

# Physique Numérique – Semaine 6

## Rappel des concepts introduits en semaine 5

- ☐ Schéma à pas de temps adaptatif
- ☐ Tests RK4 sur la gravitation, problème à un corps – comète de Halley

## Plan de la semaine 6

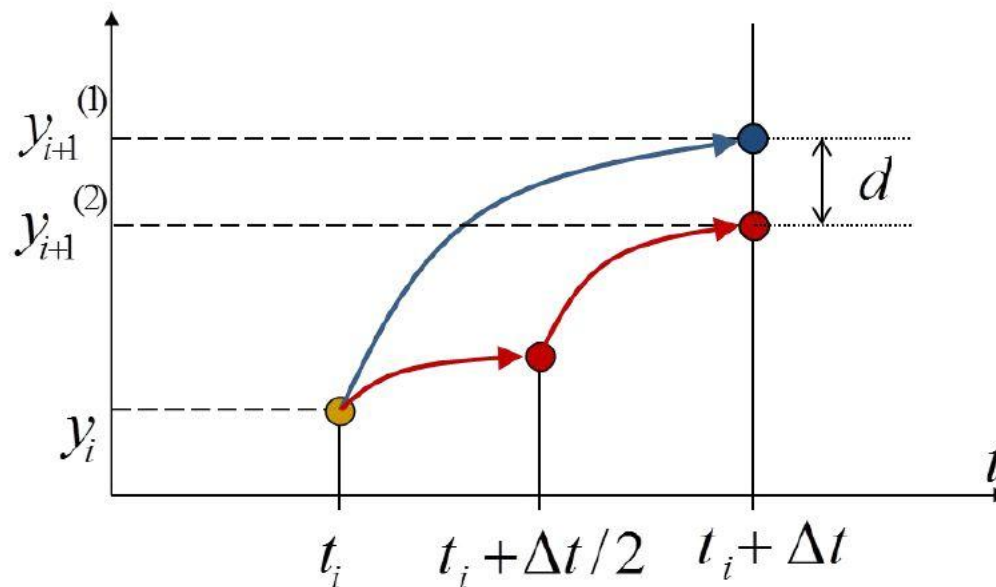
- ☐ Feedback évaluation du cours
- ☐ Exercice 3 (suite et fin)
- ☐ Problème à 3 corps «réduit»
- ☐ Points de Lagrange
- ☐ Quelques autres exemples
  
- ☐ **Chapitre 3. Problème à valeurs aux bords.**
- ☐ Section 3.3. Forme variationnelle. Equation de Poisson. Eléments finis.

# Documentation

- Lecture pour la Semaine #6: Notes de cours
  - **Chapitre 2, Section 2.10.3**
  - **Chapitre 3, Sections 3.3.1, 3.3.2**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

# Schéma à pas de temps adaptatif



Chacune des flèches symbolise un pas complet d'un algorithme de base: par exemple les 4 étapes d'un schema Runge-Kutta du 4e ordre.

On veut choisir  $\Delta t$  de telle sorte que  $d$  soit inférieur à une valeur donnée  $\varepsilon$

$$d < \varepsilon$$

$\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre de **contrôle** de l'algorithme, et n'est PAS la précision obtenue sur  $y$  à la fin de la simulation. Cette dernière doit être obtenue par une étude de convergence:  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

# Algorithme adaptatif

Si  $d < \varepsilon$ , passer au pas suivant avec un pas proposé rallongé:

$$\Delta t_{\text{new}} = \Delta t \left( \frac{\varepsilon}{d} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

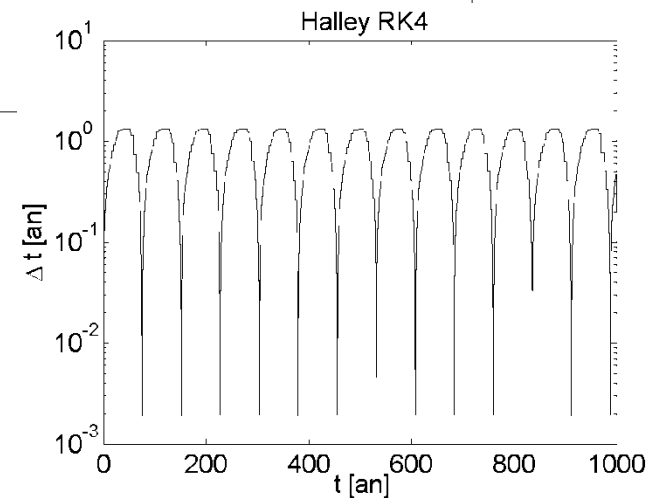
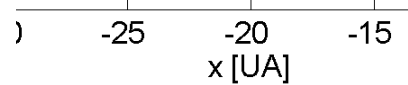
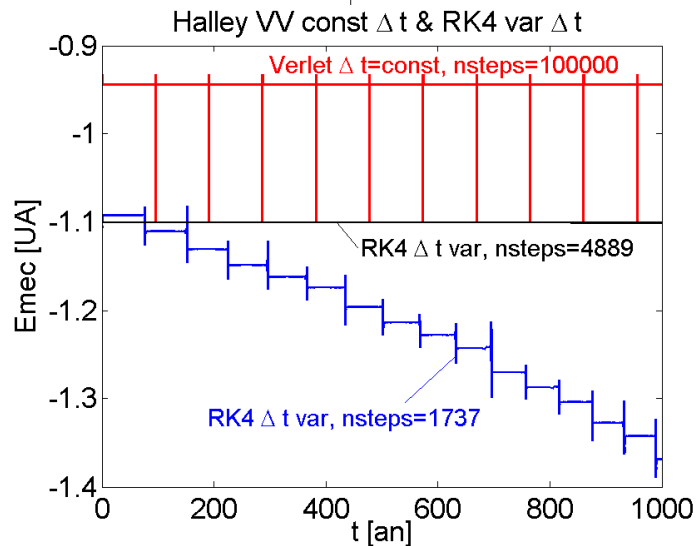
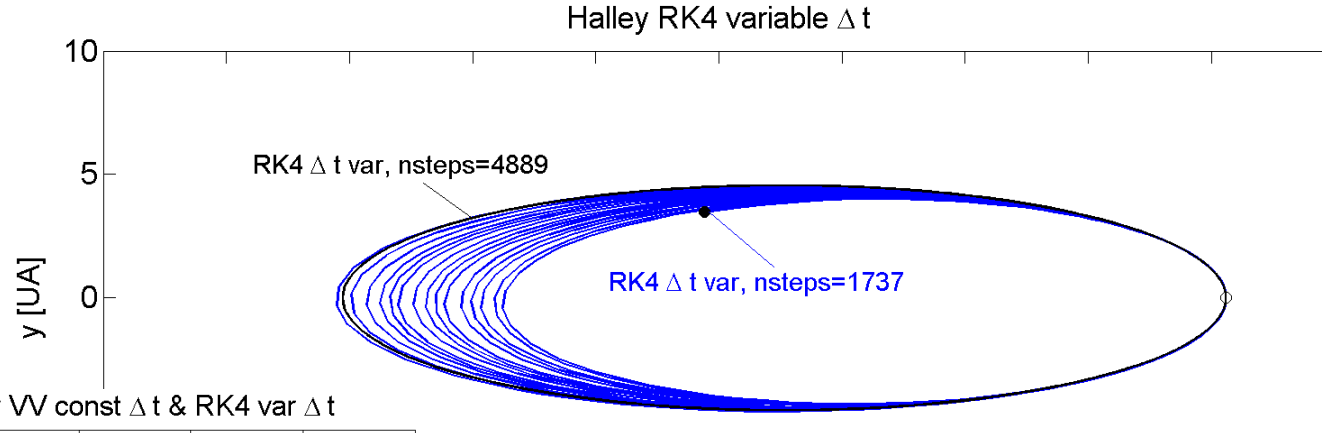
Si  $d > \varepsilon$ :

Tant que  $d > \varepsilon$ , raccourcir le pas et le refaire:

$$\Delta t_{\text{refaire}} = f \Delta t \left( \frac{\varepsilon}{d} \right)^{\frac{1}{n+1}} .$$

avec  $f < 1$  pour éviter une boucle infinie

# Halley, Runge-Kutta 4e ordre, $\Delta t$ variable

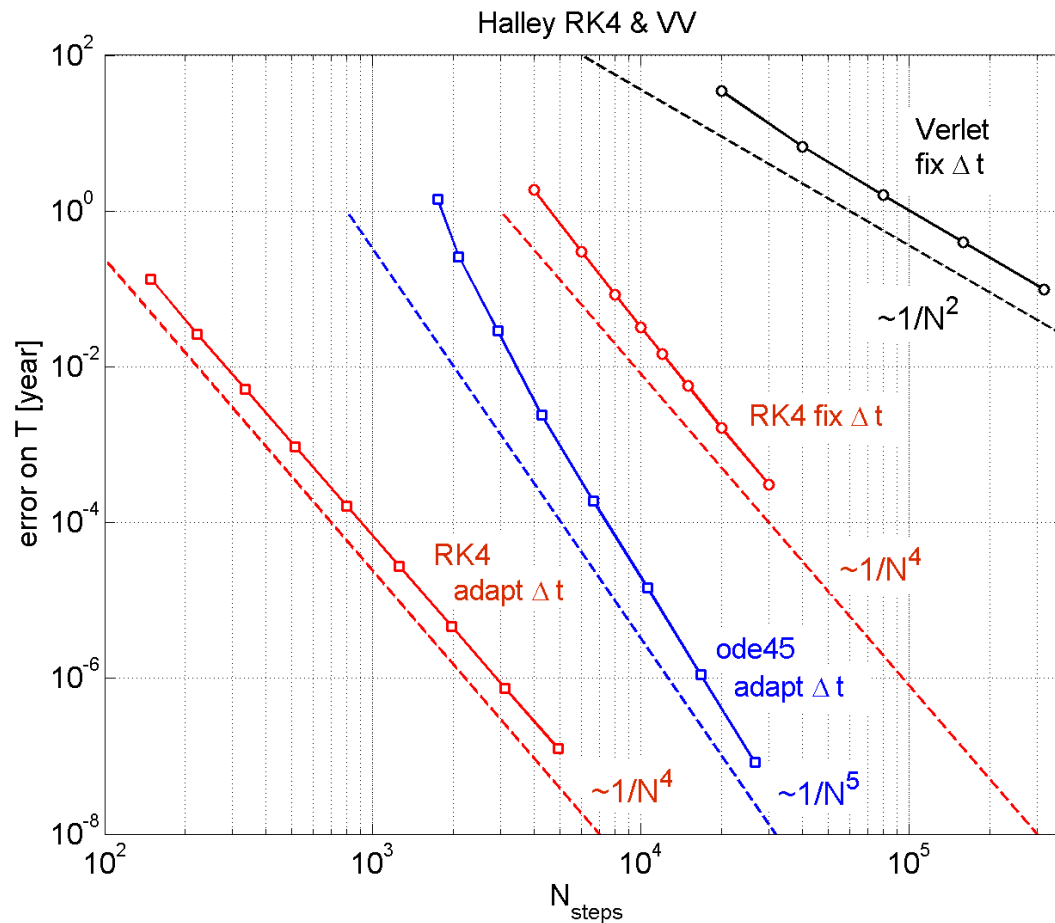


Runge-Kutta a une tendance à long terme de diminuer  $E_{\text{mec}}$

Le pas  $\Delta t$  variable permet une très grande efficacité

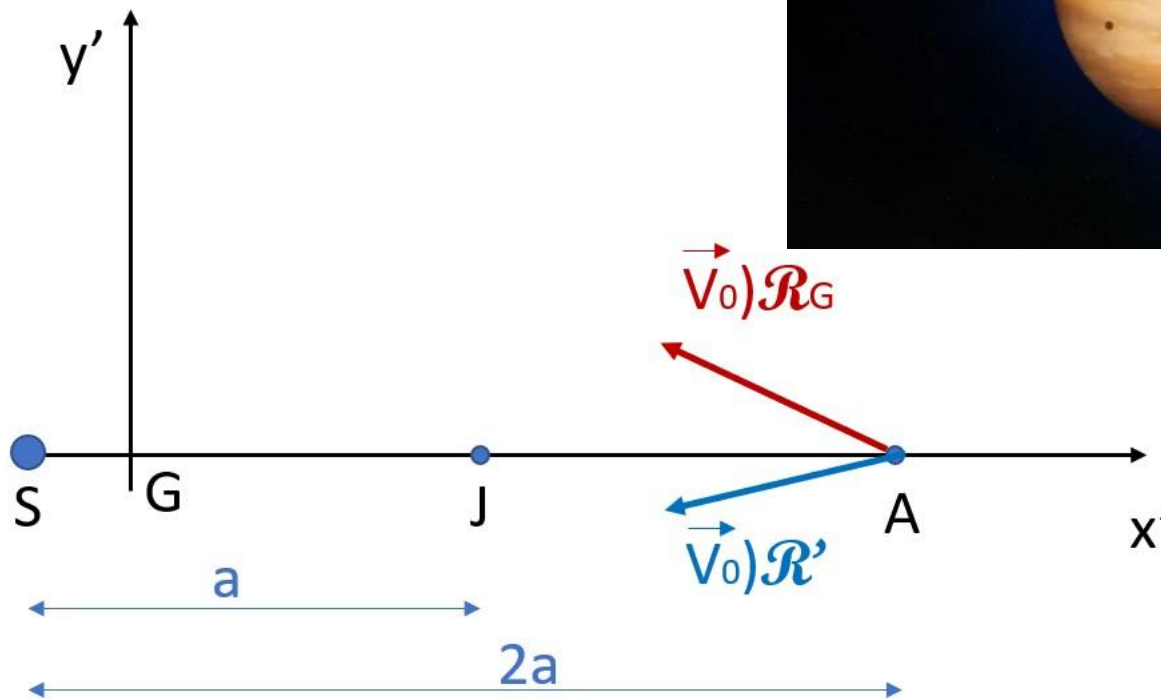
Convergence très rapide

# Halley, Verlet, Runge-Kutta 4, $\Delta t$ fixe ou variable, convergence de la période



Pour 5000 pas de temps, on est 10 millions de fois plus précis avec le schéma adaptatif qu'avec  $\Delta t$  fixe!

# Exercice 3. Astéroïde du siècle. Runge-Kutta 4. Pas de temps adaptatif.

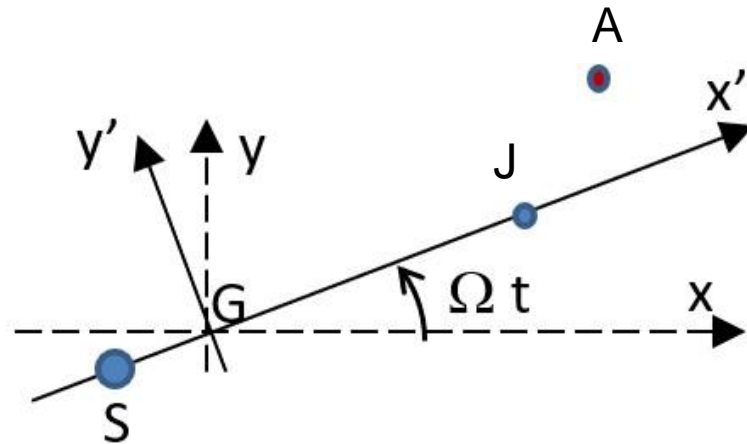


## Ex.3. Deux problèmes physiques

### (1) Problème à 1 corps.

Orbite de l'astéroïde dans le référentiel du centre de masse (inertiel, héliocentrique)

On **ignore les effets de Jupiter** et autres planètes



### (2) Problème à 3 corps «réduit»: $m_A \ll m_S, m_J$

Mouvement  $\{S, J\}$  découplé du mouvement de A.

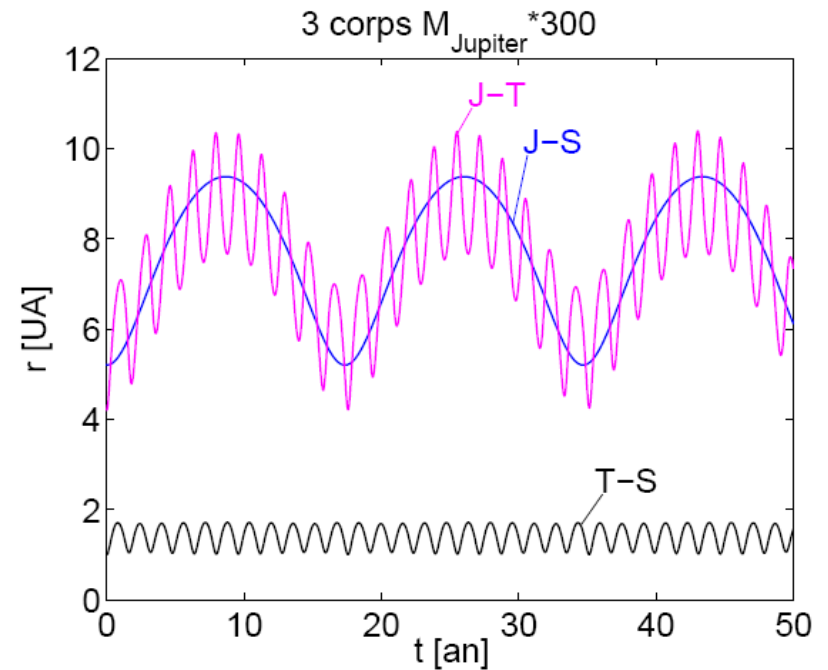
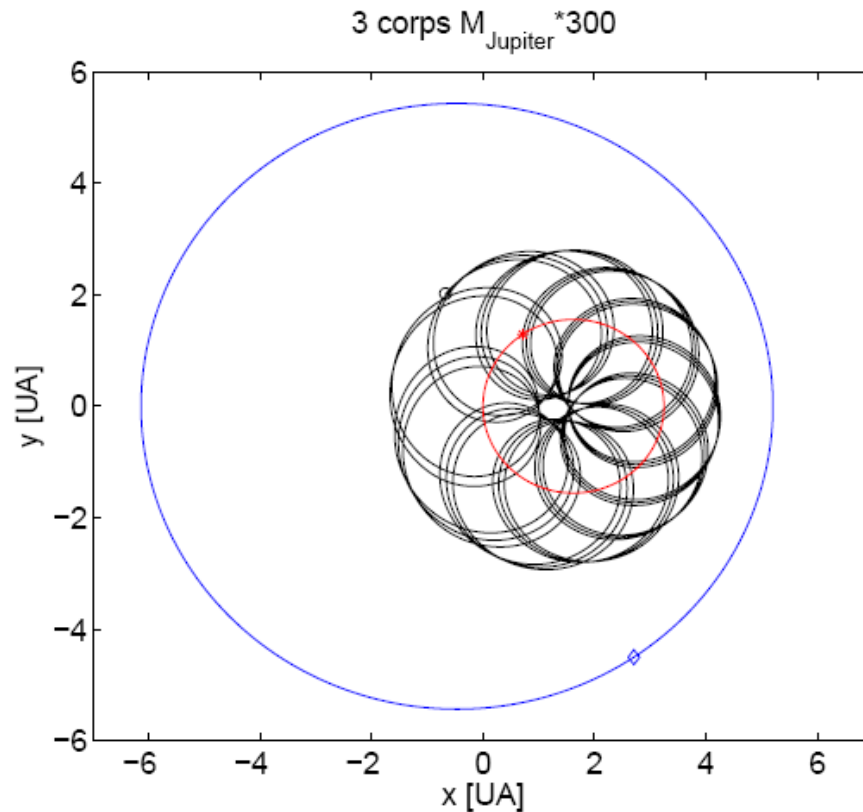
- 1) Mouvement de  $\{S, J\}$  dans référentiel du centre de masse. **(2 corps)** Idem Ex.1.
- 2) **Mouvement de A dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  tournant avec  $\{S, J\}$**  (i.e. dans lequel S et J sont fixes.)



### 3 corps: soleil, « Jupiter », terre

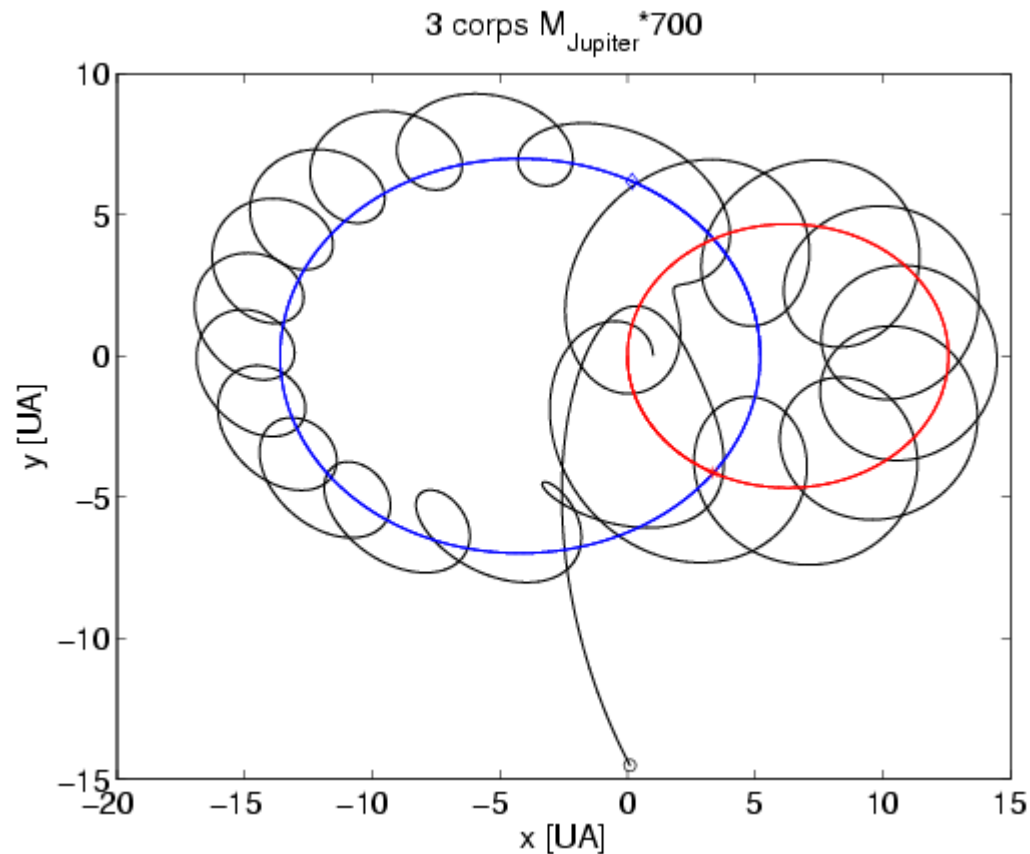
- Mvmt de la terre dans le système (soleil, « jupiter »), où *on a multiplié la masse réelle de Jupiter par un facteur arbitraire  $f$ .*
- Cf Notes de Cours, sections 2.5.1 et 2.5.2
- Simulations avec les schémas de Verlet et de Runge-Kutta 4e ordre

# Jupiter\*300



## ■ Mouvement quasi-périodique

# Jupiter\*700



100 ans

$\Delta t = 0.001$  an

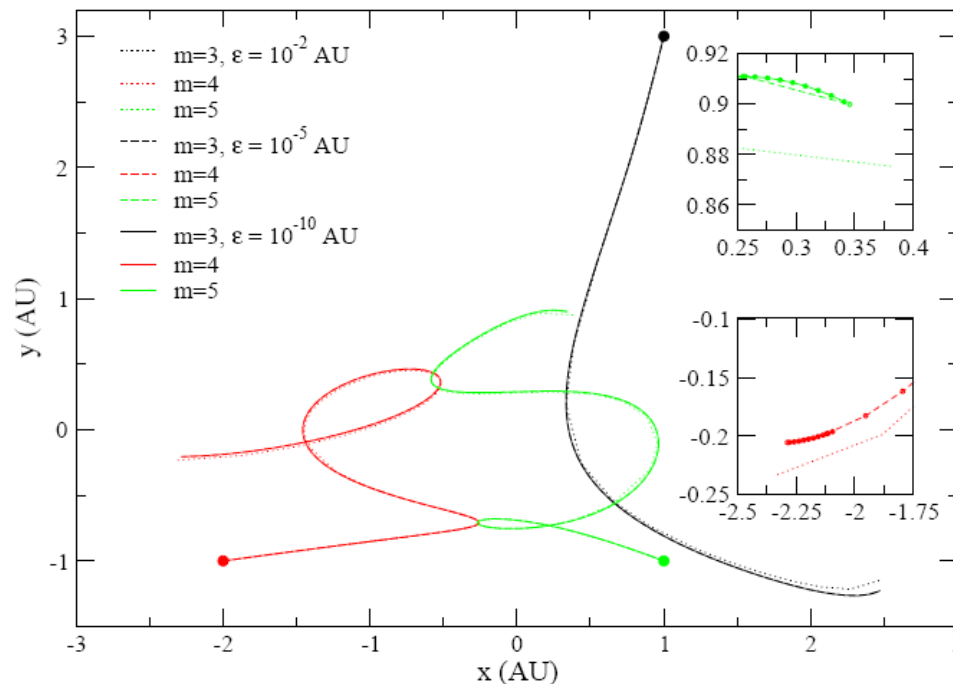
Verlet

- La terre se fait capturer par « Jupiter », puis est « éjectée »...
- Chaos: sensibilité aux conditions initiales, difficulté de convergence

# Problème à 3 corps: exemples

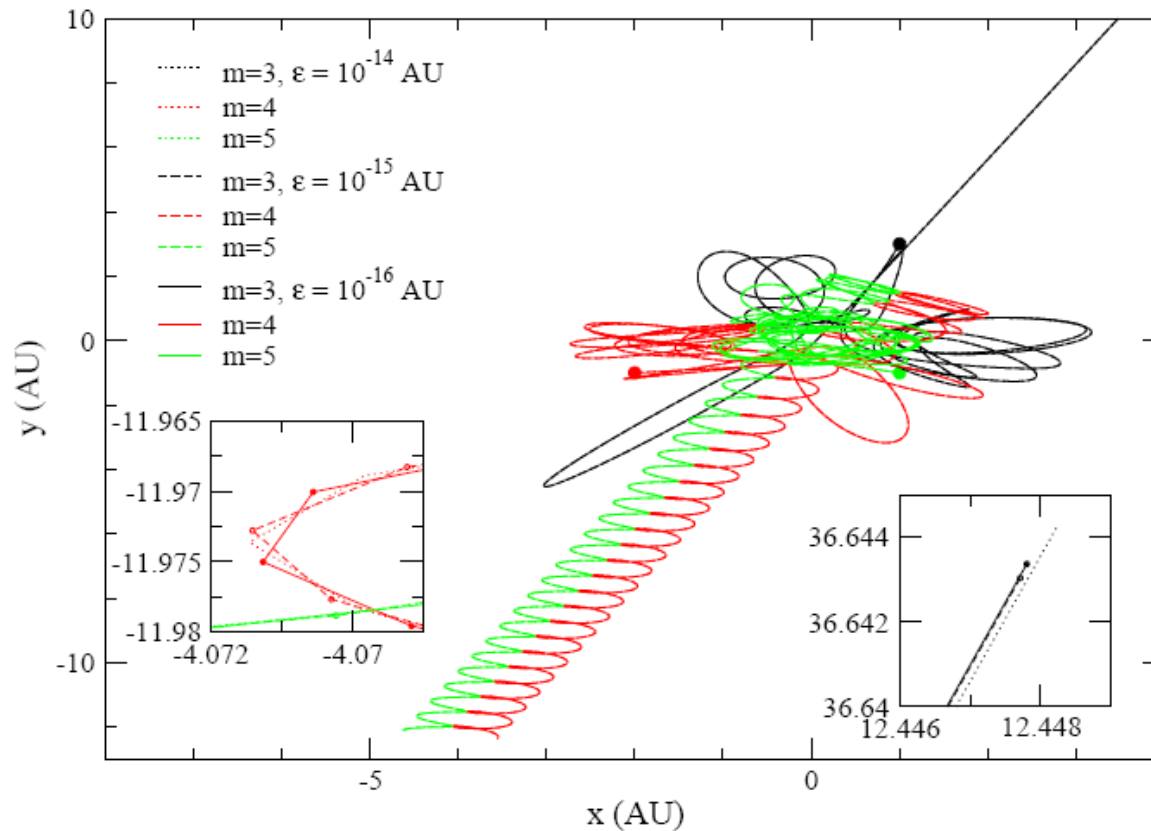
## Pythagore joue au billard cosmique

- 3 corps de masses 3,4,5, placées initialement aux sommets d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3,4,5 (unités astronomiques). Les vitesses initiales sont nulles.
- Runge-Kutta ordre 4, pas variable adaptatif.



$t_{\text{fin}} = 5 \text{ ans}$

# 80 ans



- Quasi-collisions: problème difficile, même avec  $\Delta t$  adaptatif
  - Format « long double »
- Formation d'une étoile double et éjection de la troisième

# Problème à trois corps

- Il semble difficile de trouver des orbites stables pour 3 corps de masses comparables placées à des distances comparables.(\*)
- Lorsque un des 3 corps est de masse négligeable par rapport aux 2 autres, on parle de « **problème à 3 corps réduit** ».
  - Exemples: {Soleil, Jupiter, Astéroïde}; {Terre, Lune, Apollo}; {Saturne, Titan, Cassini}; {Soleil, Terre, Webb}
  - On résout d'abord le problème à 2 corps (lourds), en ignorant le 3<sup>e</sup> corps (léger).
  - Ensuite, on étudie le mouvement du 3<sup>e</sup> corps (léger), en tenant compte du mouvement donné des 2 corps lourds.

(\*) Il existe une solution stable avec des trajectoires en forme de 8, voir par exemple <https://www.youtube.com/watch?v=jKvnn1r-9lw>, découverte en ... 1993 (!)

# Problème réduit, « planète X » et autres points de Lagrange

- Mvmt d'un 3e corps céleste dans le système (soleil, planète)
  - $m_3 \ll m_1, m_2$
  - approximation d'orbites circulaires pour le soleil et pour la planète.
- On se place dans le référentiel dans lequel le soleil et la planète sont fixes. Référentiel en **rotation**.
- On cherche s'il existe des points d'équilibre pour le 3e corps dans ce référentiel
  - Effet de la **force d'inertie** (« centrifuge »). Calculs analytiques présentés au cours (en résumé).
- On examine la stabilité des points d'équilibre
  - Effet de **Coriolis**. Simulations numériques présentées au cours

# Eqs du mvmt 3e corps dans $\mathcal{R}'$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} \frac{d^3 \beta (x' + \alpha d)}{r_{13}^3} + \frac{d^3 \alpha (x' - \beta d)}{r_{23}^3} - x' \\ \frac{d^3 \beta}{r_{13}^3} y' + \frac{d^3 \alpha}{r_{23}^3} y' - y' \end{pmatrix} + 2\Omega \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = r'_{12} = \text{const}$$

$$\Omega = \Omega_{R')R} = \text{const} = \dots$$

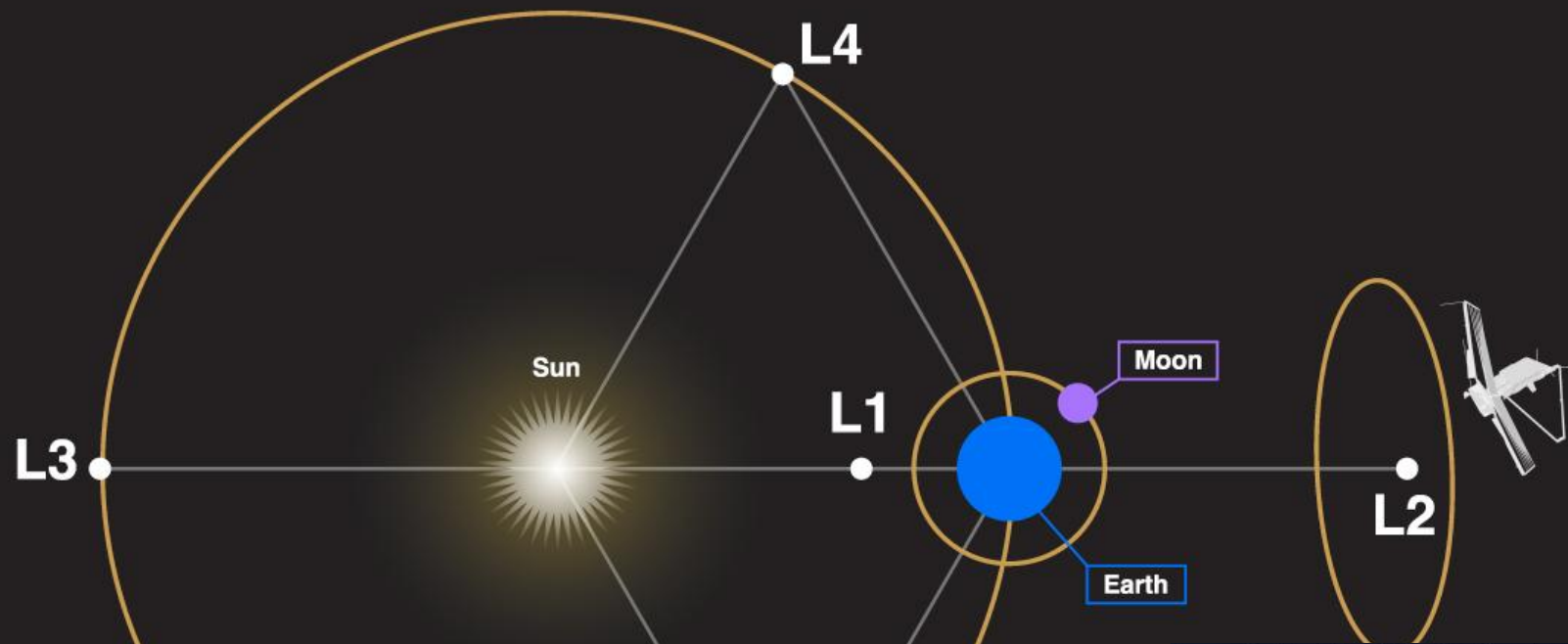




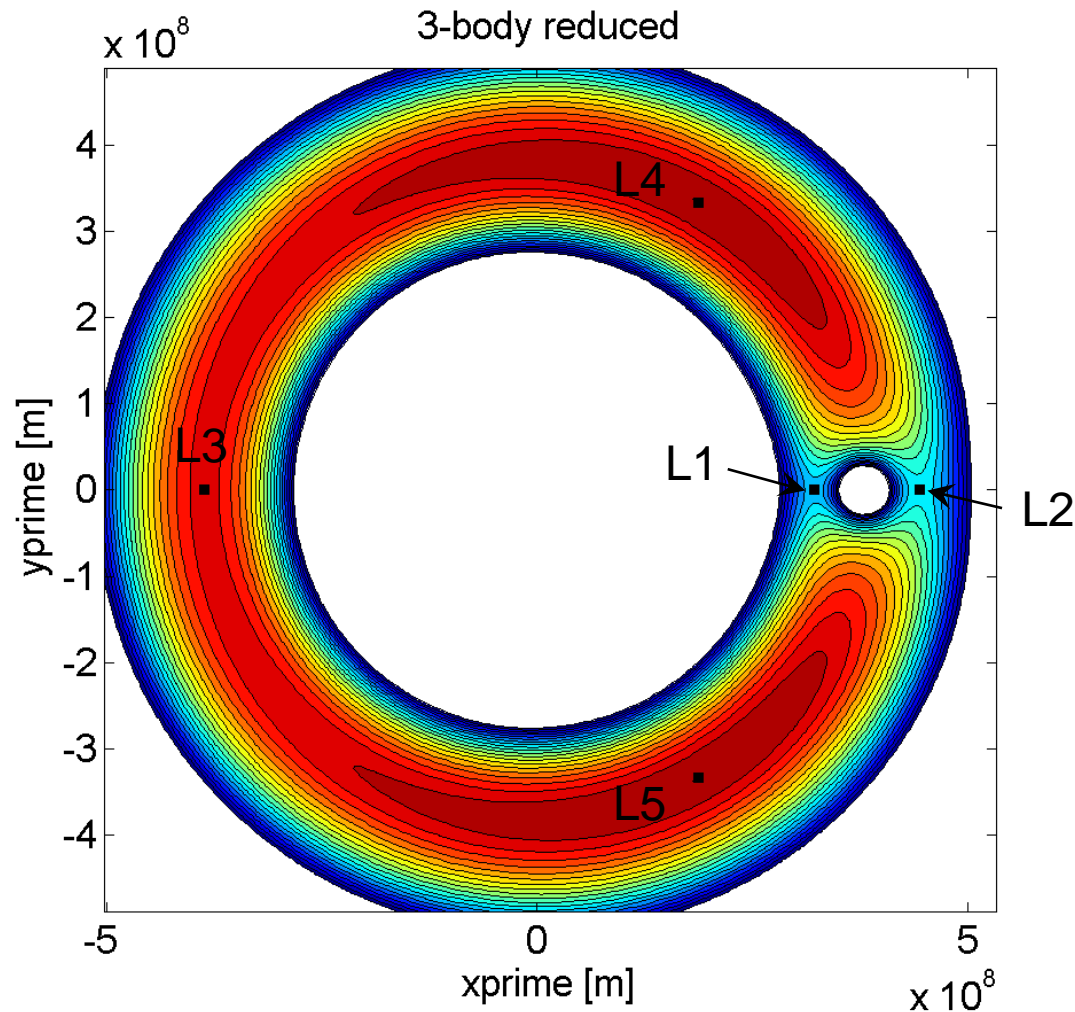
N.B.: Soleil-Jupiter: astéroïdes Troyens en L4 et L5

# Exercice 3 (2024). Télescope spatial James Webb

Points de Lagrange. Runge-Kutta 4. Pas de temps adaptatif.



# Stabilité des points de Lagrange

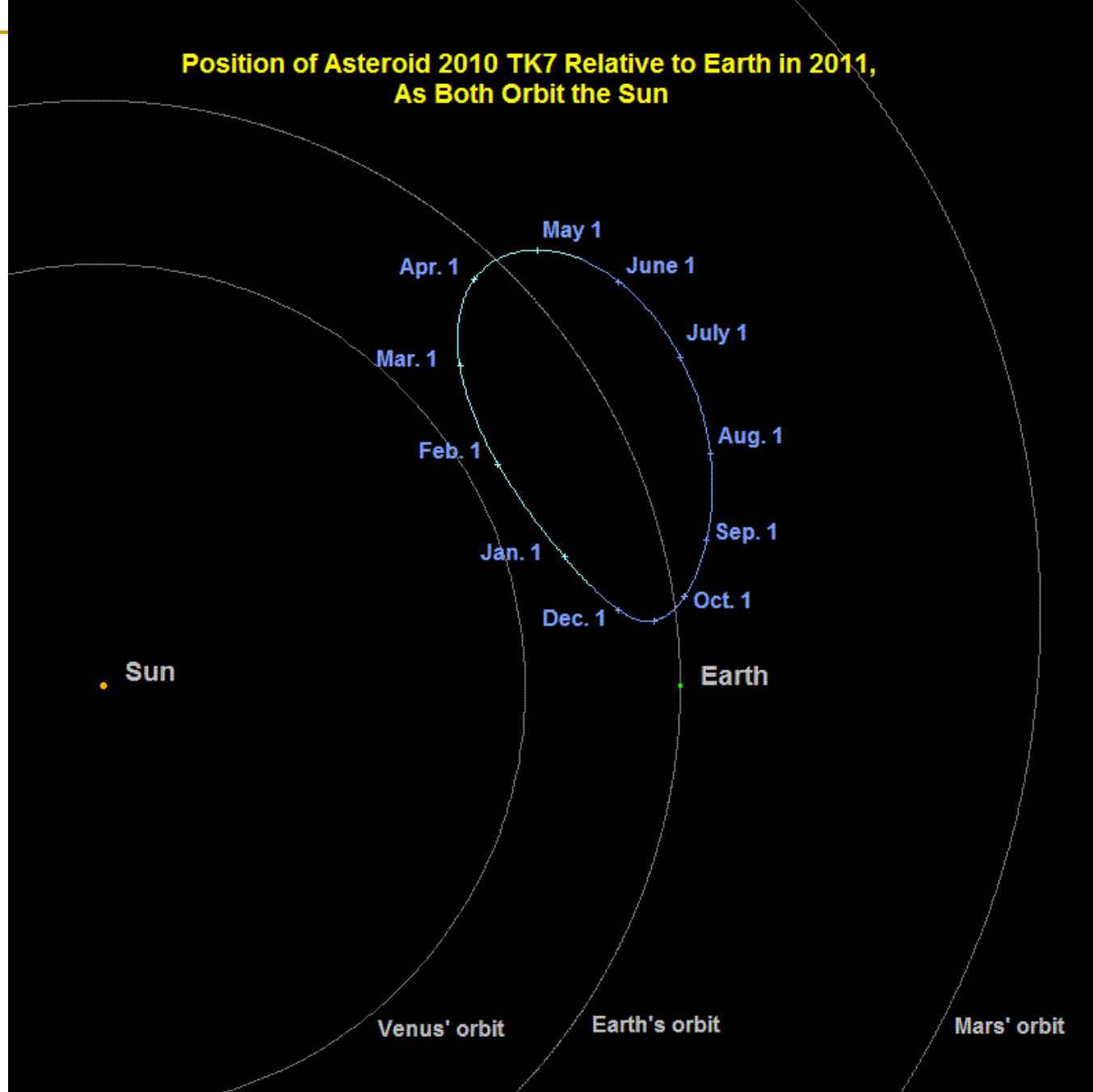


Equipotentielles dans le référentiel tournant dans lequel  $m_1$ ,  $m_2$  sont fixes

# Stabilité des pts de Lagrange : Coriolis

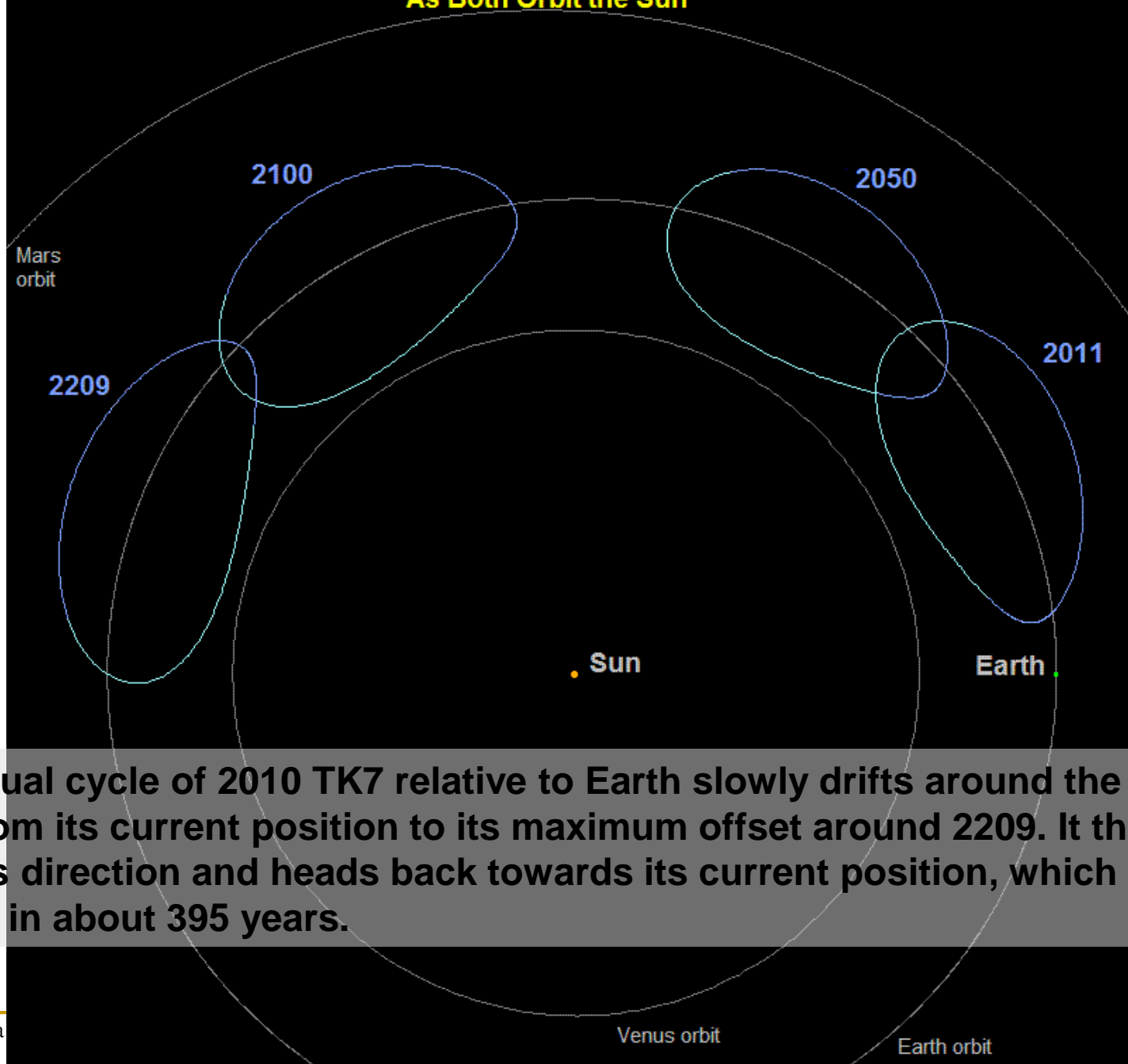
- Nous avons constaté que les orbites au voisinage des points de Lagrange L1, L2, L3 sont instables:
  - une condition initiale voisine du point d'équilibre conduit à des mouvements qui s'écartent fortement du point d'équilibre
- Qu'en est-il de L4 et L5 ? (EX.4)
  - Les orbites au voisinage de L4 et L5 sont **stables**, bien que ces points correspondent à des *maxima* du potentiel effectif
  - Il doit donc s'agir d'un effet d'une force qui ne dérive pas d'un potentiel: c'est la force de Coriolis!
  - Testons avec la simulation!

# Position of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth in 2011, As Both Orbit the Sun



[http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7\\_rf3.gif](http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf3.gif)

## Annual Cycles of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth for Selected Years, As Both Orbit the Sun



The annual cycle of 2010 TK7 relative to Earth slowly drifts around the Earth's orbit, from its current position to its maximum offset around 2209. It then reverses direction and heads back towards its current position, which it reaches in about 395 years.

# Points de Lagrange: des tremplins pour l'exploration spatiale



**The Lunar L<sub>1</sub> Gateway:  
Portal to the Stars and Beyond**

**Martin W. Lo**  
Navigation and Mission Design Section  
Jet Propulsion Laboratory  
California Institute of Technology

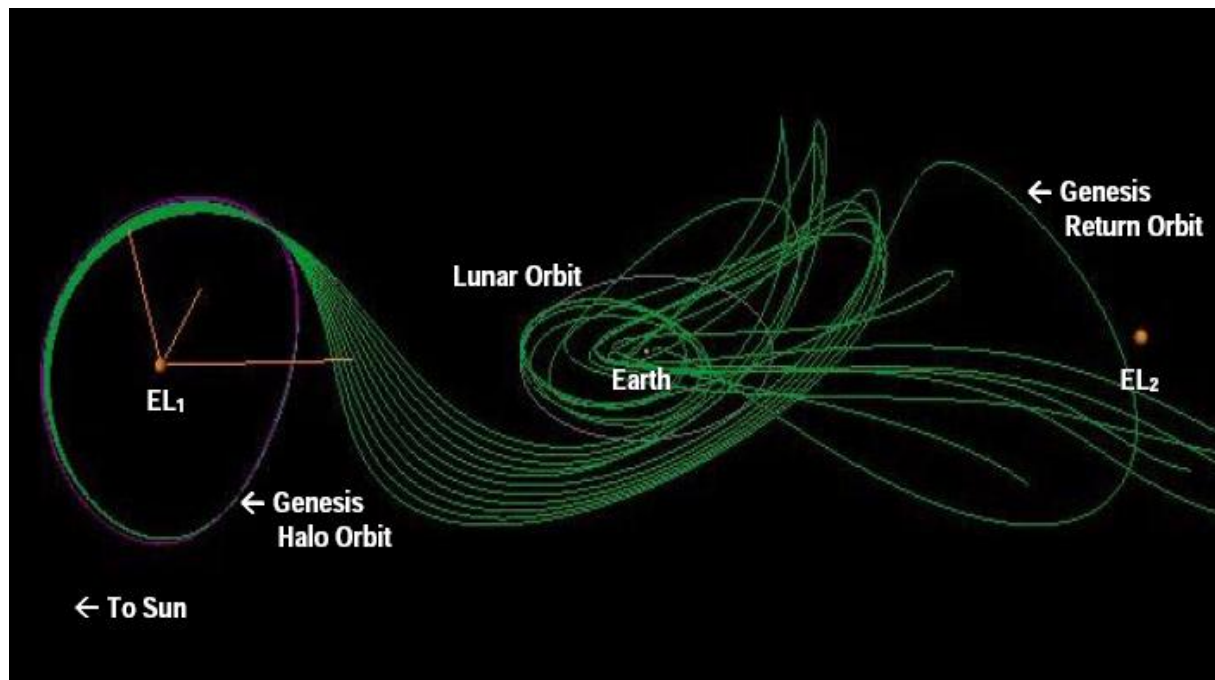
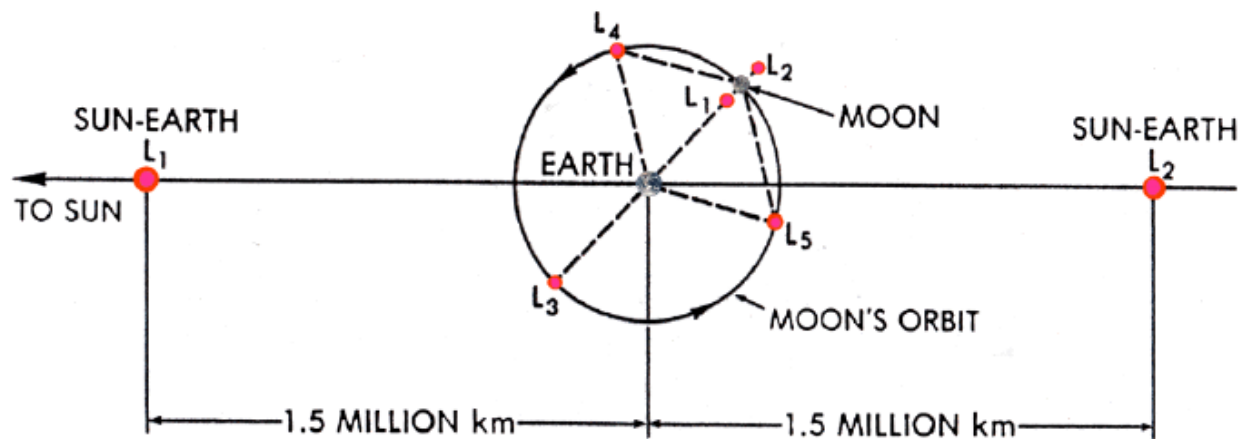
**Shane D. Ross**  
Control and Dynamical Systems  
California Institute of Technology

**AIAA Space 2001 Conference**

[www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers](http://www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers)

[/lunarGateway.pdf](#) Albuquerque, New Mexico August 28-30, 2001

“Our Solar System is interconnected by a vast system of tunnels winding around the Sun generated by the Lagrange Points of all the planets and their moons. These passageways are identified by portals around L1 and L2, the halo orbits. By passing through a halo orbit portal, one enters this ancient and colossal labyrinth of the Sun. This natural Interplanetary Superhighway System (IPS, see Figure 1) provides ultra-low energy transport throughout the Earth’s Neighborhood, the region between Earth’s L1 and L2....”

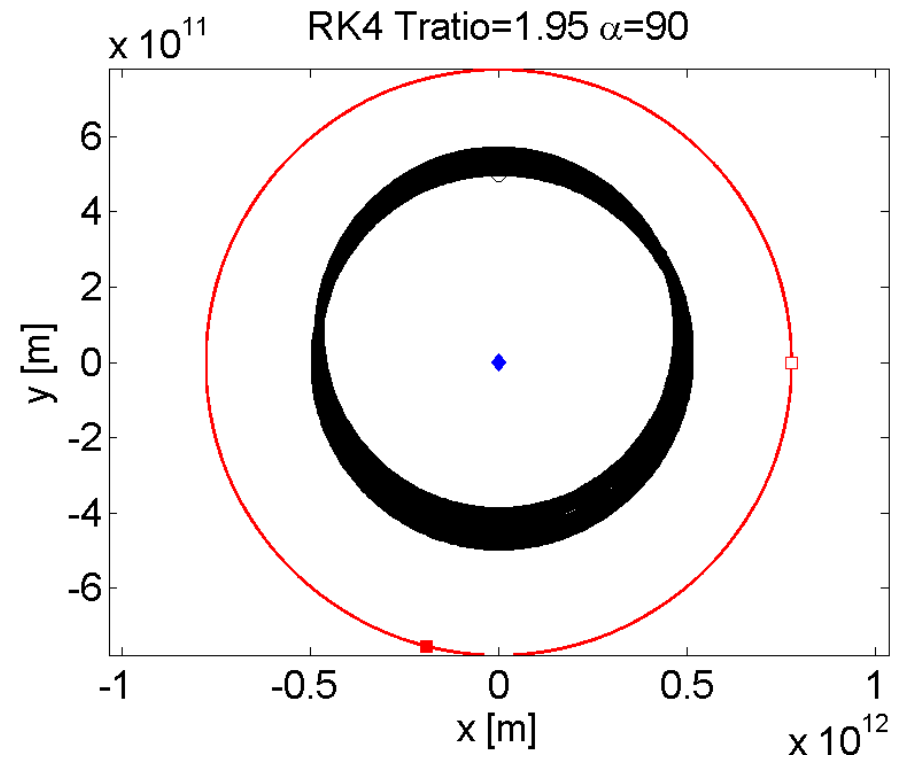
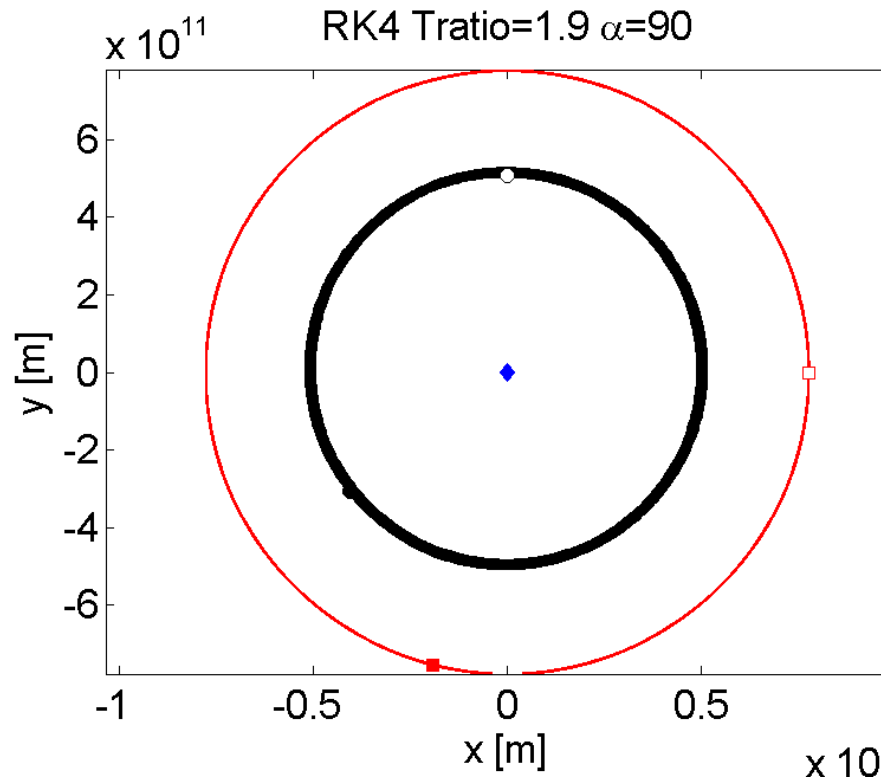


[www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers/lunarGateway.pdf](http://www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers/lunarGateway.pdf)



# Orbites des astéroïdes autour du soleil.

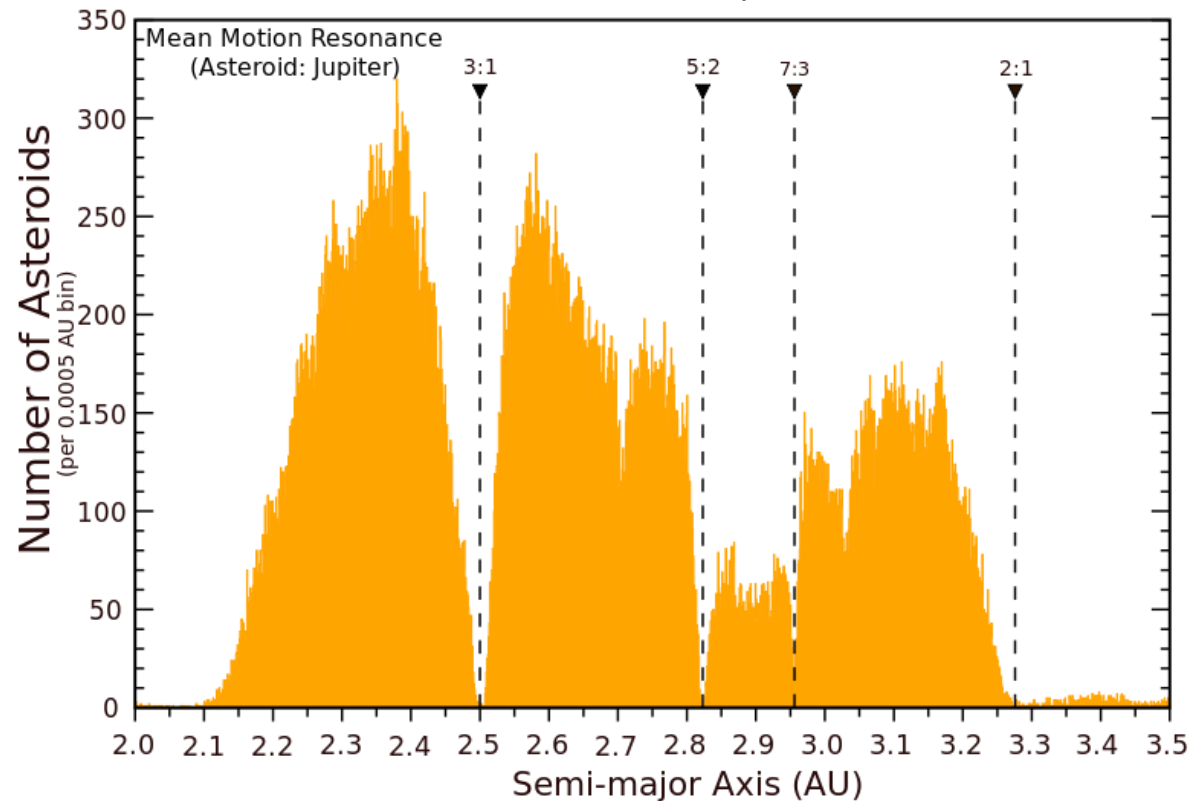
## Effet de Jupiter



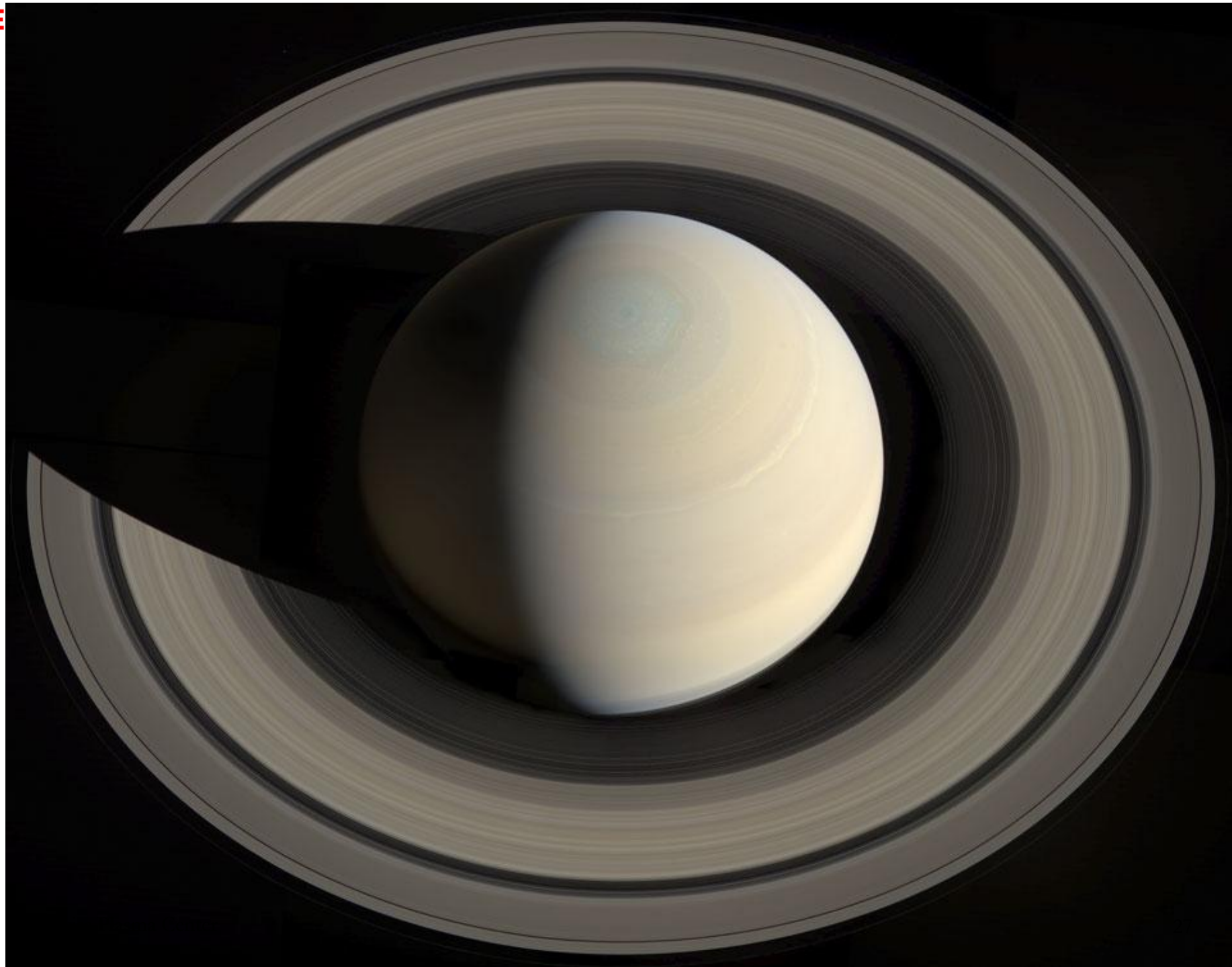
- Effet de résonance entre la période de l'astéroïde et celle de Jupiter

# Kirkwood gaps

## Asteroid Main-Belt Distribution Kirkwood Gaps



- Il y a des « trous » dans la population des astéroïdes à certaines distances du soleil. Correspondent à des périodes en rapport rationnel avec la période de Jupiter



# Anneaux de Saturne

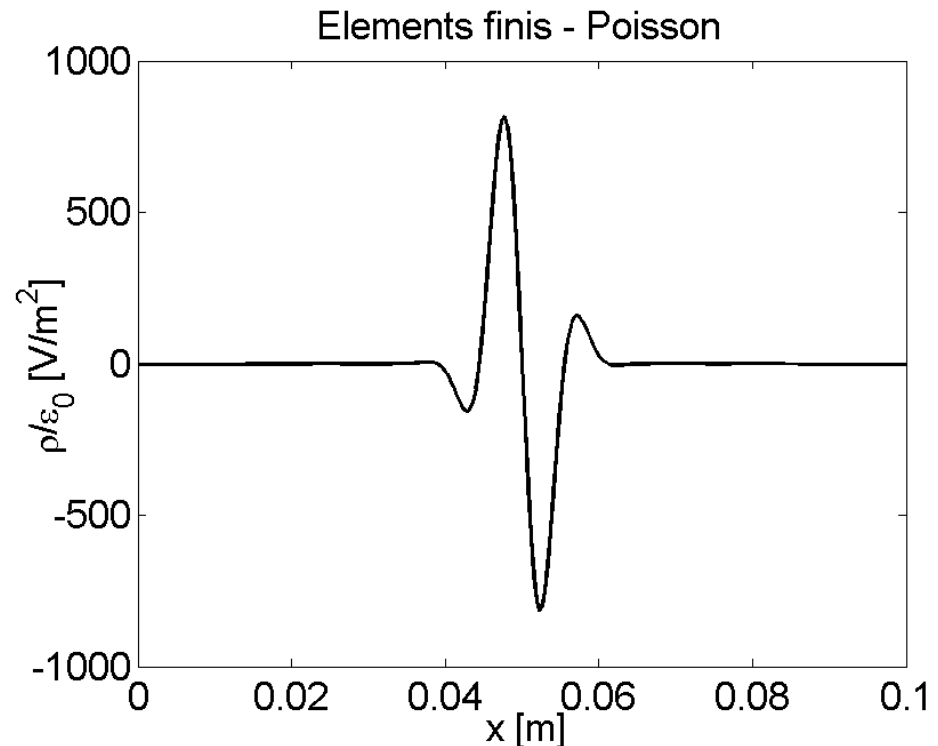
- Image de la page précédente:  
<http://apod.nasa.gov/apod/ap131021.html>
- Certains « gaps » sont dus à des résonances avec les orbites de certaines lunes de Saturne

# Ch. 3 Problèmes à valeurs aux bords

## 3.3 Éléments finis

- Illustration sur un problème électrostatique 1D
- Exercice 3: électrostatique, diélectrique, cylindre

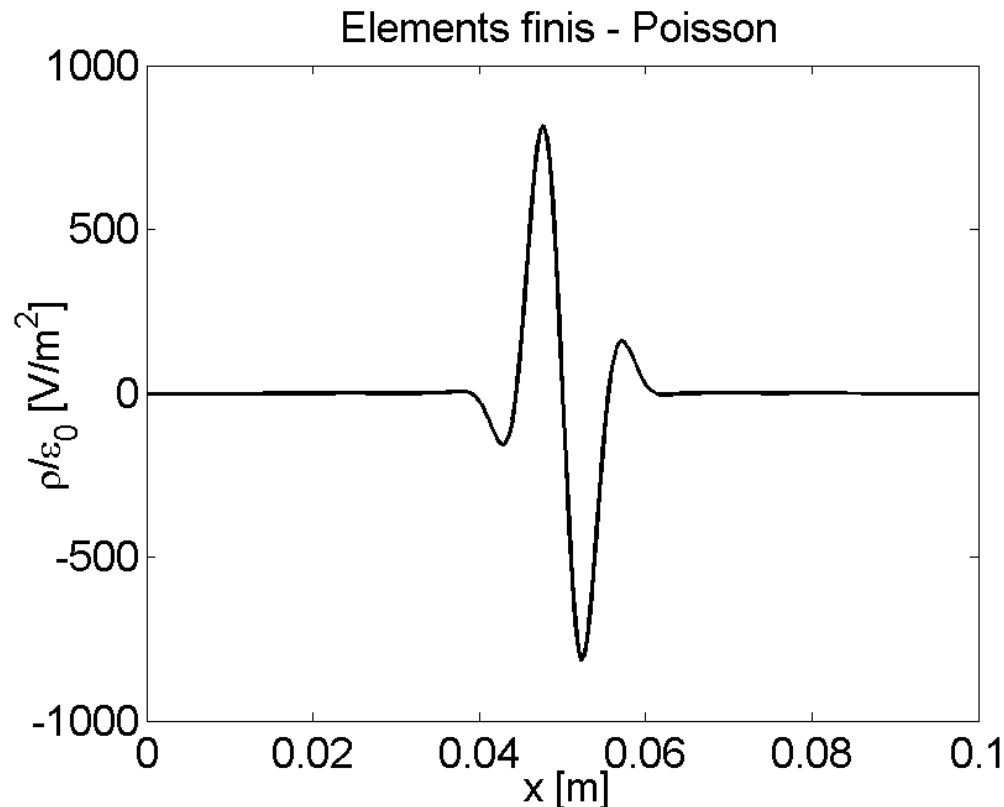
La présentation  
sera faite au  
tableau noir,  
pour le cas de  
l'électrostatique  
avec charges  
libres, sans  
diélectrique



# Elements finis 1D

## ■ Cas de l'équation de Poisson 1-D

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \quad \forall x \in ]x_a, x_b[ \quad \phi(x_a) = V_a, \quad \phi(x_b) = V_b$$



# Forme variationnelle (géométrie générale)

Eléments finis. Equation de Poisson

3D. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Soit  $g(\vec{x}) \in C^0(\Omega)$

Soit  $\eta(\vec{x}) \in C^1(\Omega) \mid \eta(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \partial\Omega$

Soit  $V(\vec{x})$  donné  $\forall \vec{x} \in \partial\Omega$

- Trouver  $\phi(\vec{x}) \in C^2(\Omega)$  tel que:  $\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -g(\vec{x})/\epsilon_0, \forall \vec{x} \in \Omega \mid \partial\Omega$   
et  $\phi(\vec{x}) = V(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \partial\Omega$

- Forme variationnelle du problème:

Trouver  $\phi(\vec{x}) \in C^2(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} \eta(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\Omega} \eta(\vec{x}) g(\vec{x}) / \epsilon_0 d\vec{x}, \forall \eta \in C^1(\Omega) \mid \eta(\vec{x}) = 0 \mid \partial\Omega$$

$$\text{et } \phi(\vec{x}) = V(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

On prend  $\eta(\vec{x}) = 0$  sur  $\partial\Omega$  ~~mais~~, ce qui veut dire qu'on ne fait pas la variation sur les points du bord, mais on impose explicitement les conditions aux limites.



# Forme variationnelle – intégration par parties

L'étape suivante est une intégration par parties.  
On utilise l'identité vectorielle:

$$\vec{\nabla} \cdot (\eta \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} \phi + \eta \nabla^2 \phi$$

Et le théorème de la divergence, ou théorème de Gauss:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\vec{x} = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

On obtient

$$-\int_{\Omega} \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} \phi d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \eta \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{\sigma} = -\int_{\Omega} \eta S/\epsilon_0 d\vec{x}, \quad \forall \eta \mid \eta(\vec{x})=0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et  $\phi(\vec{x}) = V(\vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in \partial\Omega$ . Le 2<sup>e</sup> terme est nul, puisque  $\eta$  est nul sur  $\partial\Omega$ .

Pour l'exercice 4, il est recommandé de suivre jusqu'à ce point une démarche similaire, générale en 3D, et seulement à partir de ce point de spécifier les coordonnées.

Pour l'exercice 4, coordonnées cylindriques. Pour le cours, coord. cartésiennes en 1D:  $\Omega = [x_a, x_b]$ ;  $V(x_a) = V_a$ ;  $V(x_b) = V_b$ .

$$-\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\eta}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = -\int_{x_a}^{x_b} \eta S/\epsilon_0 dx, \quad \forall \eta \mid \eta(a)=\eta(b)=0.$$

et  $\phi(x_a) = V_a$ ,  $\phi(x_b) = V_b$ .



# Elements finis linéaires 1D

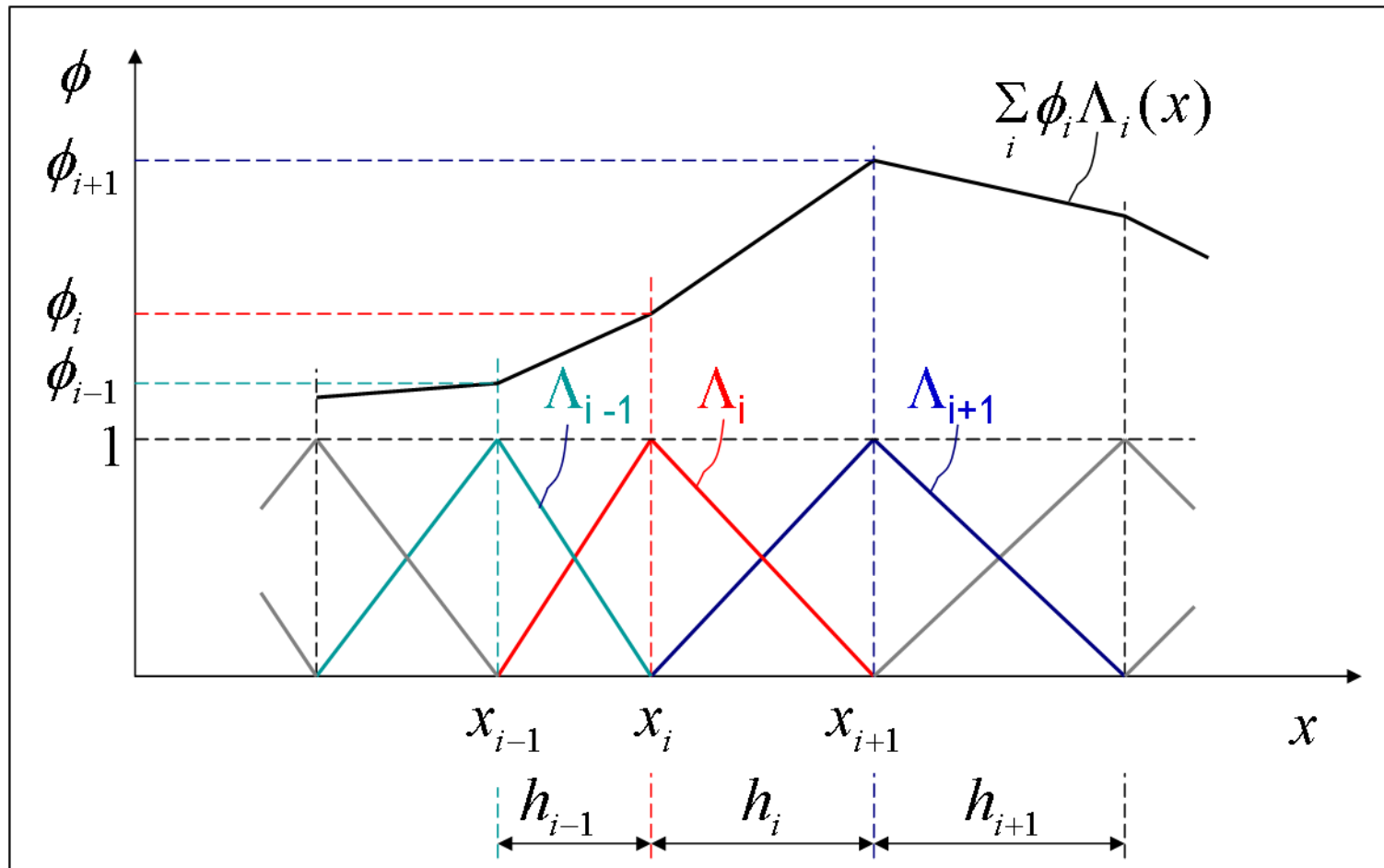


Figure 3.4 – Fonctions de base  $\Lambda_i(x)$  et représentation (approximation) d'une fonction  $\phi(x)$  par ces éléments finis.

# Elements finis – fonctions de base

- C'est à ce point que l'on introduit les éléments finis : on approxime les fonctions  $\phi(x)$  et  $\eta(x)$  sur une base de fonctions  $\Lambda_j(x)$ ,  $j=1..N$ , polynômes par morceaux, de support fini. Voir Figure 3.4 Notes de Cours.

$$\phi(x) \approx \sum_{j=1}^N \phi_j \Lambda_j(x)$$

$$\eta(x) \approx \sum_{i=1}^N \eta_i \Lambda_i(x)$$

$$\eta_1=0, \eta_N=0$$

Insérant dans la forme variationnelle,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta_i \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Lambda_i}{dx} \frac{d\Lambda_j}{dx} dx \phi_j = \sum_i \eta_i \int_{x_a}^{x_b} \Lambda_i S/\epsilon_0 dx, \quad \forall \eta_i$$

Cette relation doit être valable pour tout choix de  $\{\eta_i\}$ ,  $i=2..N-1$ , elle doit être satisfaite pour chacun des termes de la somme sur  $i$ , et donc

$$\sum_j A_{ij} \phi_j = b_i$$

Ou, en notation matricielle,  $\underline{A} \underline{\Phi} = \underline{b}$ , avec :

$$A_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Lambda_i}{dx} \frac{d\Lambda_j}{dx} dx$$

$$b_i = \int_{x_a}^{x_b} \Lambda_i S/\epsilon_0 dx$$

# Conditions aux limites

Il faut, en plus, imposer les conditions aux limites.

$$\phi(x_a) = V_a \Rightarrow \Phi_1 = V_a \quad (*)$$

$$\phi(x_b) = V_b \Rightarrow \Phi_N = V_b$$

Ces conditions sont satisfaites si, dans le problème algébrique linéaire  $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{b}}$  on modifie ainsi les éléments de matrice et du membre de droite :

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = 0, \quad \dots, \quad A_{1N} = 0, \quad b_1 = V_a$$

$$A_{N1} = 0, \quad \dots, \quad A_{N,N-1} = 0, \quad A_{NN} = 1, \quad b_N = V_b$$

(\*) Ex.4: cylindre,  $r=0$  n'est pas un bord du domaine physique  
On n'impose pas de condition explicite en  $r=0$ .  
D'ailleurs, on ne connaît pas la valeur du potentiel en  $r=0$ .

# Questions algorithmiques

- Il est fortement recommandé de procéder à l'assemblage de la matrice et du membre de droite **intervalle par intervalle**

$$A_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\Lambda_i}{dx} \frac{d\Lambda_j}{dx} dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\Lambda_i}{dx} \frac{d\Lambda_j}{dx} dx$$

$$b_i = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Lambda_i dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Lambda_i dx .$$

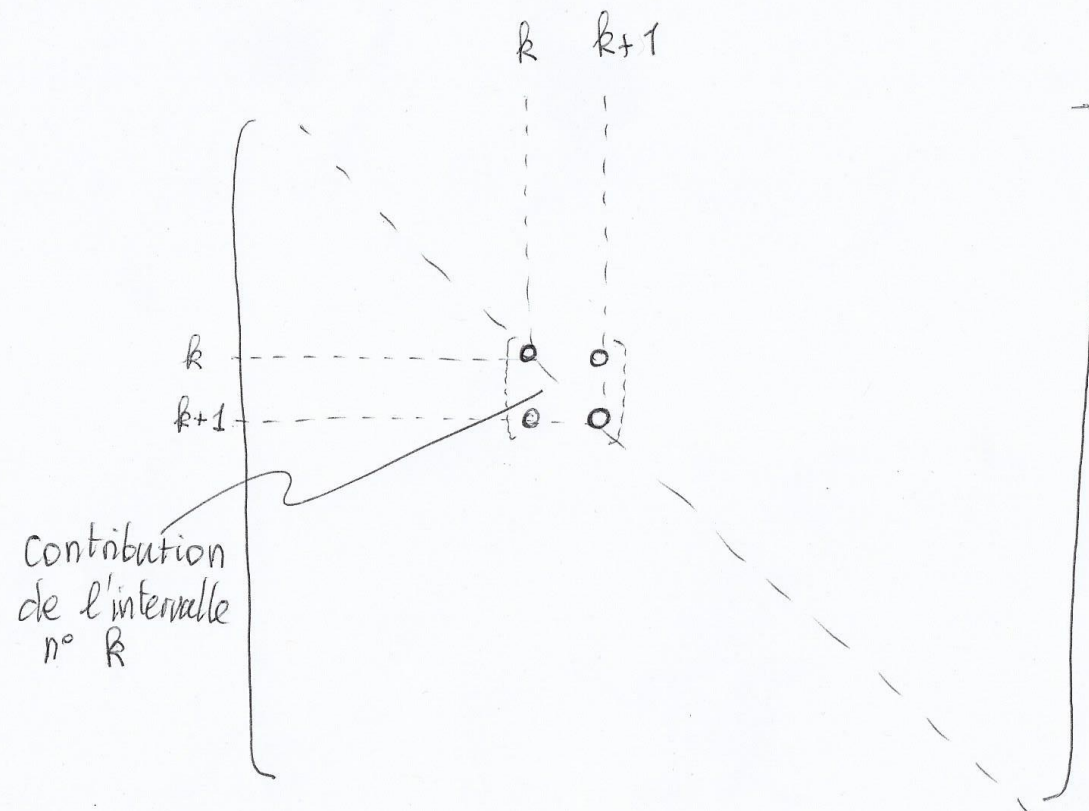
- Boucle sur les intervalles k**

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \begin{pmatrix} & (k) & (k+1) & \\ & \cdot & \cdot & \\ (k) & \cdot & 1/h_k & -1/h_k \\ (k+1) & -1/h_k & 1/h_k & \cdot \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$

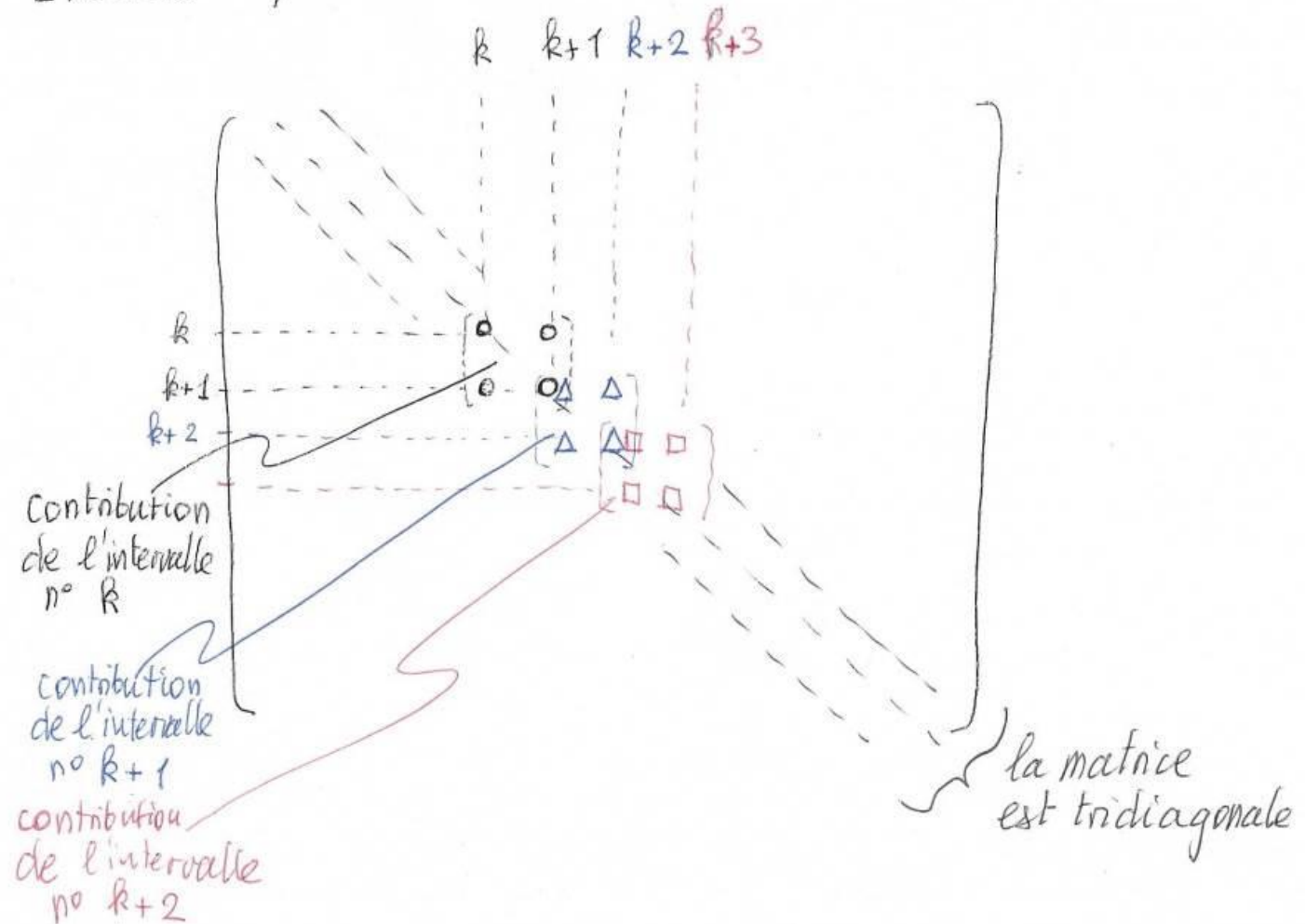
$$b_k = b_k + h_k \left( p \frac{\rho(x_k)}{2\varepsilon_0} + (1-p) \frac{\rho(x_{k+1/2})}{2\varepsilon_0} \right)$$

$$b_{k+1} = b_{k+1} + h_k \left( p \frac{\rho(x_{k+1})}{2\varepsilon_0} + (1-p) \frac{\rho(x_{k+1/2})}{2\varepsilon_0} \right) .$$

## Eléments finis - Structure de la matrice



# Eléments finis - Structure de la matrice





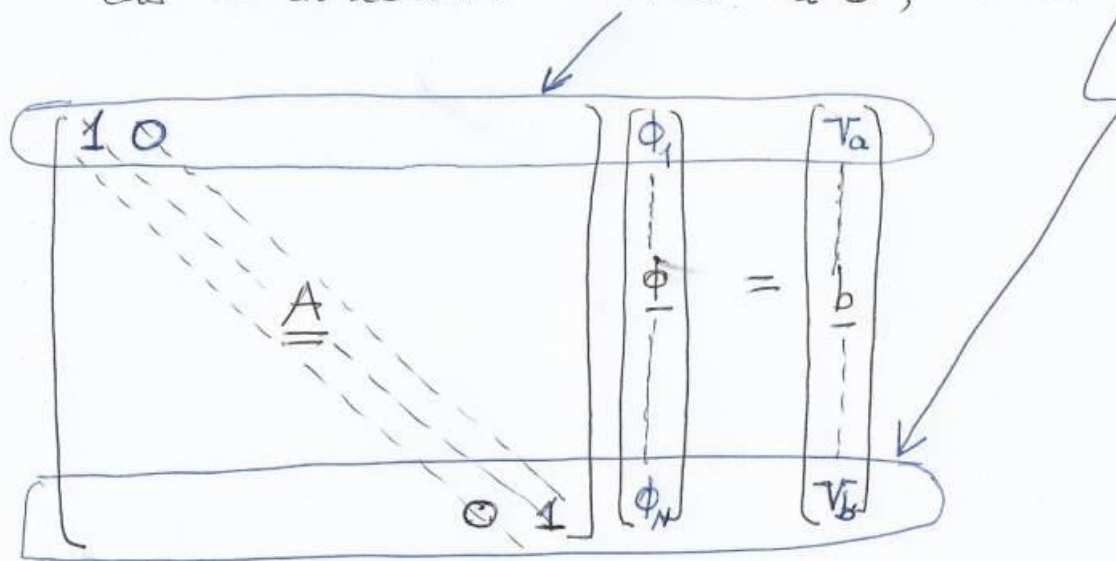
# stockage de la matrice tridiagonale

$$\begin{pmatrix}
 d_0 & c_0 & & & \\
 a_0 & d_1 & c_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & a_{i-1} & d_i & c_i & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & d_{N-2} & c_{N-2} \\
 & & & a_{N-2} & d_{N-1}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \phi_0 \\
 \phi_1 \\
 \vdots \\
 \phi_{i-1} \\
 \phi_i \\
 \phi_{i+1} \\
 \vdots \\
 \phi_{N-2} \\
 \phi_{N-1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_0 \\
 b_1 \\
 \vdots \\
 b_i \\
 \vdots \\
 b_{N-2} \\
 b_{N-1}
 \end{pmatrix}$$

On stocke la diagonale dans un vecteur  $d$   
 " " " " inférieure "  $a$   
 " " " " supérieure "  $c$   
 " " le membre de droite "  $b$

solution: vecteur  $\phi$

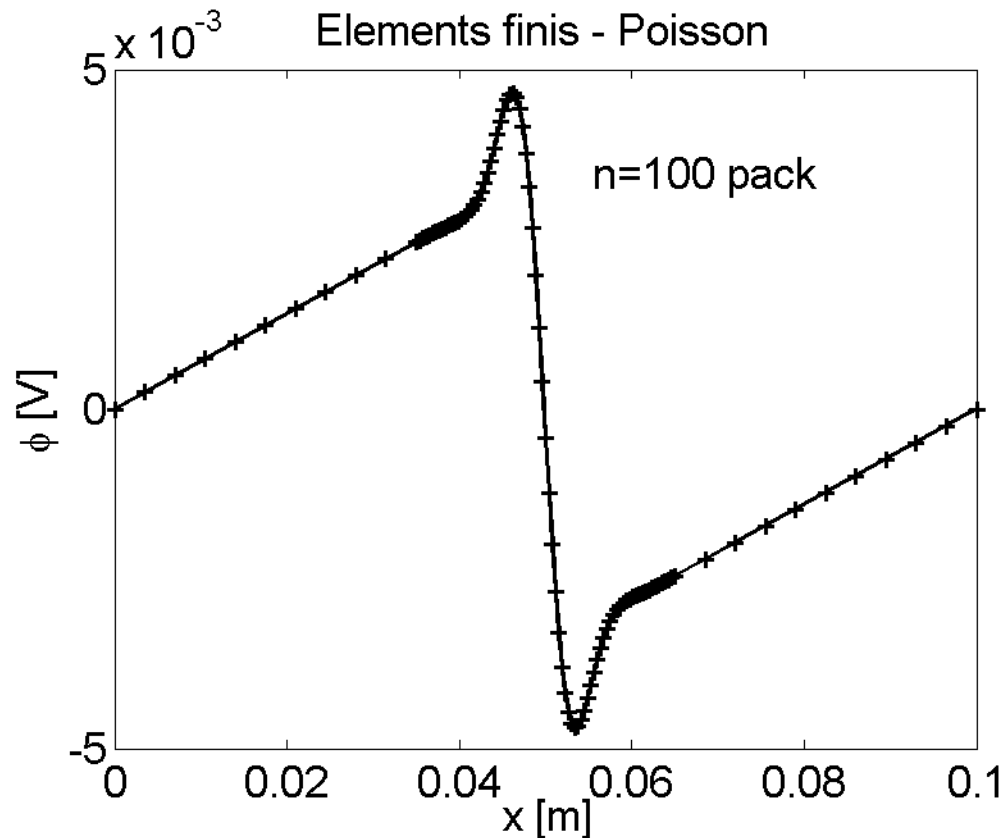
Eléments finis - Conditions aux bords explicites  
 Cas 1D cartésien :  $V(x_a) = V_a$   $\otimes$  ;  $V(x_b) = V_b$



$\otimes$   $\triangle$  Dans l'Ex. 6 (cylindre) il n'y a PAS de condition aux limites en  $r=0$  (premier point de maillage)  
 Analytiquement, c'est une condition de régularité  
 (i.e. pas de ~~sing~~ solution singulière)  
 Numériquement, c'est la formulation par la méthode Galerkin des éléments finis, basée sur le principe variationnel, qui assure la régularité "automatiquement".

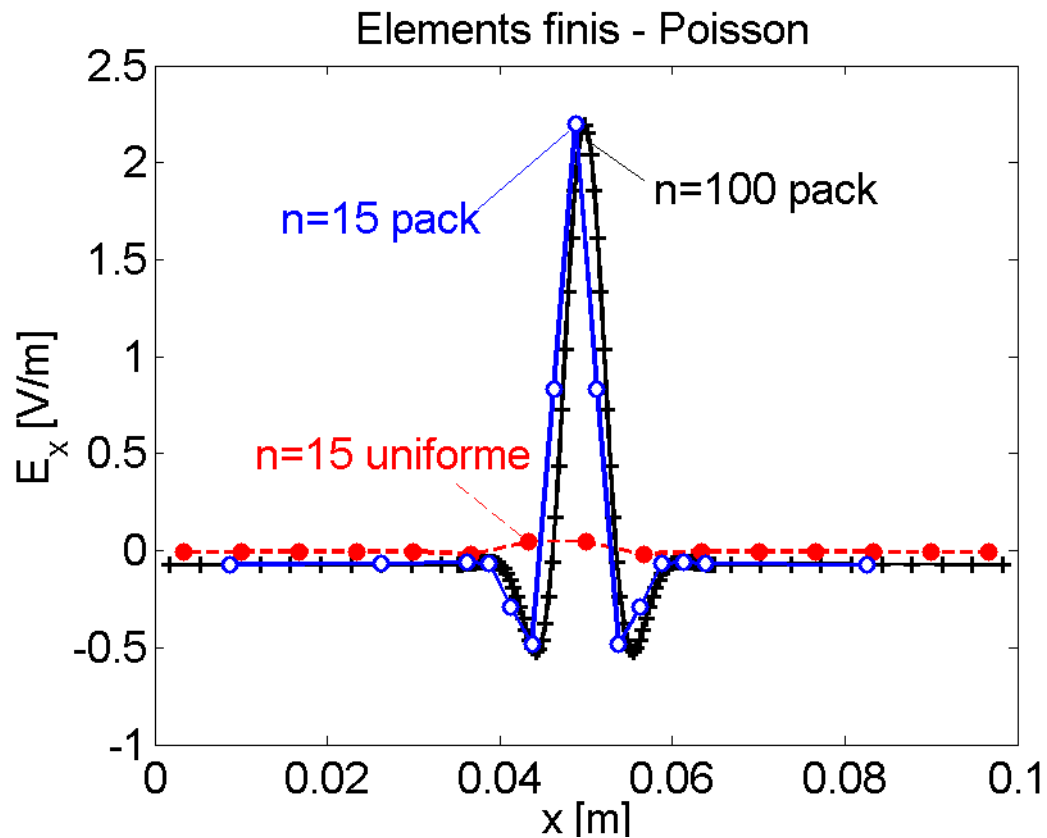


# Elements finis linéaires 1D



- La méthode des éléments finis permet naturellement d'utiliser des maillages non-équidistants ...

# Elements finis linéaires 1D



- ... ce qui améliore la convergence numérique