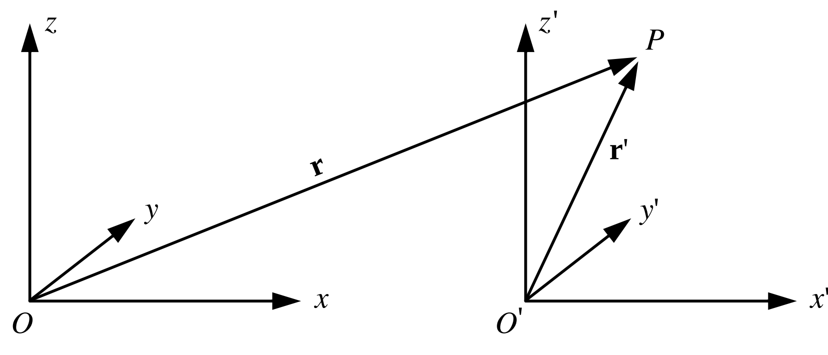
$$\gamma^2 \left(c^2 - v^2\right) = c^2$$

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

Donc on trouve bien l'expression $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

3.7 Transformation de la vitesse

Considérons une particule en mouvement par rapport à R_i et R_i' :



P est repéré par $\mathbf{r} = (x, y, z)$ par rapport à R_i

P est repéré par $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ par rapport àR_i'

La vitesse de R_i' est $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ par rapport à R_i

Par définition, la vitesse de P vaut :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \quad \text{dans} \quad R_i$$

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} \quad \text{dans} \quad R_i'$$

On peut exprimer x, y, z et t en fonction de x', y', z' et t' :

$$I \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[x' + ct' \left(\dfrac{v}{c}\right)\right] \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[ct' + x' \left(\dfrac{v}{c}\right)\right] \end{cases} \qquad II \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[x - ct \left(\dfrac{v}{c}\right)\right] \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[ct - x \left(\dfrac{v}{c}\right)\right] \end{cases}$$

Différencions le 1$^{\text{er}}$ groupe d'équations et calculons

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Après calcul, on trouve

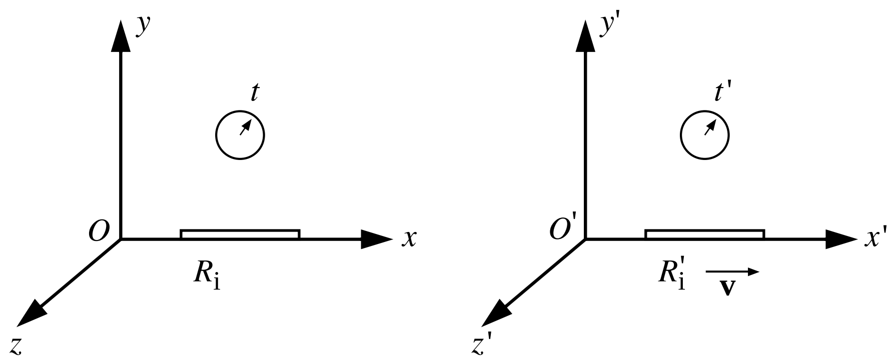
$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_{x'} + v}{1 + \dfrac{u'_{x'} v}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{u'_{y'} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u'_{x'} v}{c^2}} \\ u_z = \dfrac{u'_{z'} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u'_{x'} v}{c^2}} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} u'_{x'} = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_{y'} = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_{z'} = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \end{array}$$

Ces relations contiennent la relation de composition de vitesses déjà trouvée. En plus, on a des relations entre u_y, u_z et $u'_{x'}, u'_{y'}, u'_{z'}$ et v.

On remarque à nouveau que la composition des vitesses n'est plus la même en relativité que dans la mécanique de Galilée.

Pour obtenir les composantes $u'_{x'}, u'_{y'}, u'_{z'}$ en fonction de u_x, u_y, u_z et v, il suffit de permuter les indices et de changer v en $(-v)$.

3.8 Contraction de la longueur et dilatation de la durée



1) Contraction de longueur

Un barreau est placé sur l'axe Ox' du référentiel d'inertie R'_i. On associe deux événements A' et B' aux deux extrémités du barreau. La distance entre A' et B' et $\Delta x' = L_0$, qui correspond à la longueur du barreau mesurée dans R'_i à $\Delta t' = 0$ (ce qui signifie que les deux événements sont mesurés en même temps, à un instant t' donné).

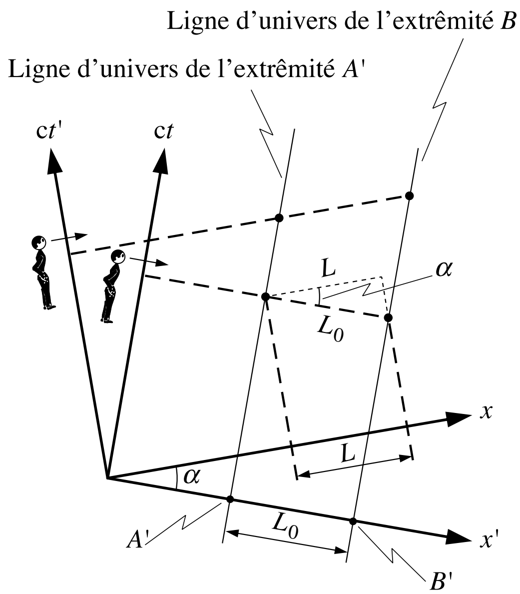
Pour prévoir la valeur de la longueur L de ce même barreau mesurée à un instant t donné par un observateur lié à R_i, il faut utiliser l'équation de transformation :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(x - ct\frac{v}{c} \right)$$

En effet, cette relation permet de calculer Δx en fonction de $\Delta x'$ lorsque $\Delta t = 0$ (pour déterminer la longueur, il faut que les deux événements soient mesurés en même temps aussi dans R_i).
On obtient : $\Delta x' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\Delta x$, qui devient dans notre cas :

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\Delta x' = L_0, \quad \Delta x = L)$$

Diagramme de Brehme



$$L = L_0 \cos\alpha = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

2) Dilatation de la durée
Considérons deux évènements A' et B' qui ont lieu au même endroit x'_0 dans R'_i à deux temps différents $t'_{B'} - t'_{A'} = \Delta t'$

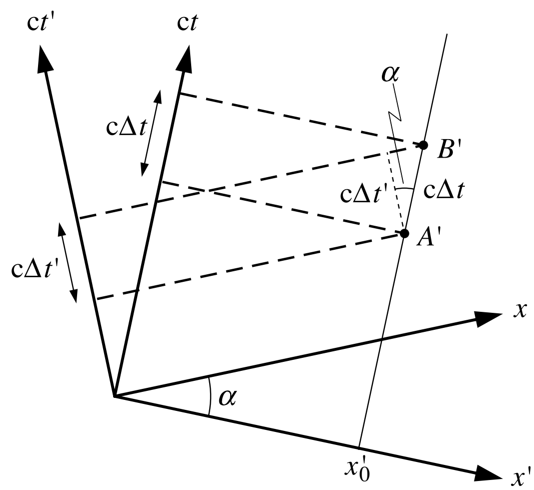
Pour exprimer l'intervalle de temps Δt entre ces deux évènements dans R_i en fonction de $\Delta t'$ en tenant compte de la condition $\Delta x' = 0$, il faut utiliser l'équation de transformation :

$$ct = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(ct' + x'\frac{v}{c}\right)$$

il vient alors :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

<u>Diagramme de Brehme</u>



$$c\Delta t' = \cos\alpha \; c\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\cos\alpha} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Exemple :

durée de vie d'un pion $\pi^{\pm}$ au repos : $\tau' = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

vitesse du pion par rapport à la Terre : $v = 0.99999999\, c$

durée de vie dans R_i de la Terre : $\tau = \dfrac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 7071\,\tau'$

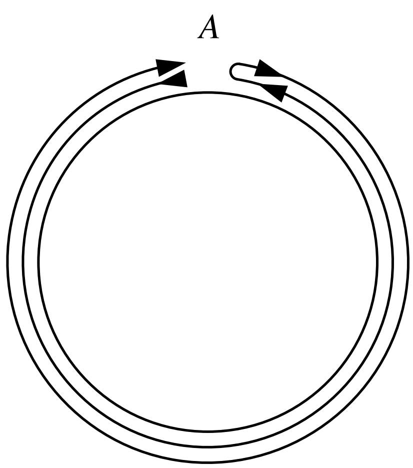
distance parcourue : 56 km, donc on peut les observer sur la Terre.

En résumé, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} L = L_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \;;\; (L = \Delta x,\; L_0 = \Delta x') \\[2ex] \Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array}}$$

La signification physique de ces résultats fait l'objet de nombreuses discussions. En particulier, la dilatation de la durée a donné lieu à un paradoxe fameux : le paradoxe des jumeaux. D'après la deuxième relation, il apparaît que deux personnages "équivalents" (jumeaux), placés respectivement dans le référentiel R_i et dans le référentiel R'_i, vieillissent de manière différente. Dès lors, en imaginant que R'_i est une fusée qui part de R_i et y revient après avoir suivi une très longue trajectoire à une vitesse assez voisine de c, on est amené à envisager que les jumeaux pourront comparer leur âge physique après l'expérience. A première vue, chacun des personnages connaissant les équations de dilatation de la durée (et de contraction de la longueur) est en droit de se considérer **comme plus âgé que l'autre (équivalence des référentiels) ce qui constitue le fait paradoxal**. En réalité, les référentiels ne sont pas équivalents, car il est impossible que R'_i suive la trajectoire qui a été décrite en restant toujours galiléen. Il n'y a donc pas vraiment de paradoxe et l'étude correcte d'une telle expérience doit se faire dans le cadre d'une théorie moins restrictive que la relativité spéciale (relativité générale).

En 1971-1972 une expérience a été tentée pour vérifier l'exactitude du "paradoxe des jumeaux". Un avion a été muni d'une horloge extrêmement précise (Maser) alors qu'au même endroit, au sol, une même horloge a été synchronisée à celle de l'avion.



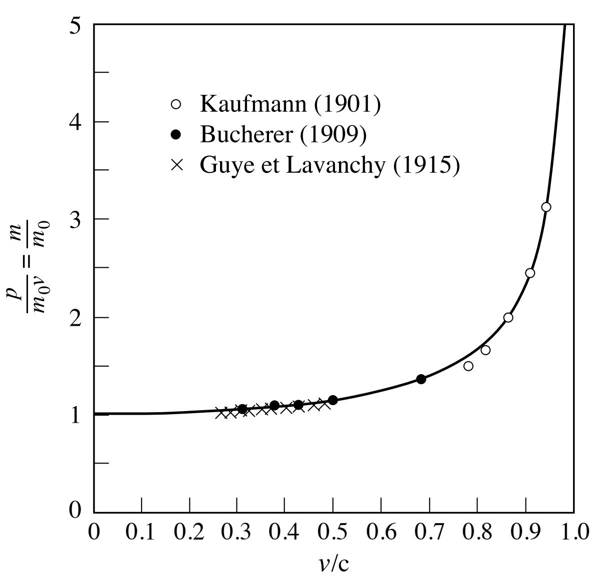
L'avion a alors tourné autour de la terre dans un sens le long de l'équateur, puis a rebroussé chemin. A l'arrivée, les horloges marquaient un décalage dans le sens prédit par la théorie de la relativité spéciale et l'effet était du bon ordre de grandeur, en dehors des erreurs possibles. Il faut cependant noter que les deux référentiels, terre et avion, ne sont pas galiléens !

3.9 Dynamique de la particule relativiste

D'après Einstein, la transformation de Lorentz permet de comparer les observations d'évènements à partir de référentiels d'inertie galiléens et il faut que les lois de la nature s'expriment de la même manière dans ces référentiels.

Le problème consiste donc à trouver comment la force, la quantité de mouvement et l'énergie se transforment lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, les lois devant garder leur même forme.

Il est possible, à partir d'arguments très généraux, de déduire ces transformations. **Nous nous contenterons d'induire ces résultats, en faisant intervenir l'expérience**. En mécanique newtonienne, par rapport à un référentiel inertiel, on a la loi de Newton $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule par rapport à R_i. La masse m est constante. L'expérience montre que si $\mathbf{v}$ est grand on ne peut plus considérer la masse m constante.



Des électrons sont émis dans des processus de différents types, couvrant des gammes différentes de vitesse. On applique des champs électrique et magnétique pour filtrer les électrons selon leur vitesse et les dévier ensuite. La trajectoire est déterminée grâce aux impacts sur une plaque photographique. Cette trajectoire dépend de q/m, donnant accès à m pour une vitesse donnée. Le graphe montre le rapport m/m_0 en fonction de v/c pour des mesures effectuées par trois groupes différents.

En effet, on exerce une force $\mathbf{F}$ connue sur une particule et on en déduit expérimentalement la quantité de mouvement correspondante. En mesurant encore la vitesse $\mathbf{v}$ de la particule par rapport à R_i, on constate que la masse suit la loi suivante (les expériences ont eu lieu au début du $20^{\text{ième}}$ siècle déjà !) :

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0$$

où m_0 est la masse au repos (lorsque la particule est attachée au référentiel R_i) et m est sa masse observée depuis R_i. La quantité de mouvement vaudra donc :

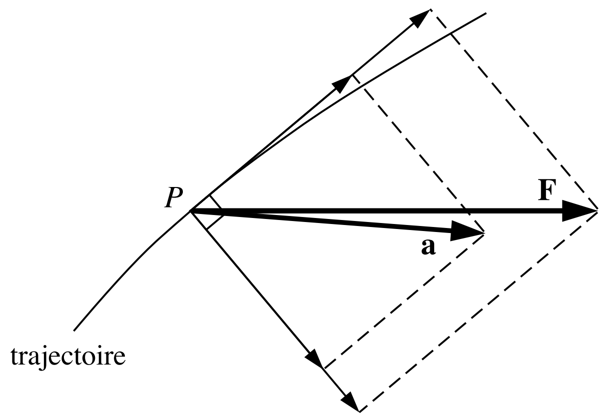
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

Il est bien clair qu'il faudra encore vérifier que cette expression satisfasse au principe de relativité. Avant de faire cela, exprimons ce que deviennent la force $\mathbf{F}$ et l'énergie cinétique E_{cin} d'une particule de vitesse $\mathbf{v}$ observée depuis un référentiel R_i.

La relation qui lie la force $\mathbf{F}$ et la variation de quantité de mouvement est valable encore en mécanique relativiste parce que nous choisissons **cette définition de la force** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0 \mathbf{v}) \\
&= m_0\gamma\dot{\mathbf{v}} + m_0\dot{\gamma}\mathbf{v} \\
&= m_0\gamma\dot{\mathbf{v}} + m_0\mathbf{v}\left(-\frac{1}{2}\gamma^3\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\dot{v}\right) \\
&= m_0\gamma\dot{\mathbf{v}} + m_0\gamma^3\frac{v}{c^2}\dot{v}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Donc dans le cas général et à haute vitesse, la force n'est pas colinéaire avec l'accélération.



Calculons maintenant le travail de la force **F** entre deux points 1 et 2 de sa trajectoire naturelle :

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}(m\mathbf{v})$$

Le travail nécessaire à ce que la particule soumise à **F** acquiert la vitesse **v** sera par définition l'énergie cinétique E_{cin}.

$$E_{\text{cin}} = \int_0^v \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^v \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}(m\mathbf{v}) = \int_0^v v^2 \mathrm{d}m + \int_0^v \frac{m}{2} \mathrm{d}\left(v^2\right)$$

On peut récrire : $v^2 \mathrm{d}m = \left(c^2 - \frac{m_0^2 c^2}{m^2}\right) \mathrm{d}m = \mathrm{d}\left(mc^2 + \frac{m_0^2 c^2}{m}\right)$

ainsi que : $\frac{m}{2}\,\mathrm{d}(v^2) = mv\,\mathrm{d}v = m_0 \gamma v\,\mathrm{d}v = m_0 c^2 \frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}\left(m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = -\mathrm{d}\left(m_0 c^2 \frac{1}{\gamma}\right) = -\mathrm{d}\left(\frac{m_0^2 c^2}{m}\right)$

Donc pour l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin}} = \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}\left(mc^2 + \frac{m_0^2 c^2}{m}\right) - \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}\left(\frac{m_0^2 c^2}{m}\right) = \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}(mc^2) = mc^2 - m_0 c^2$$

$$\boxed{E_{\text{cin}} = (m - m_0)\, c^2}$$

L'augmentation d'énergie cinétique peut donc être considérée comme due à l'augmentation de la masse, celle-ci augmentant avec la vitesse. La quantité $m_0 c^2$ est appelée **énergie de repos de la particule**.

L'énergie totale de la particule vaudra :

$$\boxed{E = E_{\text{cin}} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = mc^2}$$

Il faut remarquer que dans cette expression, il n'y a pas d'énergie potentielle. Il n'y a que l'énergie cinétique et l'énergie de repos. En tenant compte de $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, et de $E = mc^2$, on peut écrire

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{E}\mathbf{p}$$

L'équation donnant la quantité $E = mc^2$ est équivalente à :

$$\boxed{E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$$

<u>Remarques</u> :

1. A première vue, il semble que la valeur de l'énergie cinétique $E_{\text{cin}} = (m - m_0)c^2$ soit différente de celle trouvée en mécanique classique, soit $\frac{1}{2}mv^2$. Cependant, si l'on développe la masse en série de puissance :

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\ldots\right)$$

En remplaçant, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots\ldots \\ &= \frac{1}{2}m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

2. Si l'on considère une particule dont la masse de repos est nulle ($m_0 = 0$), son énergie totale vaut $E = cp$.

   En tenant compte de la relation $\mathbf{v} = \frac{c^2}{E}\mathbf{p}$, on obtient $v = c$. Autrement dit, une particule caractérisée par sa masse de repos $m_0 = 0$ ne peut se déplacer qu'à la vitesse de la lumière et ne peut jamais être au repos dans un référentiel inertiel.

   Pour $v \to c$, $\gamma \to \infty$. Cependant, puisque on a aussi que $m_0 \to 0$, la quantité de mouvement $p = \gamma m_0 v$ reste finie. En effet, il y a des nombreuses évidences expérimentales de l'existence de particules pour lesquelles $m_0 c^2 = 0$, comme par example les photons.

Examinons encore pour terminer comment l'énergie et la quantité de mouvement se transforment lorsqu'on change de référentiel d'inertie. En vertu du principe de la relativité, la relation liant l'énergie et la quantité de mouvement :

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

doit avoir la même forme pour des observateurs en mouvement relatif de translation. Soit $\mathbf{v}$ la vitesse de translation de R_i' par rapport à R_i.

Pour l'observateur de R_i : $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$, c'est-à-dire :

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2$$

Pour l'observateur de R_i' :

$$\frac{E'^2}{c^2} - p_{x'}'^2 - p_{y'}'^2 - p_{z'}'^2 = m_0^2 c^2$$

La masse m_0 est la même pour les deux observateurs puisqu'elle correspond à la masse de repos. Il vient alors :

$$\frac{E^2}{c^2} - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{E'^2}{c^2} - \left(p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2\right)$$

Cette relation a la même forme que celle définissant l'intervalle s_{12} :

$$c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) = c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right)$$

à condition de faire la correspondance :

$$p_x \longrightarrow \Delta x \qquad p_y \longrightarrow \Delta y \qquad p_z \longrightarrow \Delta z \qquad \text{et} \qquad E/c \longrightarrow ct$$

Par conséquent, l'invariance de la relation

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

entraîne une relation de Lorentz entre p_x, p_y, p_z, E/c et $p'_{x'}$, $p'_{y'}$, $p'_{z'}$, E'/c.

Pour $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ il vient :

$$\begin{cases} p'_{x'} = \dfrac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p'_{y'} = p_y \\ p'_{z'} = p_z \\ E'/c = \dfrac{E/c - p_x\,(v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

La force agissant sur une particule vaut respectivement pour des observateurs liés à R_i et R'_i

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{\mathrm{d}t'}$$

La similitude de ces expressions est nécessaire pour satisfaire au principe de la relativité. La relation entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ est en général compliquée. Dans le cas simple où la particule est temporairement au repos dans R'_i, $\mathbf{F}'$ est appelée **force propre** et on peut montrer que

$$\begin{cases} F'_{x'} = F_x \\ F'_{y'} = \dfrac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ F'_{z'} = \dfrac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

On remarque que la force ne se transforme pas de la même manière que x, y, z, ct ou $p_x, p_y, p_z, E/c$.

La raison est que les composantes de la force ne sont pas parties d'un quadrivecteur. En relativité, la force n'est pas un concept aussi utile et fondamental que l'énergie et la quantité de mouvement.