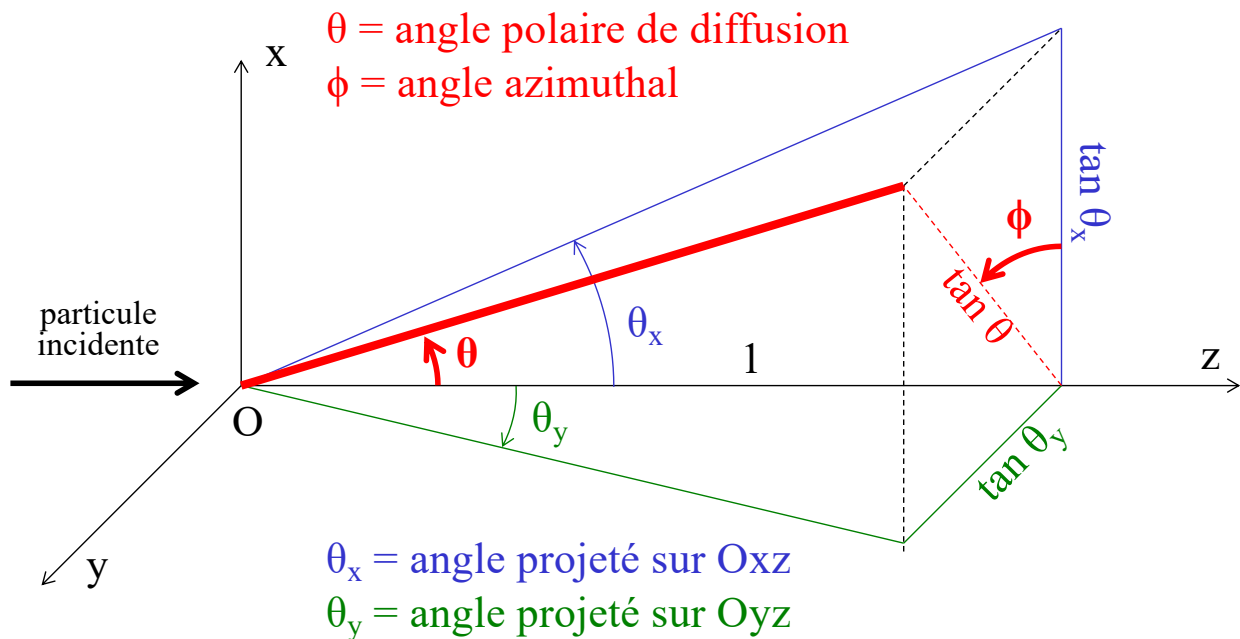


Projections de l'angle de diffusion



$$\begin{aligned} \tan \theta_x &= \tan \theta \cos \phi \\ \tan \theta_y &= \tan \theta \sin \phi \end{aligned} \xrightarrow{\text{petits angles}} \begin{aligned} \theta_x &\cong \theta \cos \phi \\ \theta_y &\cong \theta \sin \phi \end{aligned}$$

OS, 12 mars 2025

49

Théorème central limite

Soient N variables aléatoires X_i indépendantes
 avec une **loi de distribution commune quelconque**
 de **moyenne m** et **écart-type σ**

On définit $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ et $Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$

Alors

- Y est une variable aléatoire de **moyenne mN** et d'**écart-type $\sigma \sqrt{N}$**
- Z est une variable aléatoire de **moyenne m** et d'**écart-type σ/\sqrt{N}**

et quand $N \rightarrow \infty$,

Y et Z tendent vers des variables aléatoires gaussiennes !

En pratique, la gaussienne est souvent
 une bonne approximation dès $N \sim 6$

OS, 12 mars 2025

50

Diffusion coulombienne multiple

- Pour 1 diffusion:

$$\langle \theta_x \rangle = \langle \theta \cos \phi \rangle = \langle \theta \rangle \langle \cos \phi \rangle = 0$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta^2 \cos^2 \phi \rangle = \langle \theta^2 \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle$$

- Pour N diffusions successives:

$$\Theta_x = \sum_{i=1}^N \theta_{x,i}$$

$$\langle \Theta_x \rangle = N \langle \theta_x \rangle = 0$$

$$\sigma_x^2 = \langle \Theta_x^2 \rangle = N \langle \theta_x^2 \rangle = \frac{N}{2} \langle \theta^2 \rangle$$

- Pour un écran d'épaisseur x:

$$\sigma_x = \sigma_y \approx \frac{15 \text{ MeV}}{\text{pc } \beta} |Z| \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

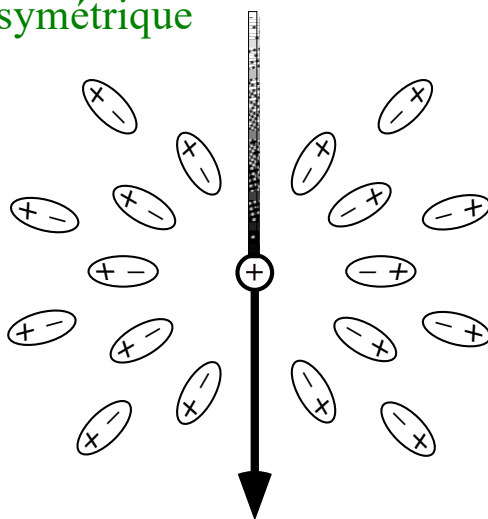
X_0 = longueur de rayonnement

OS, 12 mars 2025

51

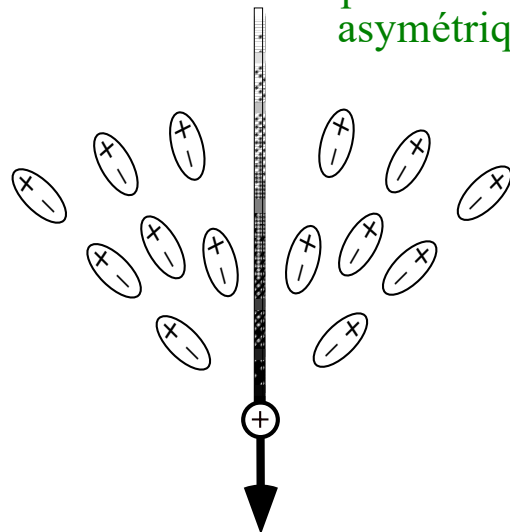
Effet Cherenkov

polarisation
symétrique



(a) $v < c/n$

polarisation
asymétrique



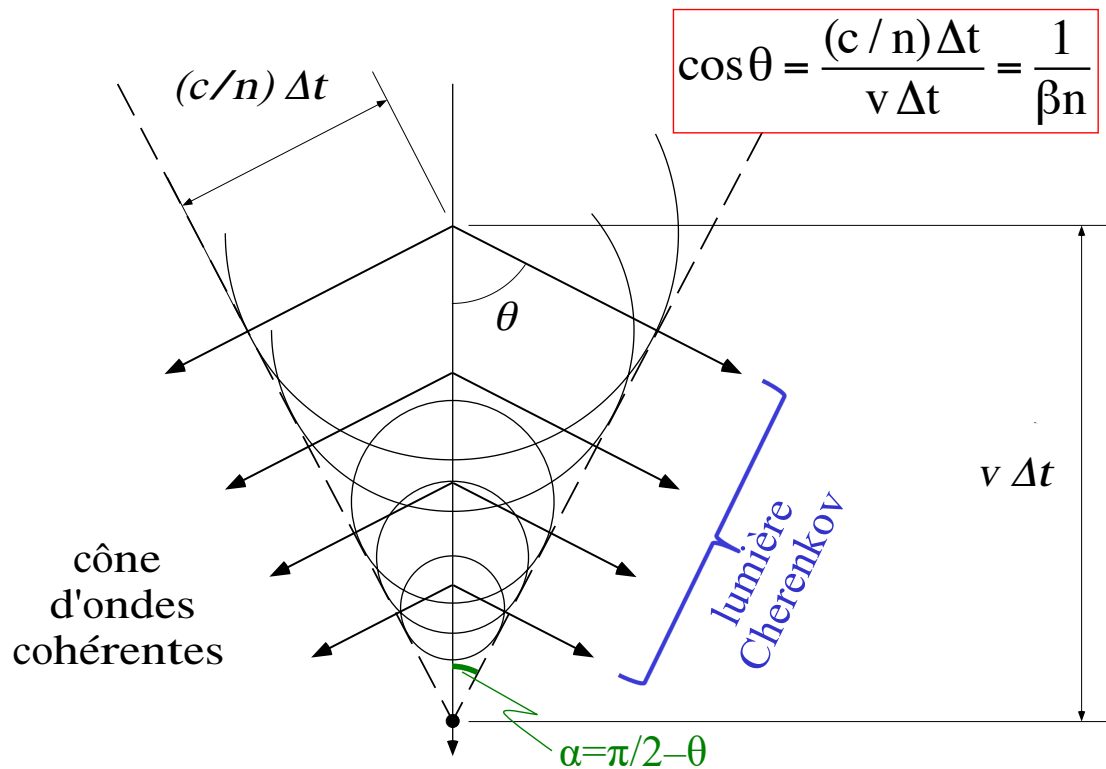
(b) $v > c/n$

c/n = vitesse de la lumière dans le milieu d'indice de réfraction $n (\geq 1)$
= vitesse de propagation du champ é.m. produit par la particule

OS, 12 mars 2025

52

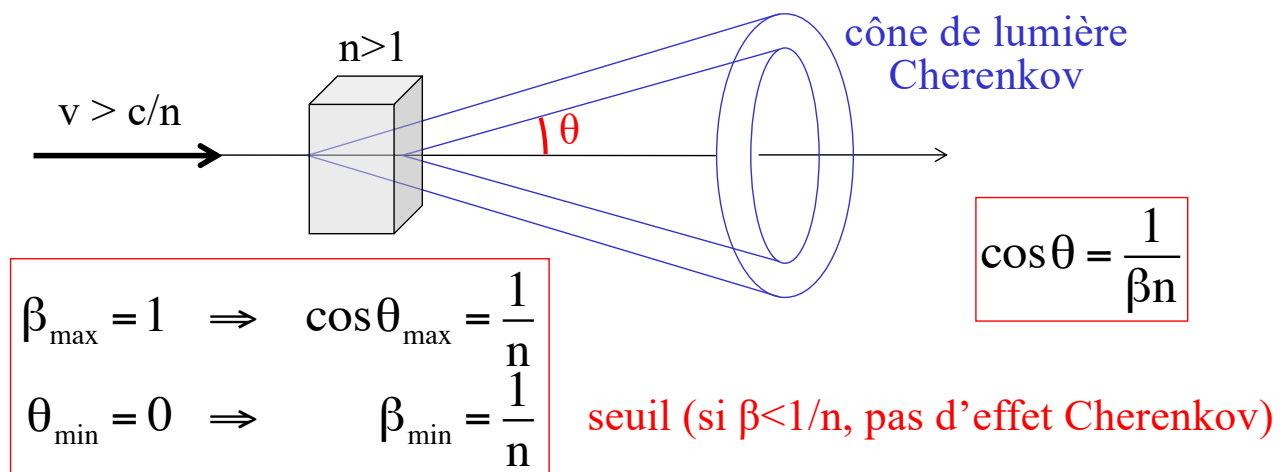
Effet Cherenkov



OS, 12 mars 2025

53

Effet Cherenkov



- Au seuil: $p_{\min} = m\gamma_{\min}\beta_{\min}c = mc \frac{\beta_{\min}}{\sqrt{1-\beta_{\min}^2}} = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}}$
- $\Rightarrow n = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{p_{\min}c}\right)^2 + 1}$

- Exemple: pions chargés de 15 GeV/c $\Rightarrow n=1.0000436$ (gaz)

OS, 12 mars 2025

54

Interactions des photons dans la matière

(phénomènes é.m. uniquement)

- Absorption atomique**

domine à petit E_γ



effet photoélectrique

- Diffusion**



effet Compton

- Production de paires (“conversion”)**

domine à grand E_γ



matérialisation en e^+e^-

- Absorption nucléaire**



E_γ

OS, 12 mars 2025

55

Section efficace

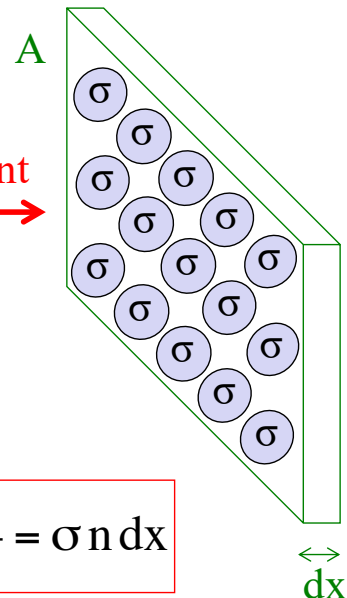
cible d'aire A et d'épaisseur dx

N “centres” d'aire σ

n = nombre de centres par unité de volume

$n dx$ = nombre de centres par unité de surface

γ incident



$$\text{Probabilité d'interaction} = \frac{\sigma N}{A} = \frac{\sigma n A dx}{A} = \sigma n dx$$

Section efficace totale $\sigma =$ probabilité d'interaction sur une cible contenant un centre par unité de surface

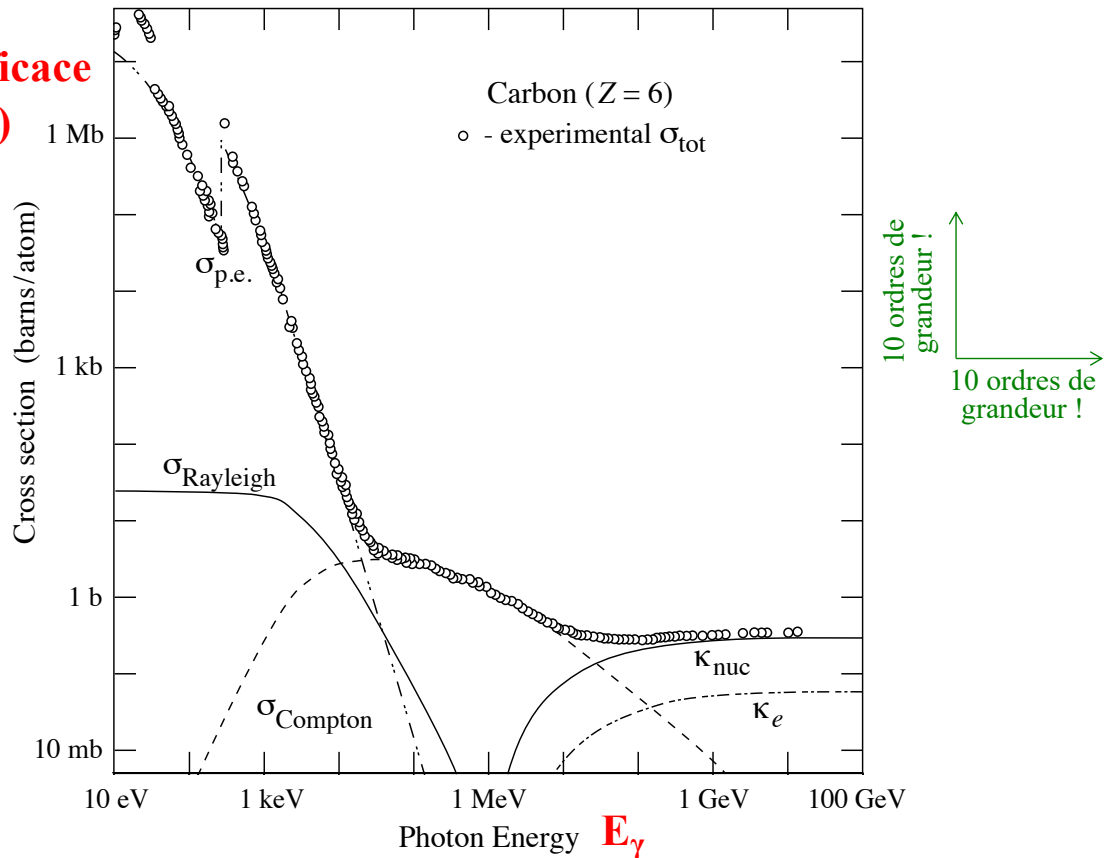
Unité: barn = $b = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$

OS, 12 mars 2025

56

Interactions des photons dans la matière

Section efficace
 $\sigma(\gamma+C)$

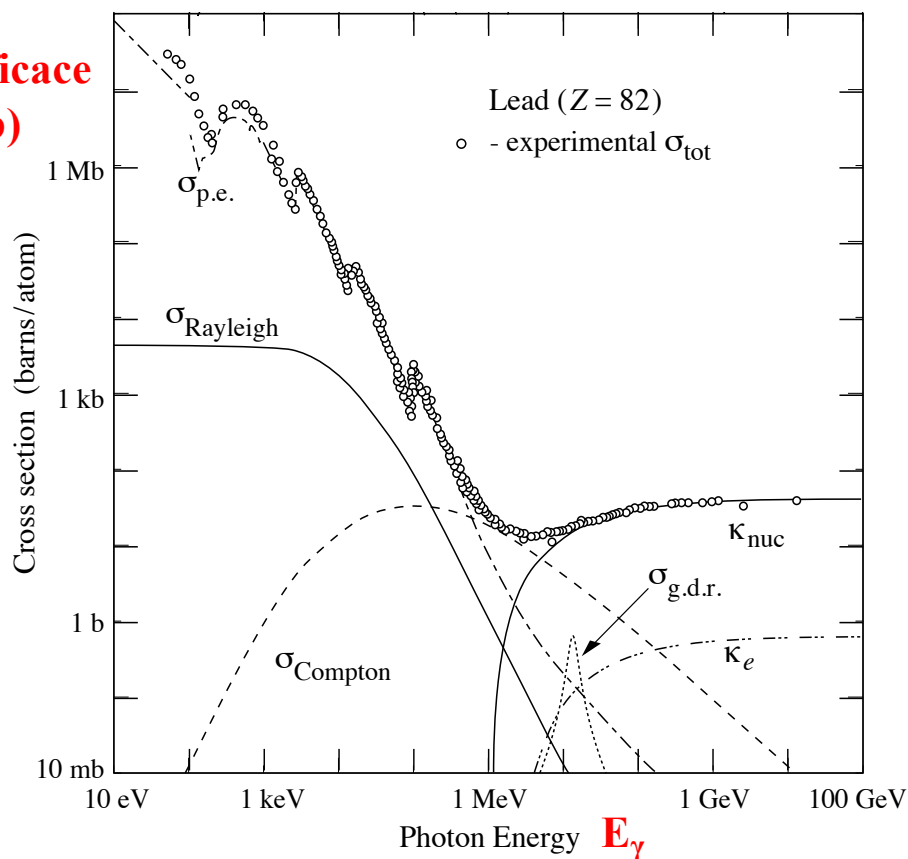


OS, 12 mars 2025

57

Interactions des photons dans la matière

Section efficace
 $\sigma(\gamma+\text{Pb})$



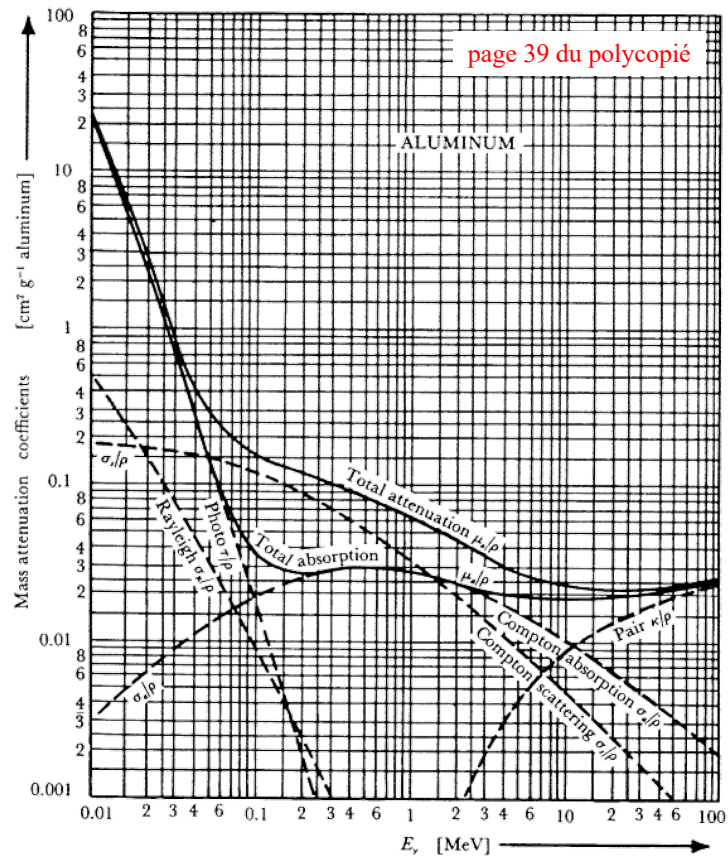
OS, 12 mars 2025

58

Coefficient d'atténuation massique μ

$$\mu = \frac{n\sigma}{\rho} = \frac{N_A}{A} \sigma$$

- n = densité atomique [cm^{-3}]
- ρ = masse volumique [g/cm^3]
- N_A = nombre d'Avogadro [mol^{-1}]
- A = masse atomique [g/mol]

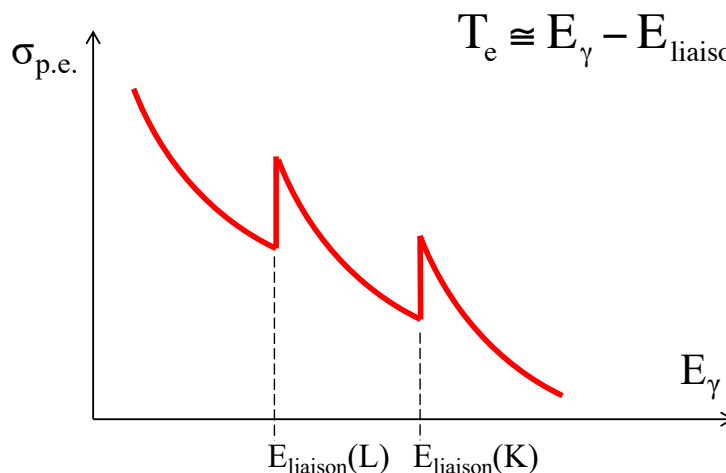


OS, 12 mars 2025

59

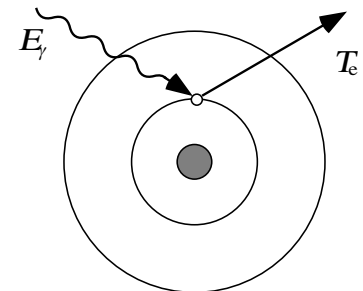
Effet photoélectrique

- Un électron lié à l'atome absorbe le photon incident et est libéré avec une énergie cinétique T_e :



$$T_e \cong E_\gamma - E_{\text{liaison}} \Rightarrow E_\gamma \geq E_{\text{liaison}}$$

effet de seuil



- Calcul théorique

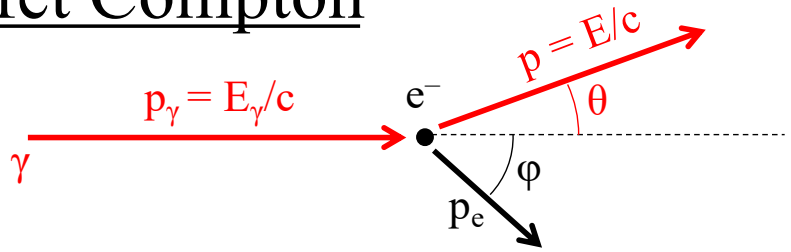
$$\sigma_{\text{p.e.}}(\text{K}) = \frac{32\pi}{3} \sqrt{2} Z^5 \alpha^4 \left(\frac{mc^2}{E_\gamma} \right)^{7/2} \quad \text{où } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

OS, 12 mars 2025

60

Effet Compton

- Collision d'un photon d'énergie E_γ sur un électron au repos



- Conservation quantité de mouvement et énergie:
 - 3 équations pour 4 inconnues (E , p_e , θ , ϕ)
 - élimination de p_e et ϕ pour obtenir une relation entre E et θ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_\gamma}{c} = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \\ 0 = \frac{E}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi \\ E_\gamma + mc^2 = E + \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2} \end{array} \right.$$

$$E = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

$$T_e = E_e - mc^2 = E_\gamma - E = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

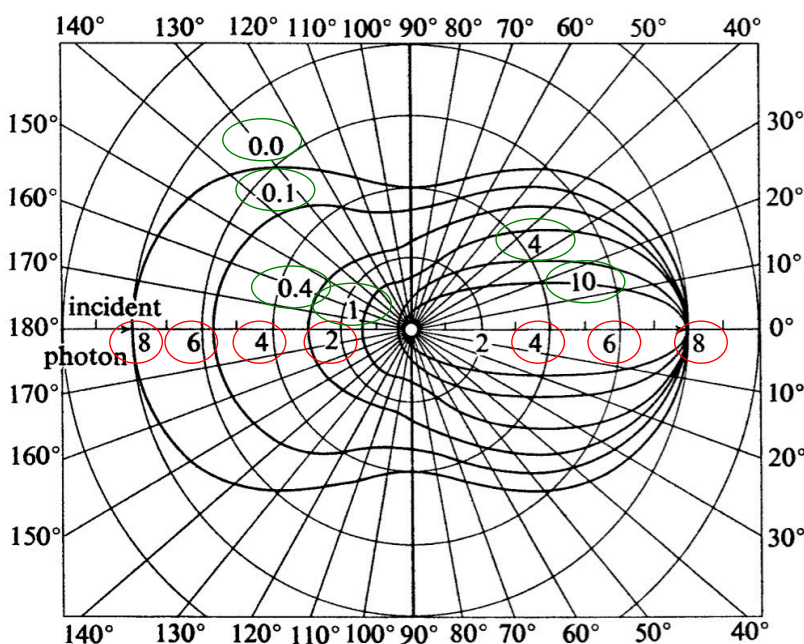
formule de Compton

T_e maximum quand $\theta = \pi$

Effet Compton

- Calcul en électrodynamique quantique (QED)

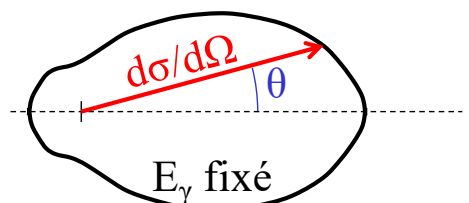
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_\gamma} \right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{E} + \frac{E}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right)$$



$$\frac{E}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

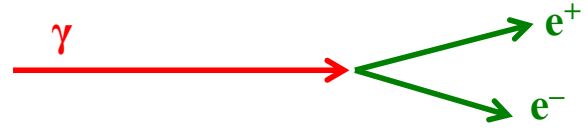
E_γ en MeV

$d\sigma/d\Omega$ en fm²

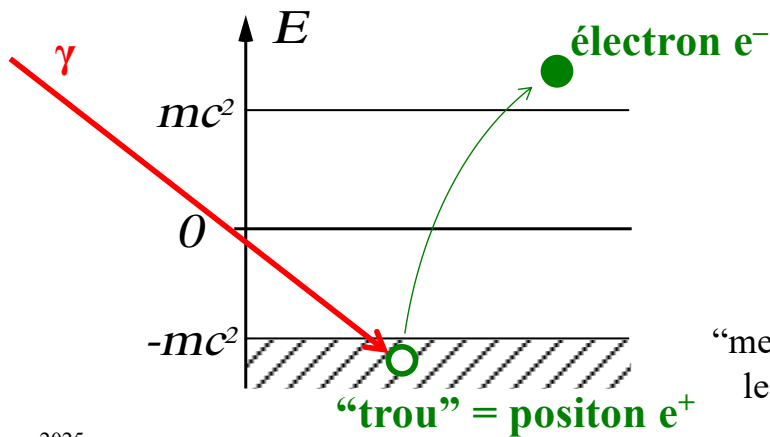


Création de paire

- Possible seulement dans le champ d'un noyau (ou électron)
et si $E_\gamma > 2mc^2$



- Equation de Dirac (équ. du mvt de l' e^-):
 - solutions d'énergies positives $> +mc^2 \rightarrow$ particule
 - solutions d'énergies négatives $< -mc^2 \rightarrow$ antiparticule



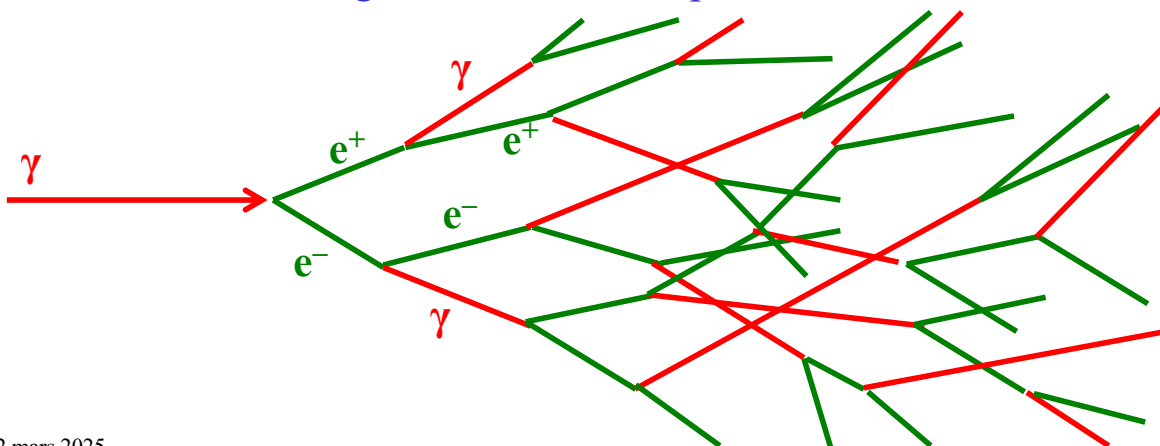
"mer" d'états occupés en respectant
le principe d'exclusion de Pauli

Création de paire


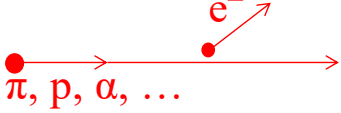
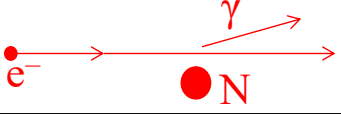
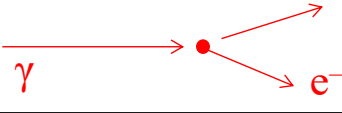
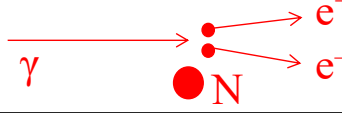
- Calcul en électrodynamique quantique (QED):

$$\sigma_{\text{paire}} \approx Z^2 \alpha^3 \left(\frac{\hbar c}{mc^2} \right)^2 \left[\frac{28}{9} \ln \left(\frac{2E_\gamma}{mc^2} \right) - \frac{218}{27} \right]$$

- Gerbe électromagnétique = succession de processus de Bremsstrahlung et de création de paire dans la matière



Quel point commun ?

	Processus	Section efficace
	Diffusion de Rutherford	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$
	Perte d'énergie par collisions	$\sigma \propto -\frac{dT}{dx} \Big _{\text{coll}} \cong \frac{Z^2 e^4 n z}{4\pi\epsilon_0^2 m c^2 \beta^2} \left[\ln \left(\frac{2mc^2}{I} \cdot \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right) - \beta^2 \right]$
	Rayonnement de freinage	$\sigma \propto -\frac{dT}{dx} \Big _{\text{rad}} \cong T \frac{4e^6 n z (z+1.3)}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar c (mc^2)^2} \left[\ln \left(\frac{183}{z^{1/3}} \right) + \frac{1}{8} \right]$
	Diffusion Compton	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_\gamma} \right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{E} + \frac{E}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right)$
	Création de paire	$\sigma_{\text{paire}} \approx Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^3 \left(\frac{\hbar c}{m c^2} \right)^2 \left[\frac{28}{9} \ln \left(\frac{2E_\gamma}{m c^2} \right) - \frac{218}{27} \right]$

Tous des processus électromagnétiques, avec $\sigma \sim (e^2)^n \sim \alpha^n$, où $n=2$ ou 3