Conjugaison de charge C

- Opération consistant à changer le signe de toutes les charges d'une particule X pour obtenir son anti-particule $\overline{X}$

$$\underset{\text{charges } q_i}{\mathbf{X}} \xrightarrow{\;C\;} \underset{\text{charges } -q_i}{\overline{\mathbf{X}}}$$

- Si $q_i = 0$, alors X est sa propre antiparticule
  → deux cas: $\mathbf{X} \xrightarrow{C} +\mathbf{X}$
  $\mathbf{X} \xrightarrow{C} -\mathbf{X}$

Nombre quantique	**Exemple**
C = +1	π^0
C = –1	γ

- Les interactions forte et é.m. conservent C

$$\pi^0 \to \gamma\gamma \qquad\qquad \pi^0 \not\to \gamma\gamma\gamma$$

Nucléon (= proton ou neutron)

- Le nucléon a un spin s = ½
  - Espace des états de spin de dimension 2s+1 = 2
  - Base de l'espace des états de spin formée d'états propres de $\vec{s}^2$ et s_z $\quad\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$$\vec{s}^2|\uparrow\rangle = s(s+1)\hbar^2|\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\uparrow\rangle \qquad s_z|\uparrow\rangle = +\frac{1}{2}\hbar\;|\uparrow\rangle$$

$$\vec{s}^2|\downarrow\rangle = s(s+1)\hbar^2|\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\downarrow\rangle \qquad s_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\;|\downarrow\rangle$$

- Le nucléon est un fermion
  - il obéit à la statistique de Fermi-Dirac, et donc au principe d'exclusion de Pauli

En mécanique quantique, deux particules identiques sont indistinguables. **L'état quantique d'un système de deux particules identiques doit être soit antisymétrique (cas des fermions) soit symétrique (cas des bosons) sous l'échange des deux particules.**

Système de deux nucléons de spin ½

- Base de l'espace de états de spin de dim. 4: $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$
  - pas états propres du spin total $\boxed{\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2}$
- Nouvelle base d'états propres du spin total: $\{|S; M_S\rangle\}, \quad S = 0, 1, \quad -S \le M_S \le S$

$$\boxed{|0;\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}$$

état singulet S=0, antisymétrique

$$|1; +1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|1;\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|1; -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

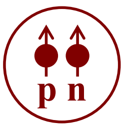
triplet d'états S=1, symétriques sous l'échange des deux nucléons

Si l'état de mouvement est symétrique (ℓ pair, par ex. ℓ=0)

- un système pp ou nn (fermions identiques) doit être dans un état antisymétrique, donc avoir S=0 (S=1 interdit)
- un système pn (fermions différents) peut avoir S=0 ou S=1

Interaction nucléon-nucléon: faits d'expérience

- Deuton:



le seul système lié de deux nucléons est le système pn dans l'état S=1 et ℓ=0 ⇒ **le force entre un proton et un neutron dépend du spin**

- **Indépendance de charge des forces nucléaires**:
  - si les deux nucléons sont dans le même état de mouvement relatif et de spin total, et si on ignore les forces de Coulomb, alors

force entre p et p = force entre n et n = force entre p et n

  - de plus: $m_p \simeq m_n$

⇒ **Le proton et le neutron sont très semblables; ils seraient indiscernables si la seule force en jeu était la force nucléaire forte**

la force é.m. "lève la dégénerescence"

Isospin du nucléon

- Le nucléon a un isospin $I = ½$
  - Le nucléon a $2I+1 = 2$ états de charge possible
    - état proton $|p\rangle$
    - état neutron $|n\rangle$

    "doublet d'isospin"

  - Espace des états d'isospin de dimension $2I+1 = 2$
  - Base de l'espace des états de spin formée d'états propres de $\vec{I}^2$ et I_3 $\{|p\rangle, |n\rangle\}$

$$\vec{I}^2|p\rangle = I(I+1)|p\rangle = \frac{3}{4}|p\rangle \qquad I_3|p\rangle = +\frac{1}{2}|p\rangle$$
$$\vec{I}^2|n\rangle = I(I+1)|n\rangle = \frac{3}{4}|n\rangle \qquad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$$

même formalisme que le spin

  - opérateur de charge pour le nucléon: $Q = I_3 + 1/2$

$$Q|p\rangle = +1|p\rangle \quad \text{valeur propre } +1$$
$$Q|n\rangle = 0|n\rangle \quad \text{valeur propre } 0$$

Composition de deux isospins ½

- Même formalisme que pour la compositions de deux spins ½
- Isopsin total:

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)}$$

- Les états propres de $\vec{I}^2$ et I_3 forment une base de l'espace des éats d'isospin $\{|I;M_I\rangle\}$, $I = 0, 1, \quad -I \le M_I \le I$

$$\boxed{|0;\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pn\rangle - |np\rangle\right)}$$

état singulet I=0, antisymétrique

$$|1;+1\rangle = |pp\rangle$$
$$|1;\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pn\rangle + |np\rangle\right)$$
$$|1;-1\rangle = |nn\rangle$$

triplet d'états I=1, symétriques sous l'échange des deux nucléons

Système de deux nucléons

- Etat de spin $\left|S; M_S\right\rangle$, avec $S = 0$ ou 1
- Etat d'isospin $\left|I; M_I\right\rangle$, avec $I = 0$ ou 1
- Etat de mouvement relatif $\left|\psi\right\rangle$

- L'état complet $\left|\psi\right\rangle \otimes \left|S; M_S\right\rangle \otimes \left|I; M_I\right\rangle$ doit être antisymétrique pour des fermions
  - Cas ℓ=0 (|ψ> symétrique): 6 états internes possibles

$$\underbrace{\left|S=0; M_S=0\right\rangle}_{\text{antisym.}} \otimes \underbrace{\left|I=1; M_I\right\rangle}_{\text{sym.}} \quad \begin{cases} \left|0;0\right\rangle \otimes \left|1;+1\right\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>) \otimes |pp> \\ \left|0;0\right\rangle \otimes \left|1;\ 0\right\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> + |np>) \\ \left|0;0\right\rangle \otimes \left|1;-1\right\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>) \otimes |nn> \end{cases}$$

$$\underbrace{\left|S=1; M_S\right\rangle}_{\text{sym.}} \otimes \underbrace{\left|I=0; M_I=0\right\rangle}_{\text{antisym.}} \quad \begin{cases} \left|1;+1\right\rangle \otimes \left|0;0\right\rangle & |\uparrow\uparrow> \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> - |np>) \\ \left|1;\ 0\right\rangle \otimes \left|0;0\right\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> - |np>) \\ \left|1;-1\right\rangle \otimes \left|0;0\right\rangle & |\downarrow\downarrow> \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> - |np>) \end{cases}$$

Interaction forte et isospin

- Interaction dépend de l'isospin total
  - état lié pn, avec ℓ=0 et S=1 ⇒ I=0
  - états pp et nn ont nécessairement I=1 puisque $I_3 = \pm 1$;
    or pp ou nn n'est pas un état lié

Système avec ℓ=0	I	M_I	S	
pp	1	+1	0	même force entre les deux nucléons
pn	1	0	0	
nn	1	–1	0	
pn (deuton)	0	0	1	force différente

Les forces nucléaires:
– peuvent dépendre de I
– sont indépendentes de M_I
– conservent l'isospin

indépendance de charge

invariance par rotation dans l'espace d'isospin (ou espace de charge)
⇔ $\vec{I}$ conservé
⇔ $[H, I_1] = [H, I_2] = [H, I_3] = 0$

NB: les forces é.m et faible ne conservent pas (violent) l'isospin !

Isospin du pion

- Le pion de Yukawa (= méson π) a un isospin I = 1
  - Il a donc 2I+1 = 3 états de charge possibles

$$\underbrace{|\pi^+\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^-\rangle}_{\text{base de l'espace des états d'isospin du pion}} \qquad \text{“triplet d'isospin”}$$

$$\vec{I}^2|\pi^+\rangle = I(I+1)|\pi^+\rangle \qquad I_3|\pi^+\rangle = +|\pi^+\rangle \quad \text{valeur propre } +1$$
$$\vec{I}^2|\pi^0\rangle = I(I+1)|\pi^0\rangle \qquad I_3|\pi^0\rangle = 0|\pi^0\rangle \quad \text{valeur propre } 0$$
$$\vec{I}^2|\pi^-\rangle = I(I+1)|\pi^-\rangle \qquad I_3|\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle \quad \text{valeur propre } -1$$

  - opérateur de charge pour le pion: $Q = I_3$

Tout hadron a un isospin

hadron = particule sensible à l'interaction forte

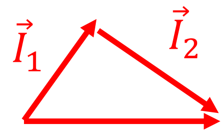
- Exemples:

Hadron	Isospin I	Etats de charge	Valeur propre de I_3	Masse [MeV/c^2]	Spin et parité J^P
N (nucléon)	1/2	p n	+1/2 –1/2	938.3 939.6	$1/2^+$
π (pion)	1	π^+ π^0 π^-	+1 0 –1	139.6 135.0 139.6	0^-
ρ (rho)	1	ρ^+ ρ^0 ρ^-	+1 0 –1	~770	1^-
ω (omega)	0	ω^0	0	781.9	1^-
Δ (delta)	3/2	Δ^{++} Δ^+ Δ^0 Δ^-	+3/2 +1/2 –1/2 –3/2	~1232	$3/2^+$

Conservation de l'isospin total

- Le formalisme d'isospin est le même que le formalisme des moments cinétiques
- Somme (vectorielle) de deux isospins:
  - Règle de composition:

$$\boxed{|I_1 - I_2| \leq I \leq I_1 + I_2,\ \text{par pas de 1}}$$

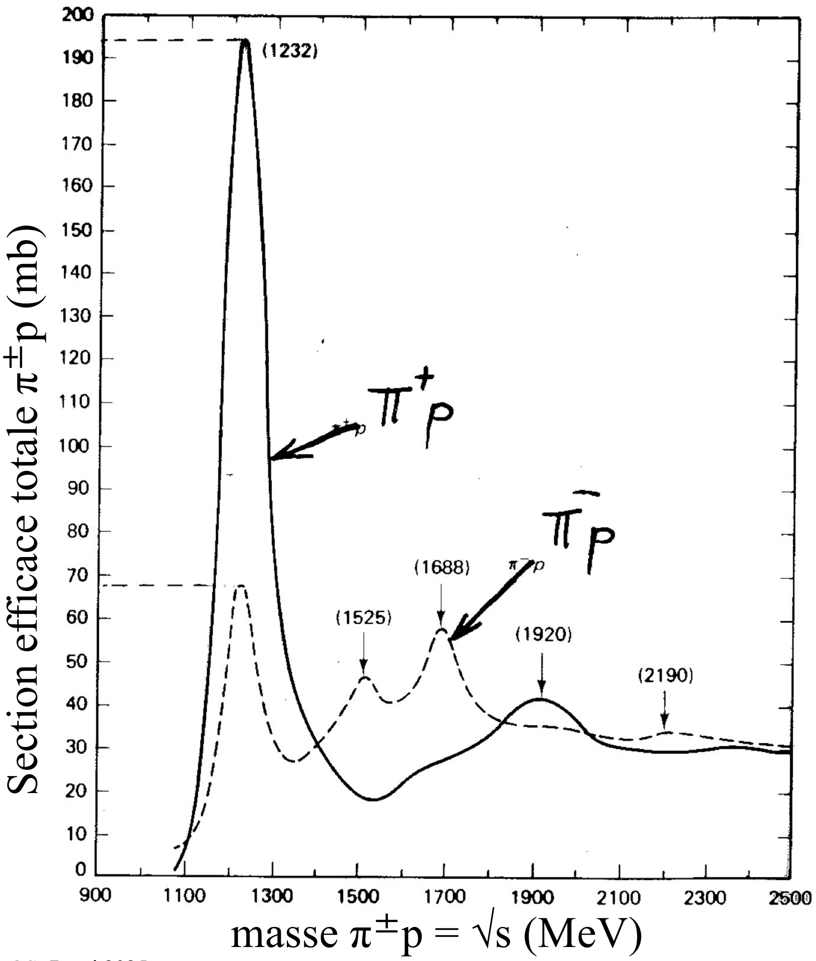


$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$

- Exemples de processus d'interaction forte (avec conservation de l'isospin, c'est-à-dire de I et I_3):
  - $\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++}$
  - $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
  - $\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$

Interaction pion-nucléon

à basse énergie



Pourquoi la résonance à 1232 MeV est-elle plus intense dans π^+p que dans π^-p ?

Pourquoi y a-t-il des résonances à 1525 et 1688 MeV dans π^-p mais pas dans π^+p ?

Discussion sur la base de:
- **conservation de l'isospin**
- **indépendance de charge des forces nucléaires**

Interaction pion-nucléon

à basse énergie

- Faisceau de pions chargés sur cible d'hydrogène:

$\pi^+ p \to \pi^+ p$	diffusion élastique
$\pi^- p \to \pi^- p$	diffusion élastique
$\pi^- p \to \pi^0 n$	échange de charge

- Isospin du pion π: $I_\pi = 1$
- Isospin du nucléon N: $I_N = 1/2$
- Isospin total du système πN: $I = 3/2$ ou $1/2$

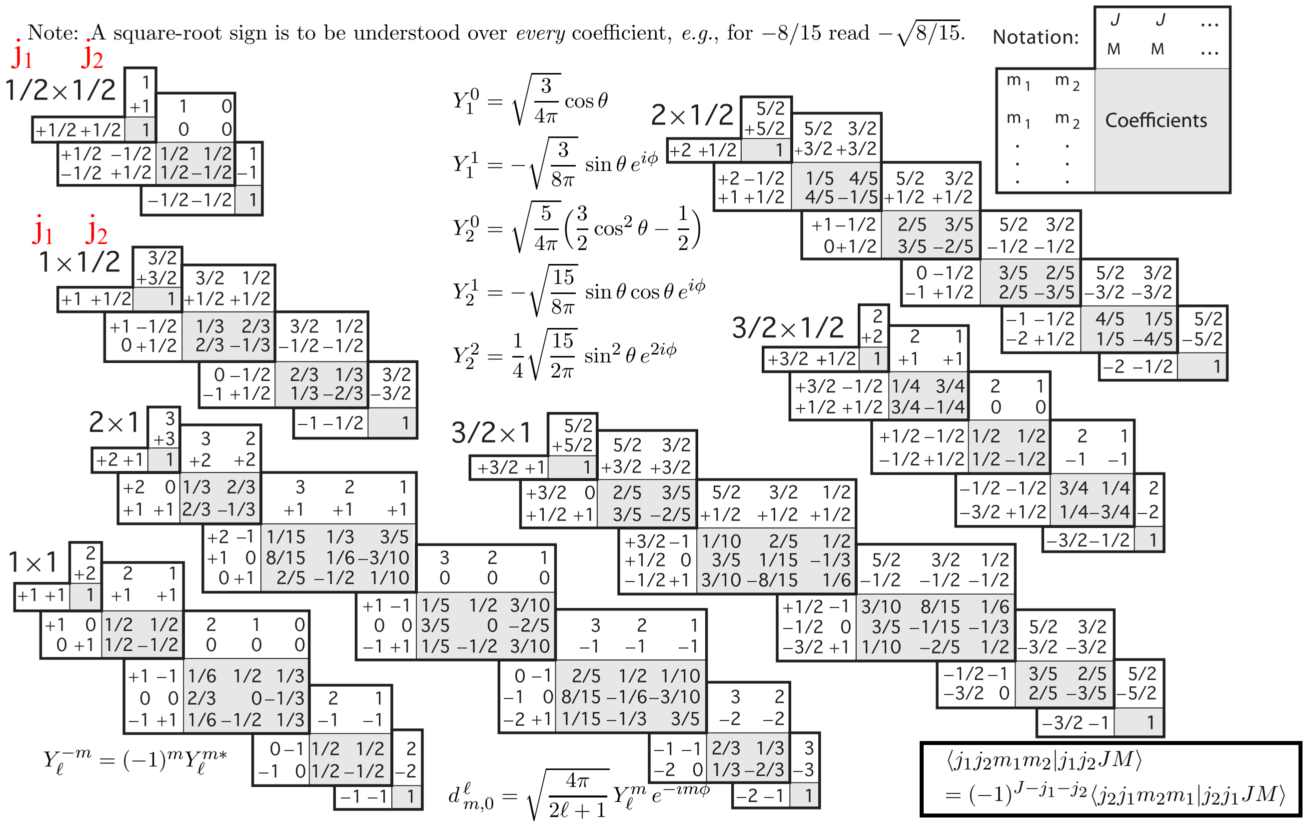
$$\boxed{\vec{I} = \vec{I}_\pi + \vec{I}_N}$$

- Etats propres de l'isospin total ($\vec{I}^2$ et I_3):

$$|I;M\rangle = \sum_{\substack{M_\pi, M_N \\ M_\pi + M_N = M}} \underbrace{C_{I_\pi I_N}(I,M,M_\pi,M_N)}_{\text{coefficients de Clebsch-Gordan}} |I_\pi;M_\pi\rangle \otimes |I_N;M_N\rangle$$

Coefficients de Clebsch-Gordan

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

Système pion-nucléon

$1\times 1/2$		3/2, +3/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2	3/2, −3/2
π^+p	+1 +1/2	1					
π^+n	+1 −1/2		1/3	2/3			
π^0p	0 +1/2		2/3	−1/3			
π^0n	0 −1/2				2/3	1/3	
π^-p	−1 +1/2				1/3	−2/3	
π^-n	−1 −1/2						1

- Quadruplet d'isospin total I = 3/2:

$$\left|\frac{3}{2};\ +\frac{3}{2}\right\rangle = |1;+1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle = |\pi^+p\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2};\ +\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1;+1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1;0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^+n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0p\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1;0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1;-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0n\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^-p\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right\rangle = |1;-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle = |\pi^-n\rangle$$

- Doublet d'isospin total I = 1/2:

$$\left|\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1;+1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1;0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0p\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1;0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1;-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^-p\rangle$$

Système pion-nucléon (suite)

- On exprime $|\pi^+p\rangle$, $|\pi^-p\rangle$, $|\pi^0n\rangle$ dans la base d'états propres de l'isospin total

$$|\pi^+p\rangle = \left|\frac{3}{2};+\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^-p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^0n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$1\times 1/2$		3/2, +3/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2	3/2, −3/2
π^+p	+1 +1/2	1					
π^+n	+1 −1/2		1/3	2/3			
π^0p	0 +1/2		2/3	−1/3			
π^0n	0 −1/2				2/3	1/3	
π^-p	−1 +1/2				1/3	−2/3	
π^-n	−1 −1/2						1

- Par la règle d'or de Fermi:

$$\sigma(\pi^+p\to\pi^+p) = \alpha_1\left|\langle\pi^+p|H|\pi^+p\rangle\right|^2$$

$$\sigma(\pi^-p\to\pi^-p) = \alpha_2\left|\langle\pi^-p|H|\pi^-p\rangle\right|^2$$

$$\sigma(\pi^-p\to\pi^0n) = \alpha_3\left|\langle\pi^0n|H|\pi^-p\rangle\right|^2$$

avec $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$
car les 3 réactions font intervenir des particules de mêmes masses et mêmes spins

Conservation de l'isospin:

$$\left\langle\frac{3}{2};M\middle|H\middle|\frac{1}{2};M'\right\rangle = 0$$

L'indépendance de charge permet de poser:

$$\left\langle\frac{3}{2};M\middle|H\middle|\frac{3}{2};M\right\rangle \equiv A_{3/2}$$

$$\left\langle\frac{1}{2};M\middle|H\middle|\frac{1}{2};M\right\rangle \equiv A_{1/2}$$

Interaction pion-nucléon (suite)

- Ainsi: $\sigma\left(\pi^+ p \to \pi^+ p\right) = \alpha\left|A_{3/2}\right|^2$

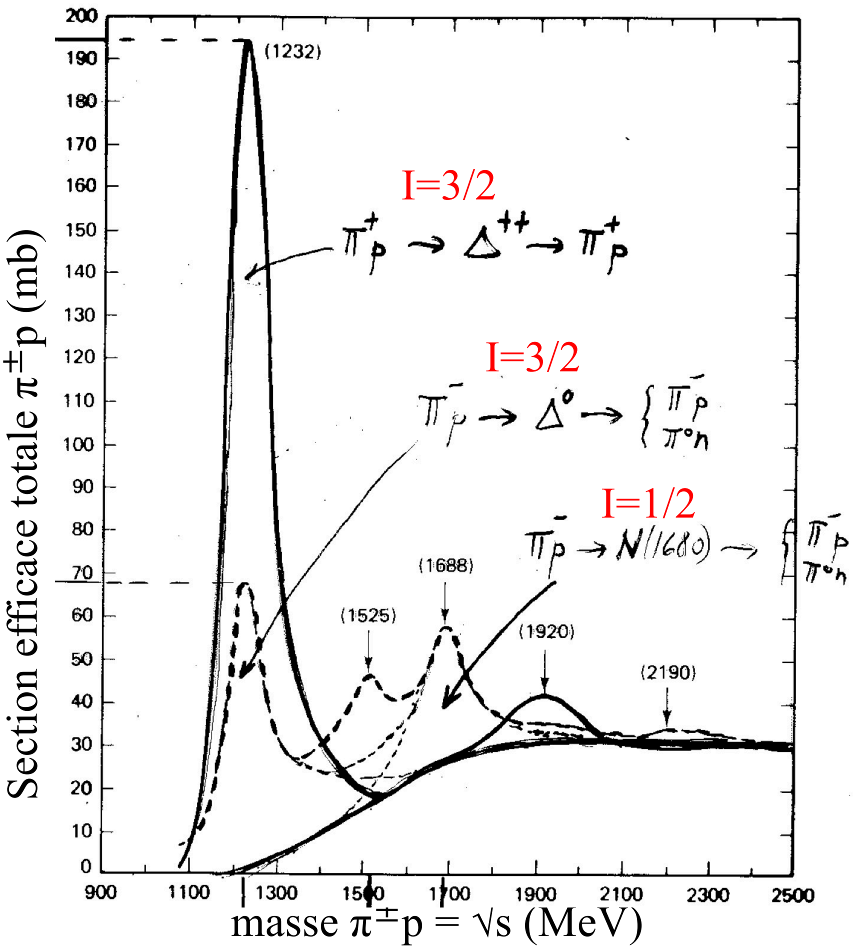
$$\sigma\left(\pi^- p \to \pi^- p\right) = \alpha\left|\frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}\right|^2$$

$$\sigma\left(\pi^- p \to \pi^0 n\right) = \alpha\left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right|^2$$

- On définit:

$$R = \frac{\sigma_{tot}\left(\pi^+ p\right)}{\sigma_{tot}\left(\pi^- p\right)} = \frac{\sigma\left(\pi^+ p \to \pi^+ p\right)}{\sigma\left(\pi^- p \to \pi^- p\right) + \sigma\left(\pi^- p \to \pi^0 n\right)}$$

$$= \frac{\left|A_{3/2}\right|^2}{\left|\frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right|^2} = \begin{cases} 3 & \text{si } \left|A_{3/2}\right| >> \left|A_{1/2}\right| \\ 1 & \text{si } \left|A_{3/2}\right| \approx \left|A_{1/2}\right| \\ 0 & \text{si } \left|A_{3/2}\right| << \left|A_{1/2}\right| \end{cases}$$



Interaction pion-nucléon (fin)

On observe:

R~3 à √s=1232 MeV
⇒ résonance d'isospin 3/2

R~0 à √s=1525, 1688 MeV
⇒ résonance d'isospin 1/2

Nombre (charge) baryonique B

nombre quantique additif

Particules	B
nucléons	+1
anti-nucléons	–1
pions, leptons, γ, Z, W	0

- La **conservation du nombre baryonique** explique pourquoi certaines réactions ne sont jamais observées:

$$p\,p \not\to p\,\bar{p}\,\pi^+\pi^+$$
$$p\,p \not\to p\,p\,n$$
$$n \not\to \pi^+\pi^0\pi^-$$

- Quelques réactions observées (B conservé)

$$p\,p \to p\,p\,\pi^0$$
$$p\,p \to p\,n\,\pi^+$$
$$p\,p \to n\,n\,\pi^+\pi^+\pi^0\pi^0$$
$$p\,p \to p\,p\,p\,\bar{p}$$
$$p\,\bar{p} \to n\,\bar{n}$$
$$n \to p\,e^-\,\bar{\nu}_e$$
$$\pi^- \to \mu^-\,\bar{\nu}_\mu$$
$$\pi^0 \to \gamma\gamma$$

- Quel est le nombre baryonique de la résonance Δ ?

$$\pi\ N \to \ \Delta\ \to \pi\ N$$
$$0 + 1 = \ B(\Delta) = 0 + 1 \quad \Rightarrow B(\Delta) = 1$$

- Charge électrique
  - $Q = I_3 + 1/2$ pour N, Δ, ... avec B=1
  - $Q = I_3$ pour π, ω, ... avec B=0
  - Généralisation: $Q = I_3 + B/2$