Série 1

1 Invariant relativiste

Soient deux événements séparés par un intervalle de temps Δt et un intervalle d'espace $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Démontrer, à l'aide de la transformation de Lorentz, que l'intervalle d'espace-temps, défini par $(\Delta s)^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (\overrightarrow{\Delta x})^2$, est un invariant relativiste, c'est-à-dire qu'il prend la même valeur dans tous les référentiels d'inertie.

2 Transformation des vitesses

Soit une particule de vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ constante dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$. Quelles sont les composantes de sa vitesse $\vec{v}\,' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}'$ en saut de vitesse standard de vitesse $V = \beta c$ par rapport à $\mathcal{R}$?

3 Quantité de mouvement relativiste

Démontrer que la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{v} = \vec{\beta}c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, est donnée par l'expression

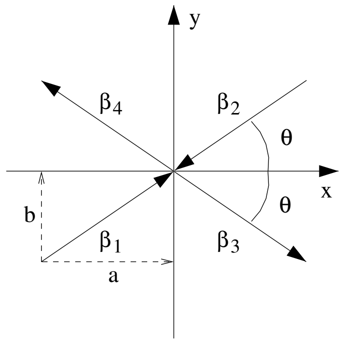
$$\vec{p} = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{\beta}$$

à partir des hypothèses suivantes:

- la quantité de mouvement est colinéaire à la vitesse, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f(m,\beta)$ telle que $\vec{p} = f(m,\beta)\vec{\beta}$;
- la norme de la quantité de mouvement $|\vec{p}|$ et l'énergie cinétique sont des fonctions monotones croissantes de β;
- dans la limite non-relativiste, c'est-à-dire si $\beta \ll 1$, on doit retrouver l'expression $\vec{p} = m\vec{v}$;
- la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé est une loi physique (c'est-à-dire qu'elle est valable dans tous les référentiels d'inertie).

<u>Indications:</u>
Pour résoudre le problème, on appliquera ces hypothèses à la situation suivante. Deux particules de même masse m se dirigent l'une vers l'autre avec des vitesses $\vec{\beta}_1 c$ et $\vec{\beta}_2 c$. Elles interagissent par une force à portée limitée. Après la diffusion, qui est supposée élastique, leurs vitesses sont devenues $\vec{\beta}_3 c$ et $\vec{\beta}_4 c$ respectivement.

a) Montrer que, dans le référentiel $\mathcal{R}$ où la quantité de mouvement totale est nulle (appelé le référentiel du centre de masse), on a $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ et que la situation peut être décrite par la figure ci-dessous, où les seuls paramètres sont les composantes a et b du vecteur $\vec{\beta}_1$ dans le repère Oxy avec l'axe x défini dans la direction de $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_3$ et l'axe y défini dans la direction de $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_4$ (sans connaître l'expression de l'énergie cinétique, on fera l'hypothèse très générale que l'énergie cinétique est une fonction de la masse et de la norme de la quantité de mouvement).



b) Définir un référentiel $\mathcal{R}'$ ($\mathcal{R}''$) en saut de vitesse standard selon x par rapport à $\mathcal{R}$, tel que $\vec{\beta}_1'$ ($-\vec{\beta}_2''$) soit dans la direction de l'axe y' (y''). Exprimer les composantes de $\vec{\beta}_i'$ et $\vec{\beta}_i''$ ($i = 1, \ldots 4$) en fonction de a et b, puis en fonction de $d \equiv \beta_{1x}''$, $e \equiv \beta_{1y}''$ et $g \equiv \beta_{4y}''$

c) Trouver la relation entre d, e et g. Pour cela, on pourra par exemple considérer le saut de vitesse de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}''$, et exprimer les vitesses dans $\mathcal{R}''$ en fonction des vitesses dans $\mathcal{R}'$.

d) Poser la conservation de la quantité de mouvement totale dans $\mathcal{R}''$ et trouver une condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

e) Faire tendre b vers zéro puis utiliser la limite non-relativiste pour trouver l'expression de la fonction f.