

Physique Numérique – Semaine 5

Rappel semaine 4

- ☐ Verlet
- ☐ Applications aux systèmes oscillatoires non linéaires
- ☐ Poincaré. Chaos. Attracteurs.

Plan de la semaine 5

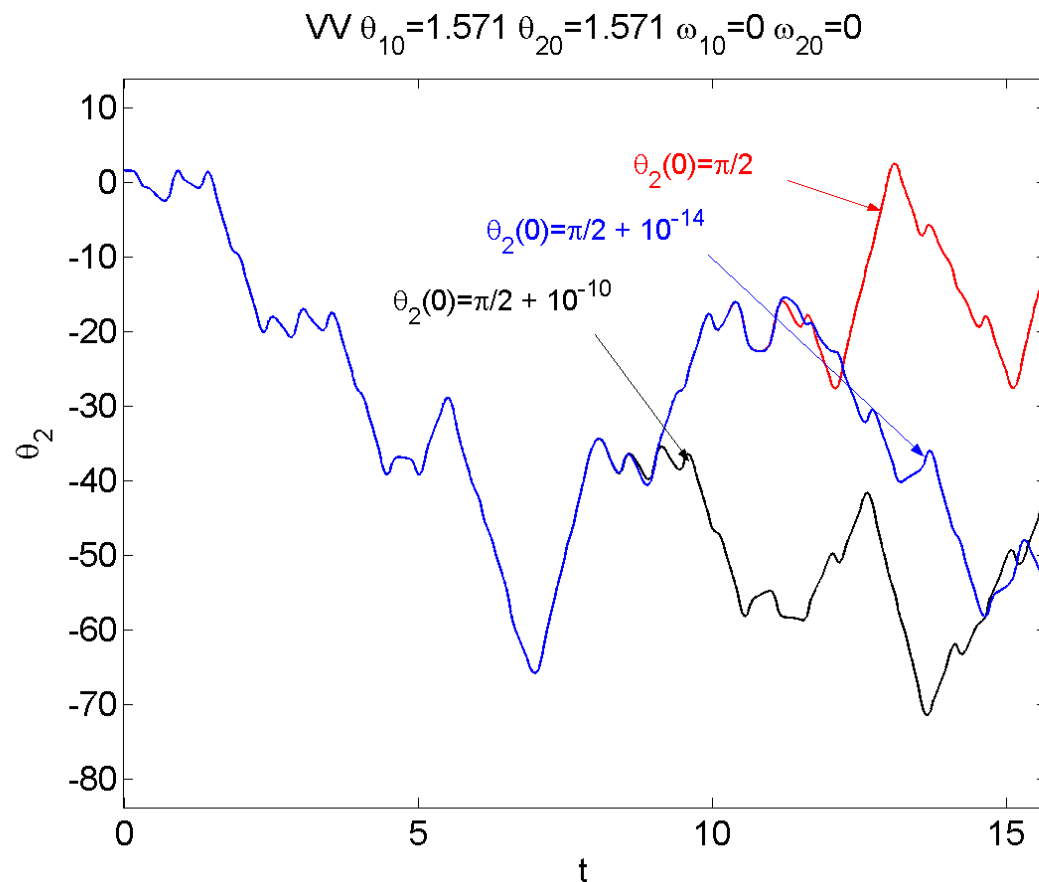
- ☐ Schémas Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 (RK2, RK4)
- ☐ Tests RK4 sur la gravitation, problème à un corps – comète de Halley
- ☐ Comparer avec Verlet.
- ☐ Algorithme à pas de temps Δt adaptatif.
- ☐ Tests de convergence, comparaisons avec le cas Δt fixe.
- ☐ **Exercice 3: astéroïde, effet de Jupiter.**
- ☐ Problème à 3 corps «réduit»
- ☐ Points de Lagrange
- ☐ Quelques autres exemples

Documentation

- Lecture pour la Semaine #4: Notes de cours
 - Chapitre 2, **Sections 2.8, 2.10 (en particulier 2.10.3)**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

Chaos et imprédictabilité – pendule articulé



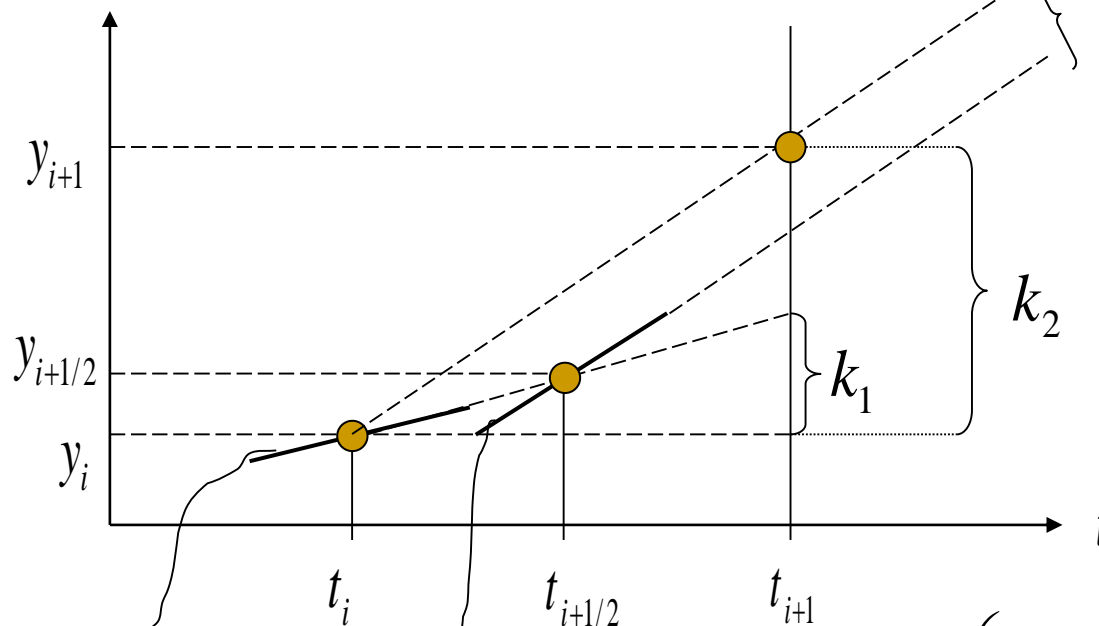
- 10^{-10} : taille atome, 10^{-14} : taille 10 noyaux atomiques!

Runge-Kutta d'ordre 2 (2.8)

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_{i+1/2}\right)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y_i, t_i) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y_i + 0.5k_1, t_i + 0.5\Delta t\right) \\ y_{i+1} &= y_i + k_2 \end{aligned}$$

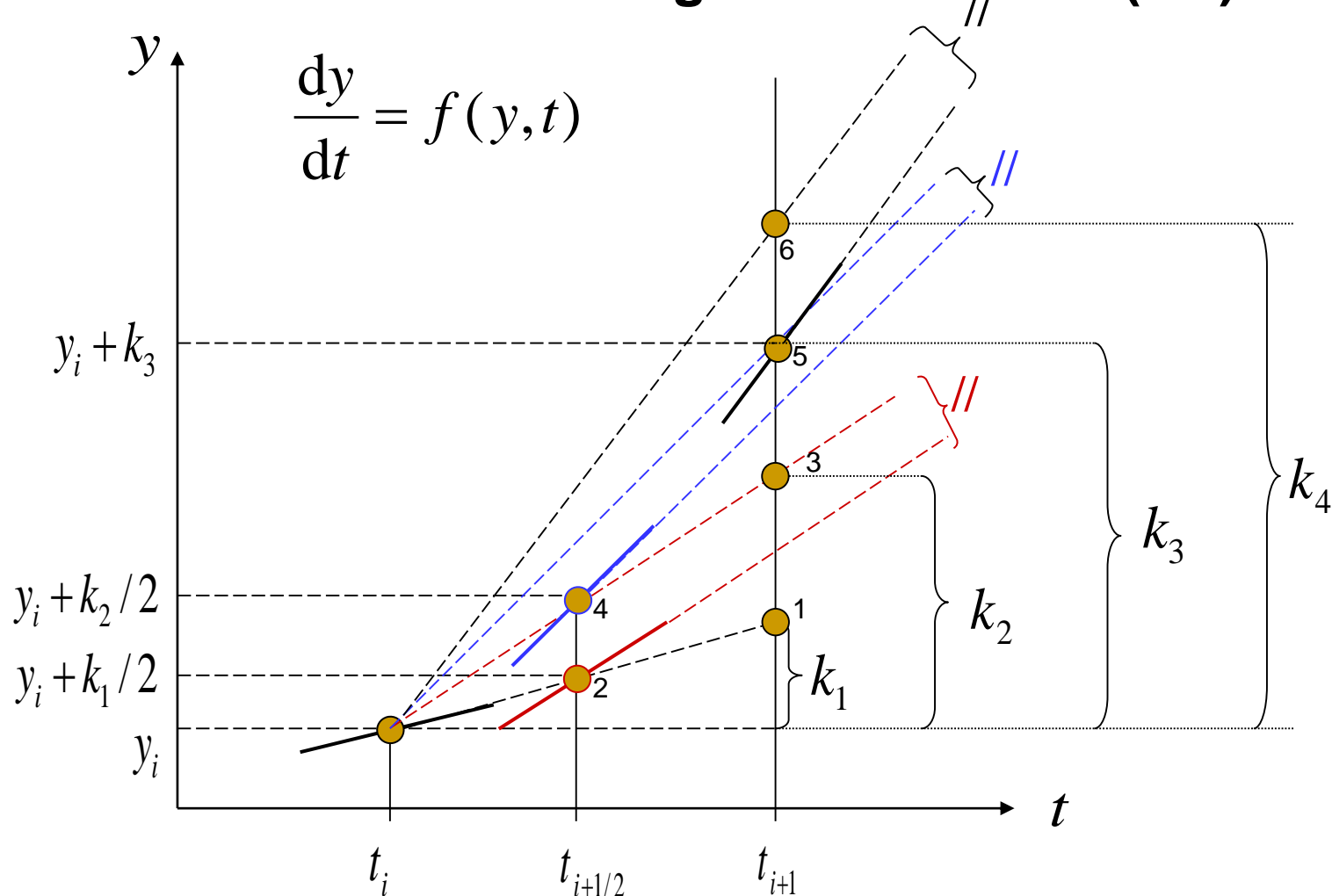


Runge-Kutta ordre 2

Voir les Notes de Cours,
pour une généralisation

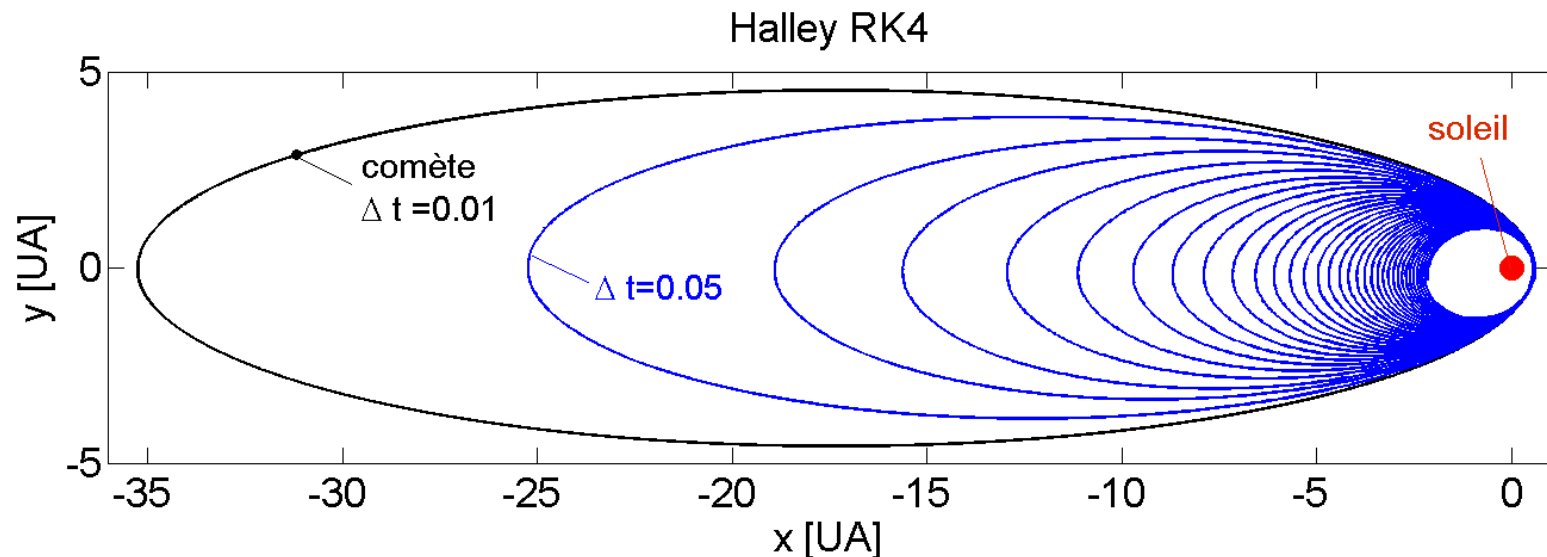
$$\text{pente } f(y_i, t_i) \quad \text{pente } f(y_{i+1/2}, t_{i+1/2}) = f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_{i+1/2}\right)$$

Pour l'Exercice 3: Runge-Kutta ordre 4 (2.8)



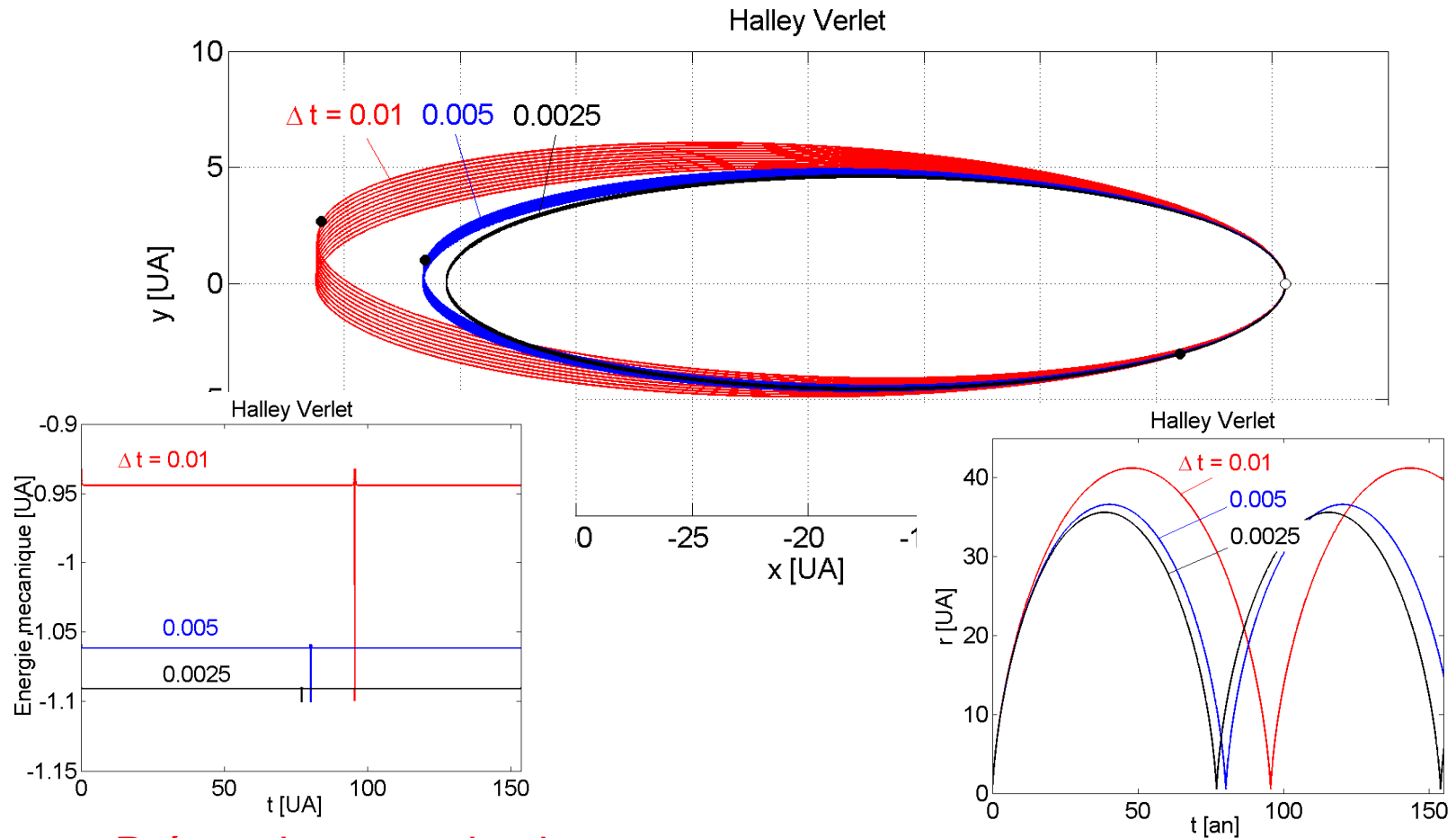
Gravitation - 1 corps

- Comète de Halley
- Orbite elliptique fortement excentrique
 $r_{\max}/r_{\min}=59.6$. $T=75.986$ ans
- Unités astronomiques (UA):
 - Demi grand axe orbite terre (150 mio km)



Intégration numérique avec Runge-Kutta d'ordre 4 et pas temporel Δt constant

Halley, Verlet, 1000 ans

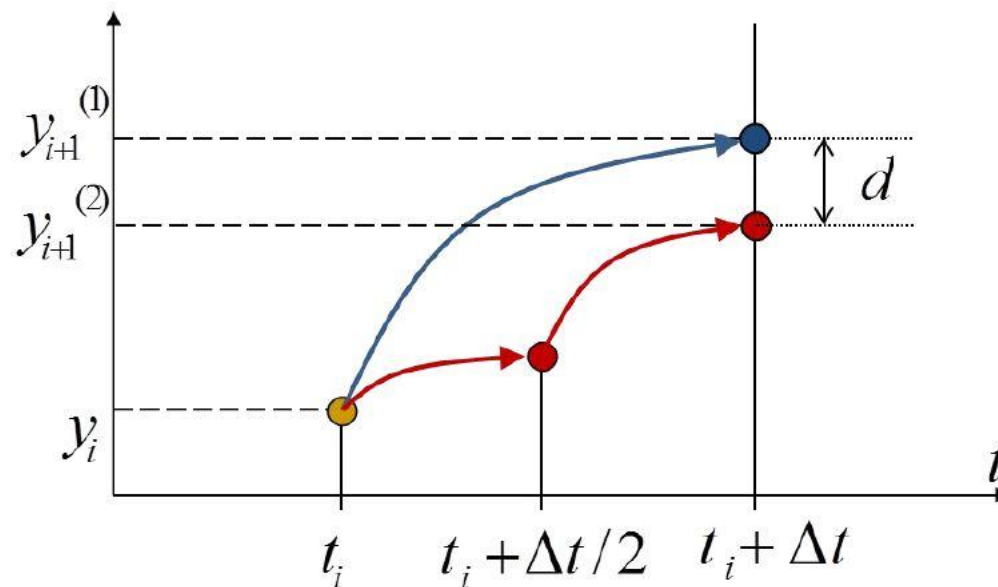


- **Précession non physique.**
- Bonne conservation de Emec en moyenne sur de longs temps.
Mauvaise lorsque $r=r_{\min}$, (accélération maximale).
- La période obtenue converge en Δt^2 , mais pas très grande précision.

Schémas à pas de temps adaptatif

- On a constaté que l'erreur était importante aux instants où le corps est fortement accéléré
- Raffiner le Δt à ces instants, augmenter Δt autrement... comment faire ceci avant de connaître la solution?
- Algorithme de Δt adaptatif: à chaque pas de temps, comparer les résultats obtenus après
 - a) 1 pas de Δt
 - b) 2 pas de $\Delta t/2$
- En ***supposant une loi de convergence*** pour l'algorithme de base utilisé, on peut en déduire quel Δt choisir, i.e. ***contrôler*** l'algorithme.
(développements au tableau)

Schéma à pas de temps adaptatif



Chacune des flèches symbolise un pas complet d'un algorithme de base: par exemple les 4 étapes d'un schema Runge-Kutta du 4e ordre.

On veut choisir Δt de telle sorte que d soit inférieur à une valeur donnée ε

$$d < \varepsilon$$

ε joue le rôle d'un paramètre de **contrôle** de l'algorithme, et n'est PAS la précision obtenue sur y à la fin de la simulation. Cette dernière doit être obtenue par une étude de convergence: $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

Algorithme adaptatif

Si $d < \varepsilon$, passer au pas suivant avec un pas proposé rallongé:

$$\Delta t_{\text{new}} = \Delta t \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

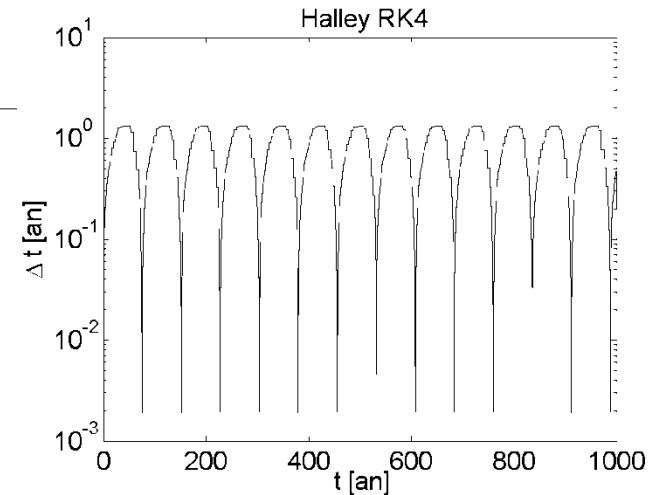
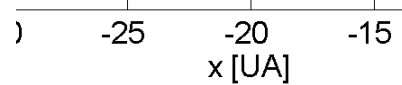
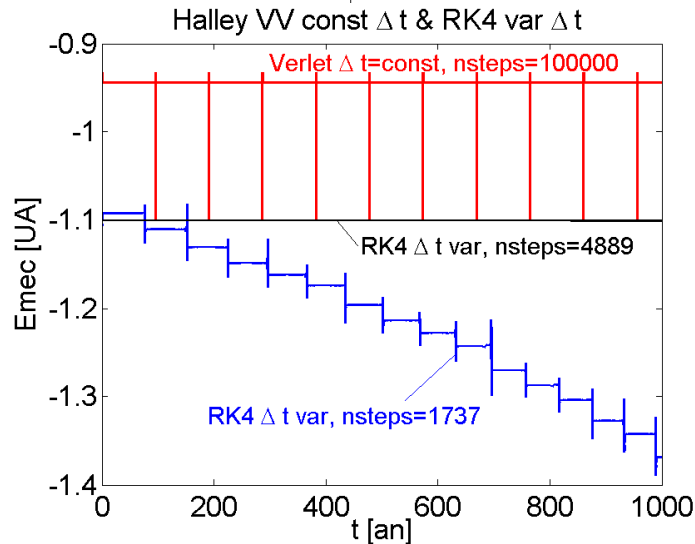
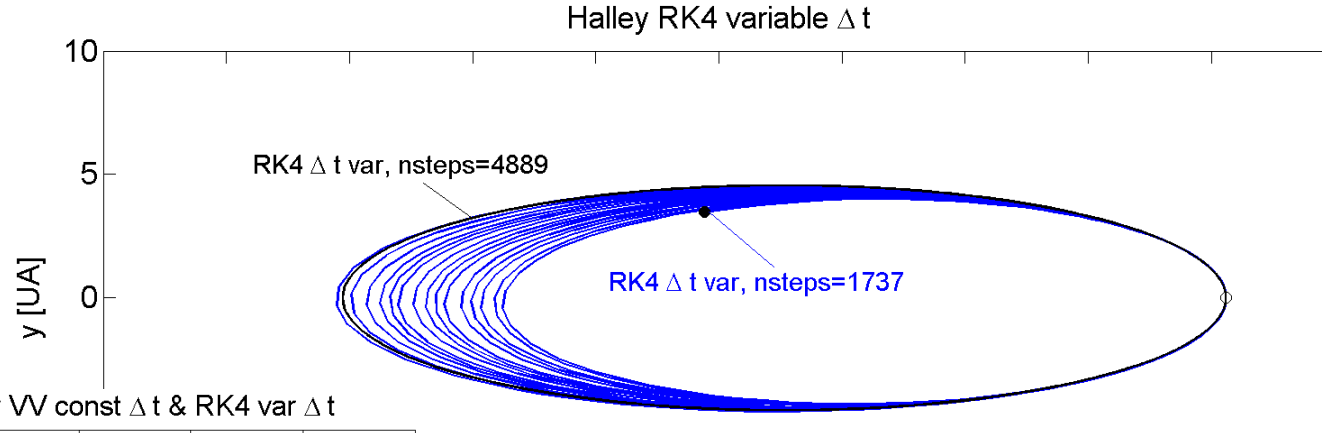
Si $d > \varepsilon$:

Tant que $d > \varepsilon$, raccourcir le pas et le refaire:

$$\Delta t_{\text{refaire}} = f \Delta t \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)^{\frac{1}{n+1}} .$$

avec $f < 1$ pour éviter une boucle infinie

Halley, Runge-Kutta 4e ordre, Δt variable

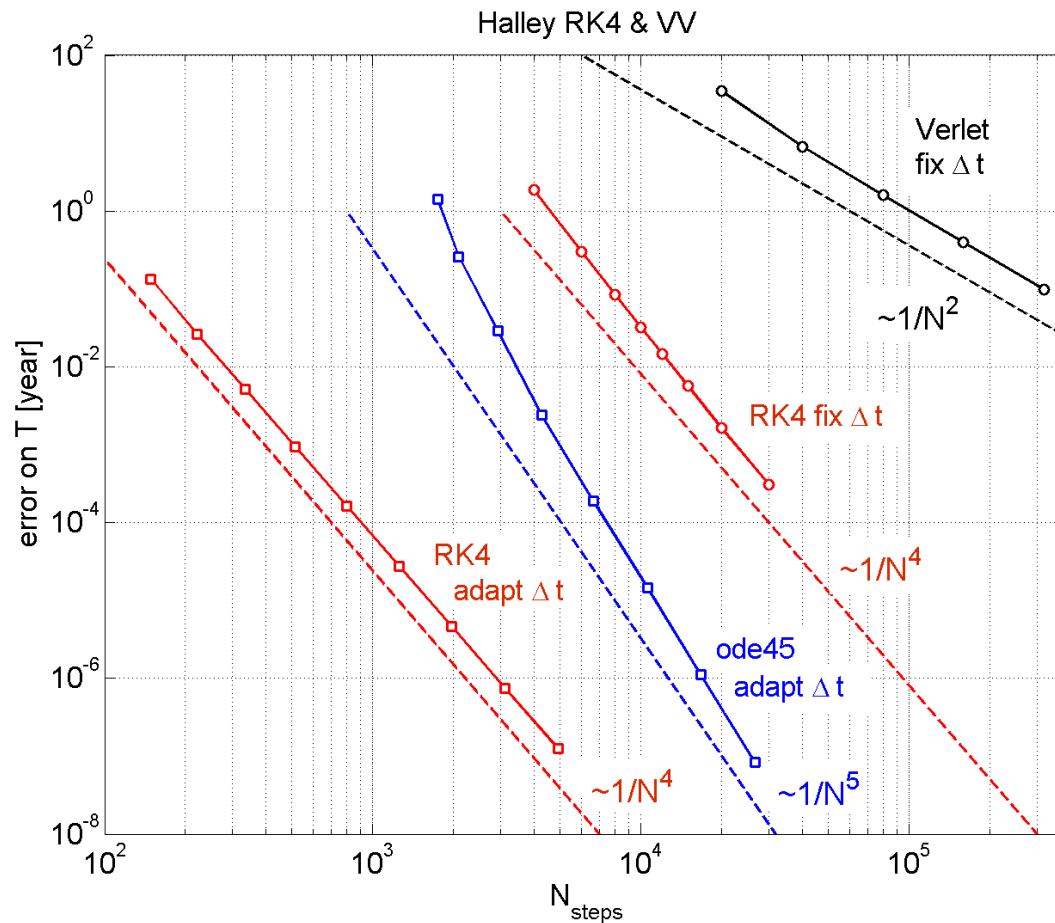


Runge-Kutta a une tendance à long terme de diminuer E_{mec}

Le pas Δt variable permet une très grande efficacité

Convergence très rapide

Halley, Verlet, Runge-Kutta 4, Δt fixe ou variable, convergence de la période

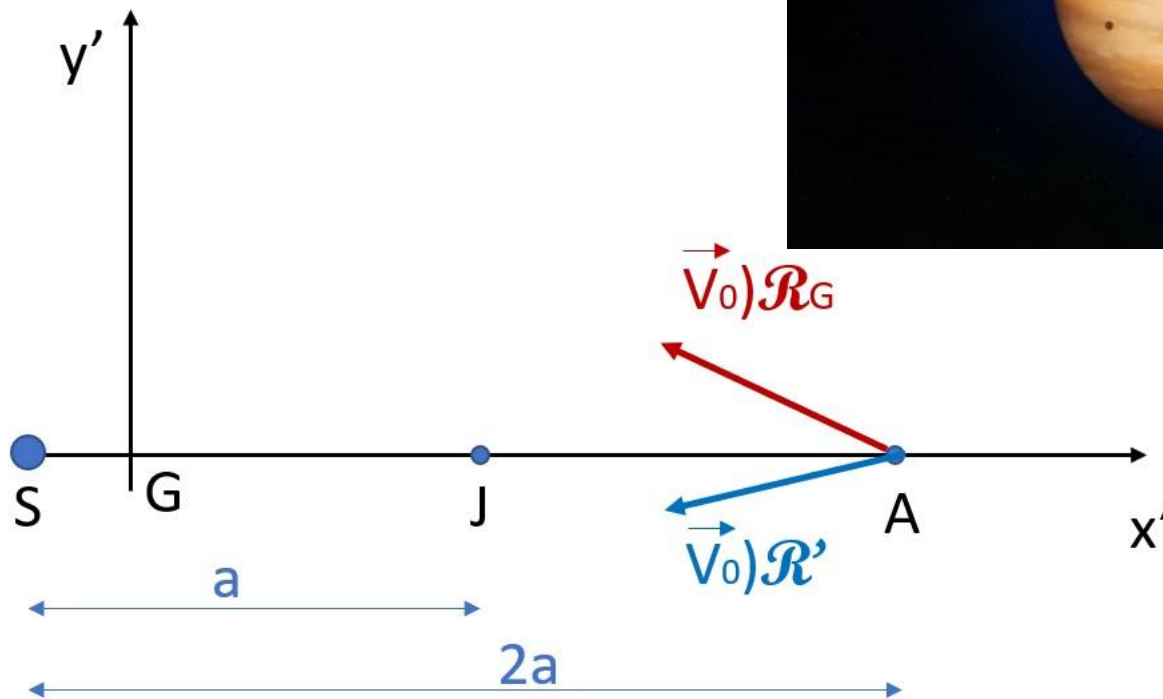


Pour 5000 pas de temps, on est 10 millions de fois plus précis avec le schéma adaptatif qu'avec Δt fixe!

En résumé:

- Verlet conserve bien E_{mec} *en moyenne sur de longues périodes*, mais donne une **précession non physique**.
- Runge-Kutta 4e ordre: converge très rapidement la période, la distance maximale, etc, mais **diminution séculaire non physique de E_{mec}**
- **Un algorithme à pas Δt adaptatif est de plusieurs ordres de grandeur plus efficace qu'à Δt fixe, en particulier dans les cas où les forces varient fortement au cours du mouvement.**

Exercice 3. Astéroïde du siècle. Runge-Kutta 4. Pas de temps adaptatif.

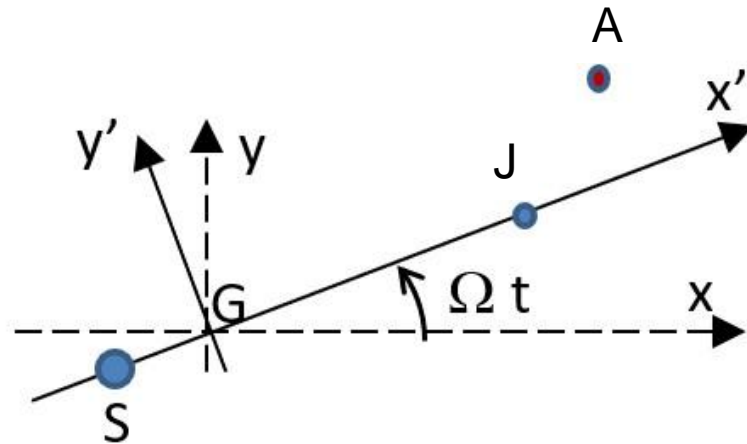


Ex.3. Deux problèmes physiques

(1) Problème à 1 corps.

Orbite de l'astéroïde dans le référentiel du centre de masse (inertiel, héliocentrique)

On **ignore les effets de Jupiter** et autres planètes



(2) Problème à 3 corps «réduit»: $m_A \ll m_S, m_J$

Mouvement $\{S, J\}$ découplé du mouvement de A.

- 1) Mouvement de $\{S, J\}$ dans référentiel du centre de masse. Idem Ex.1.
- 2) **Mouvement de A dans le référentiel \mathcal{R}' tournant avec $\{S, J\}$** (i.e. dans lequel S et J sont fixes.)

Problème à deux corps

- On se place dans le référentiel du centre de masse
- Le mvmt de chacun des 2 corps dans le référentiel du centre de masse est «identique» au mvmt à 1 corps (à des rapports de masse près) (*)
- Les lois de Kepler s'appliquent (*avec une légère modif.*)
 - Orbites= côniques avec un des *foyers au centre de masse*
 - Loi des aires
 - Période $\sim (\text{demi-grand-axe})^{3/2}$
- (*) Mouvement central en $1/r^2$ avec r =distance au C.M.
 - La force est $\sim 1/d^2$, avec $d=|r_2-r_1|$. Def. C.M. \rightarrow relation fixe entre r_1 et d : $r_1=m_2d/(m_1+m_2)$, donc la force est $\sim 1/r_1^2$.
 - “Central” : force toujours dirigée vers un pt fixe du référentiel, dans ce cas le C.M.

Problème à trois corps

- Il semble difficile de trouver des orbites stables pour 3 corps de masses comparables placées à des distances comparables.(*)
- Lorsque un des 3 corps est de masse négligeable par rapport aux 2 autres, on parle de « **problème à 3 corps réduit** ».
 - Exemples: {Soleil, Jupiter, Astéroïde}; {Terre, Lune, Apollo}; {Saturne, Titan, Cassini}; {Soleil, Terre, Webb}
 - On résout d'abord le problème à 2 corps (lourds), en ignorant le 3^e corps (léger).
 - Ensuite, on étudie le mouvement du 3^e corps (léger), en tenant compte du mouvement donné des 2 corps lourds.

(*) Il existe une solution stable avec des trajectoires en forme de 8, voir par exemple <https://www.youtube.com/watch?v=jKvnn1r-9lw>, découverte en ... 1993 (!)

Problème réduit, « planète X » et autres points de Lagrange

- Mvmt d'un 3e corps céleste dans le système (soleil, planète)
 - $m_3 \ll m_1, m_2$
 - approximation d'orbites circulaires pour le soleil et pour la planète.
- On se place dans le référentiel dans lequel le soleil et la planète sont fixes. Référentiel en **rotation**.
- On cherche s'il existe des points d'équilibre pour le 3e corps dans ce référentiel
 - Effet de la **force d'inertie** (« centrifuge »). Calculs analytiques présentés au cours (en résumé).
- On examine la stabilité des points d'équilibre
 - Effet de **Coriolis**. Simulations numériques présentées au cours

Eqs du mvmt 3e corps dans \mathcal{R}'

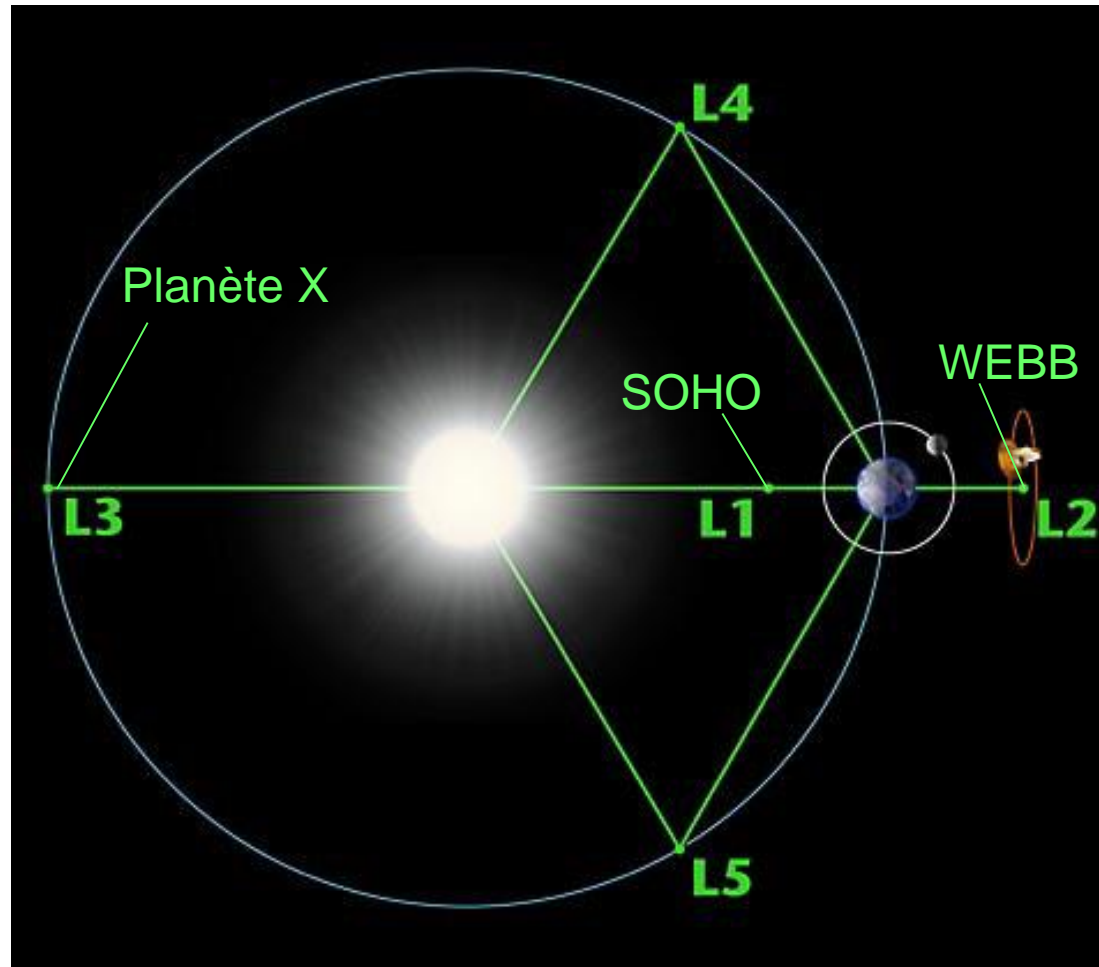
$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} \frac{d^3 \beta (x' + \alpha d)}{r_{13}^3} + \frac{d^3 \alpha (x' - \beta d)}{r_{23}^3} - x' \\ \frac{d^3 \beta}{r_{13}^3} y' + \frac{d^3 \alpha}{r_{23}^3} y' - y' \end{pmatrix} + 2\Omega \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = r'_{12} = \text{const}$$

$$\Omega = \Omega_{R')R} = \text{const} = \dots$$

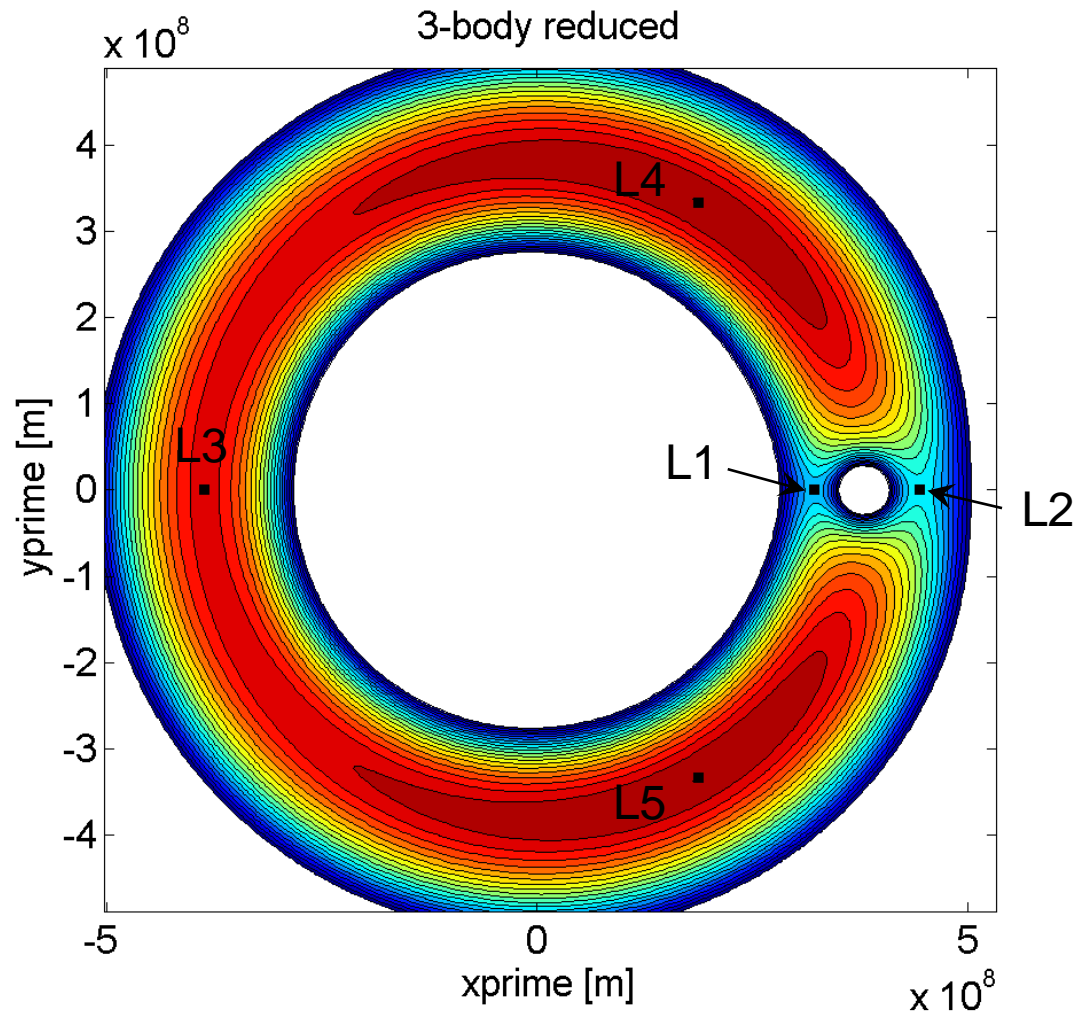
Points de Lagrange, Soleil-Terre



Source: www.nasa.gov

N.B.: Soleil-Jupiter: astéroïdes Troyens en L4 et L5

Stabilité des points de Lagrange

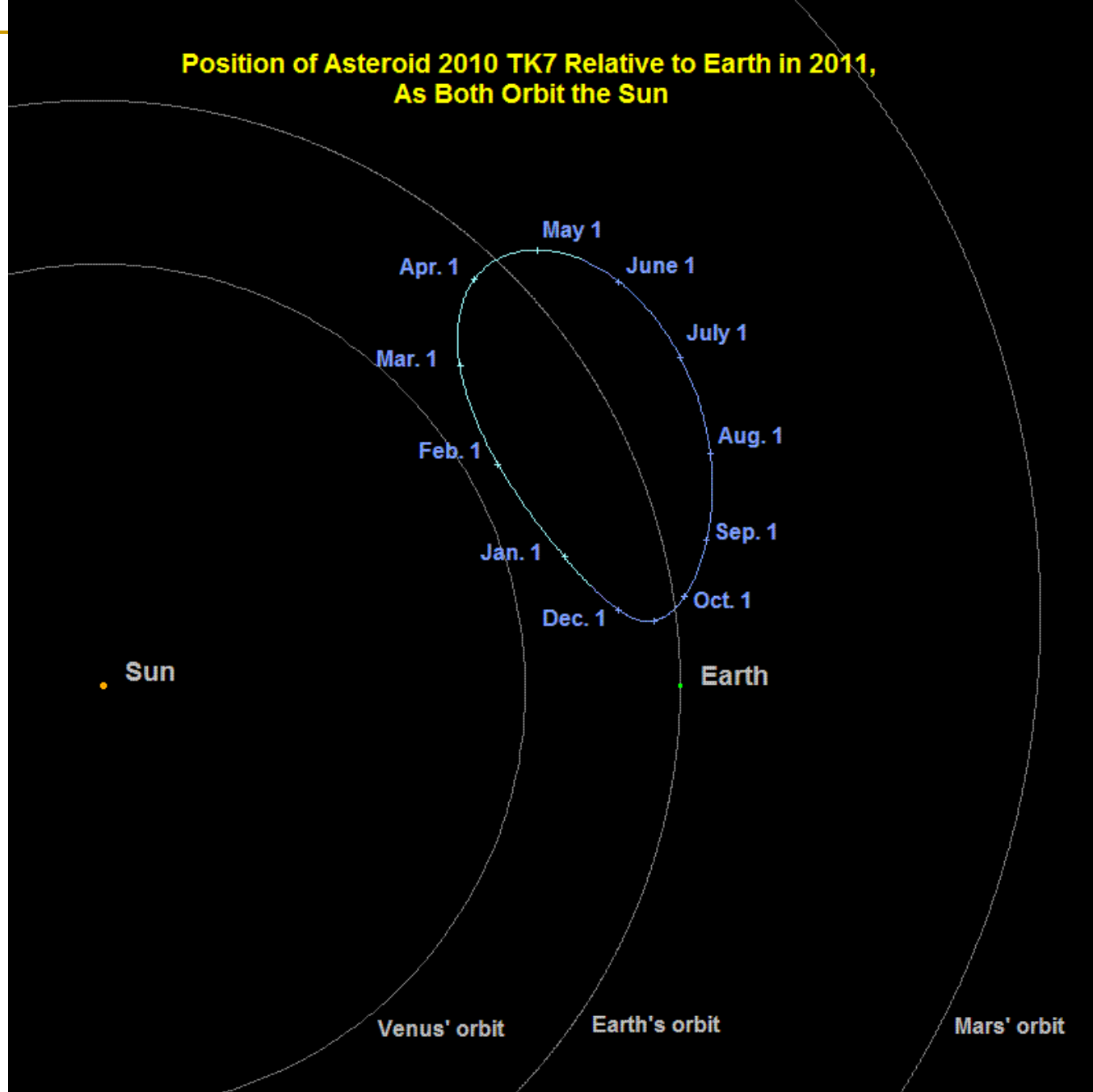


Equipotentielles dans le référentiel tournant dans lequel m_1 , m_2 sont fixes

Stabilité des pts de Lagrange : Coriolis

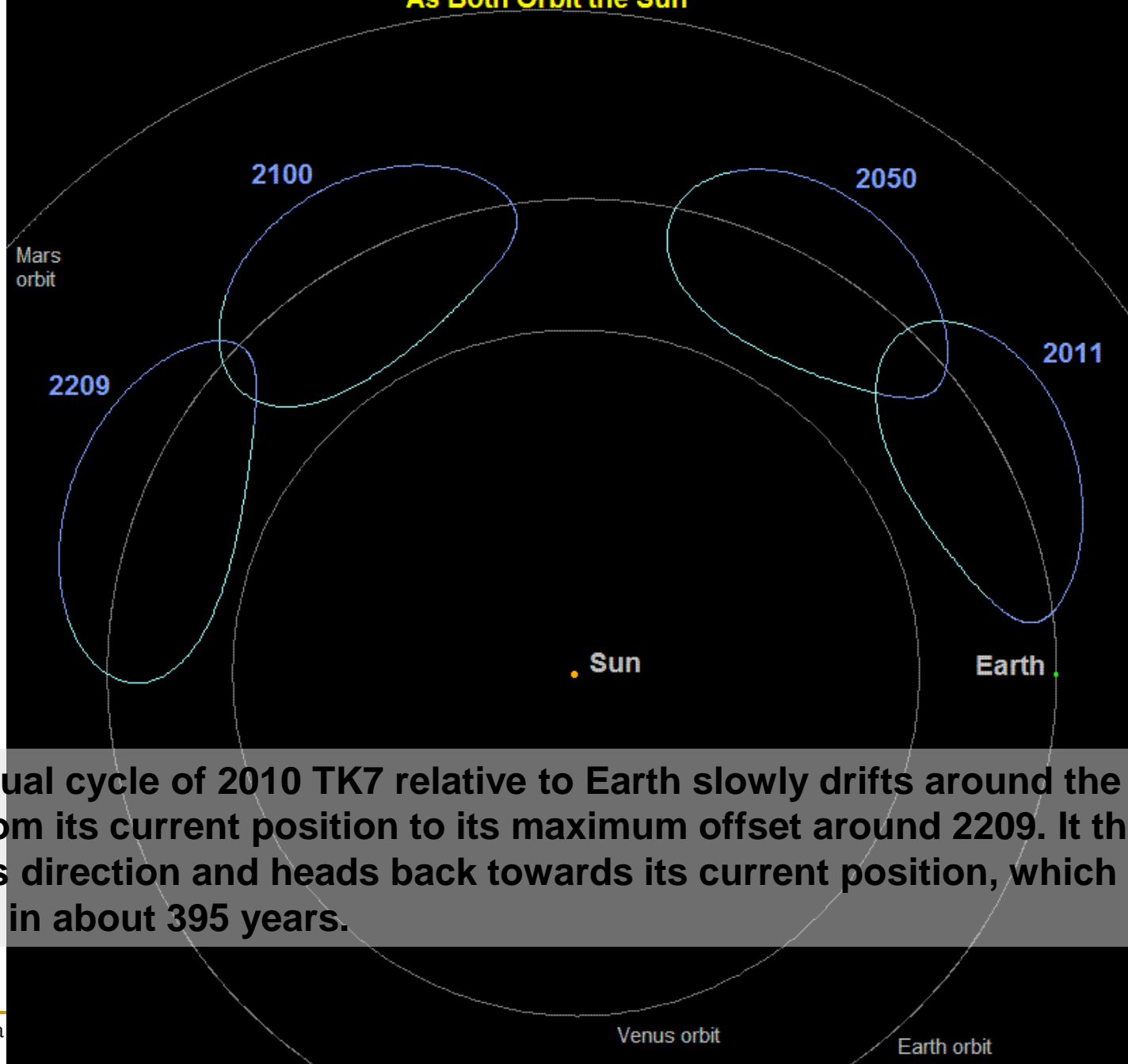
- Nous avons constaté que les orbites au voisinage des points de Lagrange L_1 , L_2 , L_3 sont instables:
 - une condition initiale voisine du point d'équilibre conduit à des mouvements qui s'écartent fortement du point d'équilibre
- Qu'en est-il de L_4 et L_5 ? (EX.4)
 - Les orbites au voisinage de L_4 et L_5 sont **stables**, bien que ces points correspondent à des *maxima* du potentiel effectif
 - Il doit donc s'agir d'un effet d'une force qui ne dérive pas d'un potentiel: c'est la force de Coriolis!
 - Testons avec la simulation!

Position of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth in 2011, As Both Orbit the Sun



http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf3.gif

Annual Cycles of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth for Selected Years, As Both Orbit the Sun



http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf4.gif

The annual cycle of 2010 TK7 relative to Earth slowly drifts around the Earth's orbit, from its current position to its maximum offset around 2209. It then reverses direction and heads back towards its current position, which it reaches in about 395 years.

Points de Lagrange: des tremplins pour l'exploration spatiale



**The Lunar L₁ Gateway:
Portal to the Stars and Beyond**

Martin W. Lo
Navigation and Mission Design Section
Jet Propulsion Laboratory
California Institute of Technology

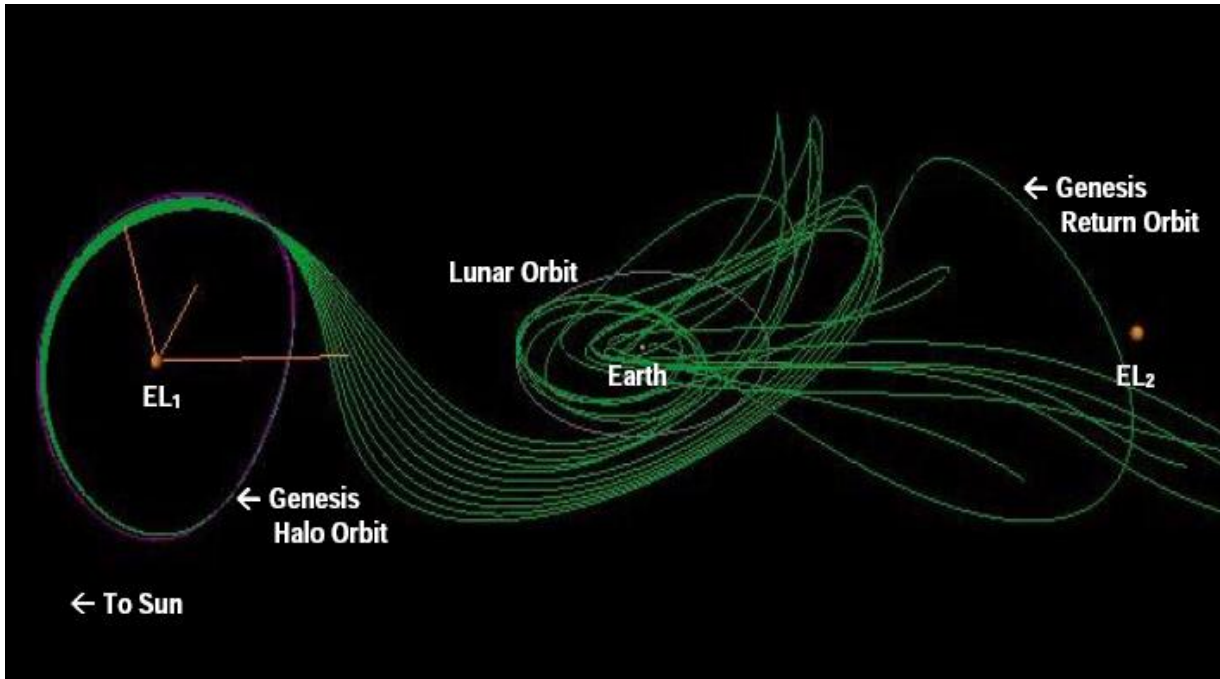
Shane D. Ross
Control and Dynamical Systems
California Institute of Technology

AIAA Space 2001 Conference

www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers

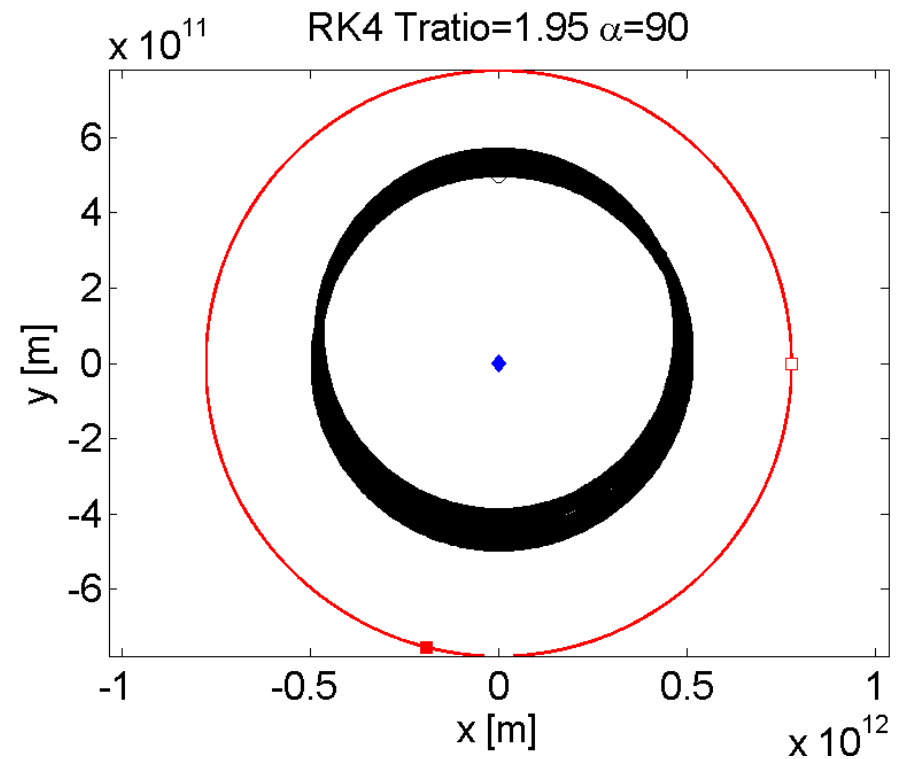
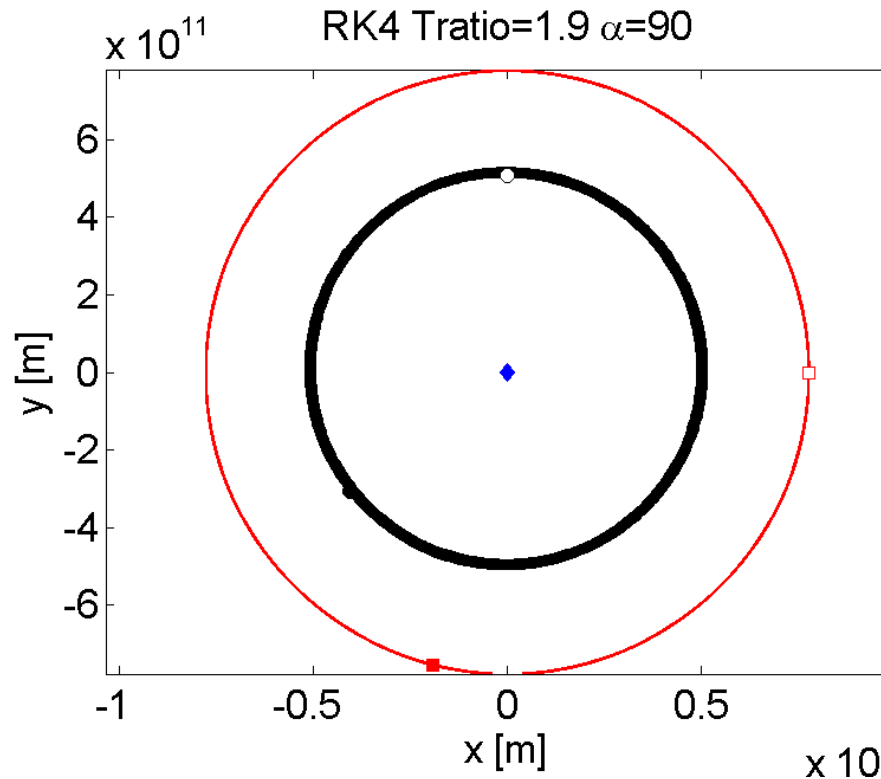
[/lunarGateway.pdf](#)
Albuquerque, New Mexico August 28-30, 2001

“Our Solar System is interconnected by a vast system of tunnels winding around the Sun generated by the Lagrange Points of all the planets and their moons. These passageways are identified by portals around L1 and L2, the halo orbits. By passing through a halo orbit portal, one enters this ancient and colossal labyrinth of the Sun. This natural Interplanetary Superhighway System (IPS, see Figure 1) provides ultra-low energy transport throughout the Earth’s Neighborhood, the region between Earth’s L1 and L2....”



Orbites des astéroïdes autour du soleil.

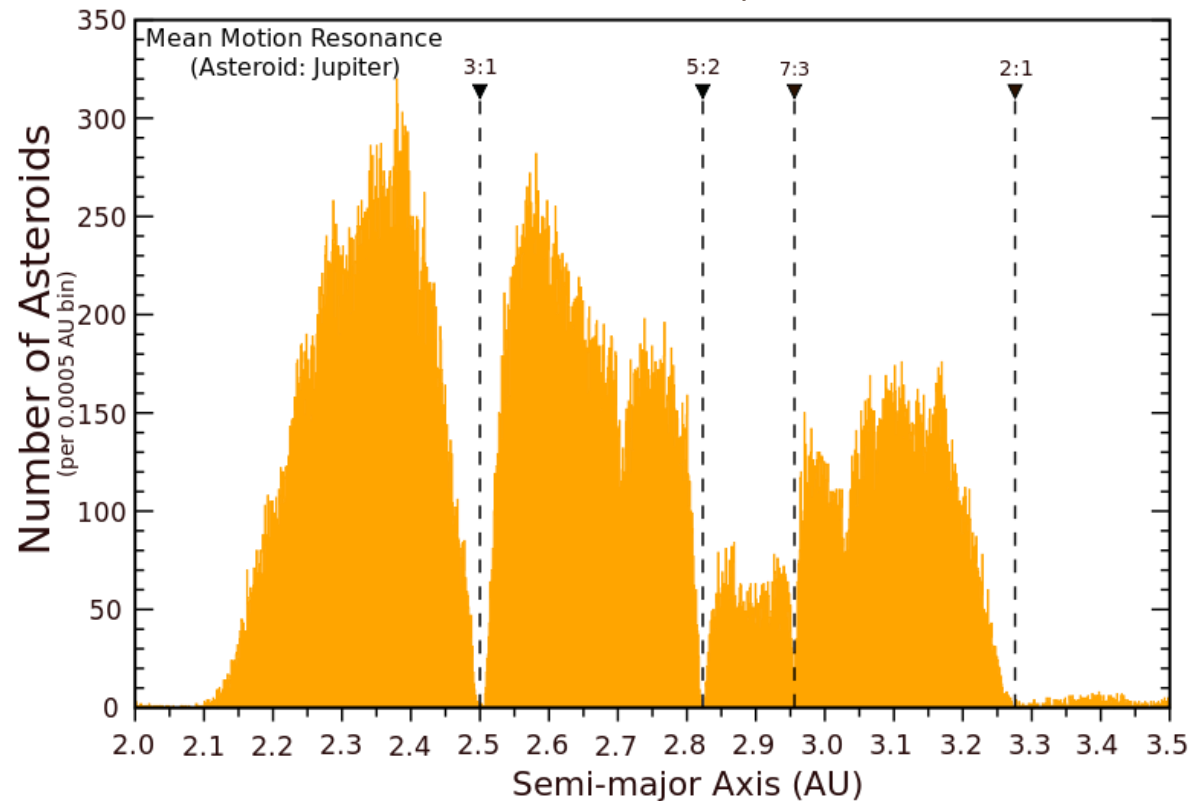
Effet de Jupiter



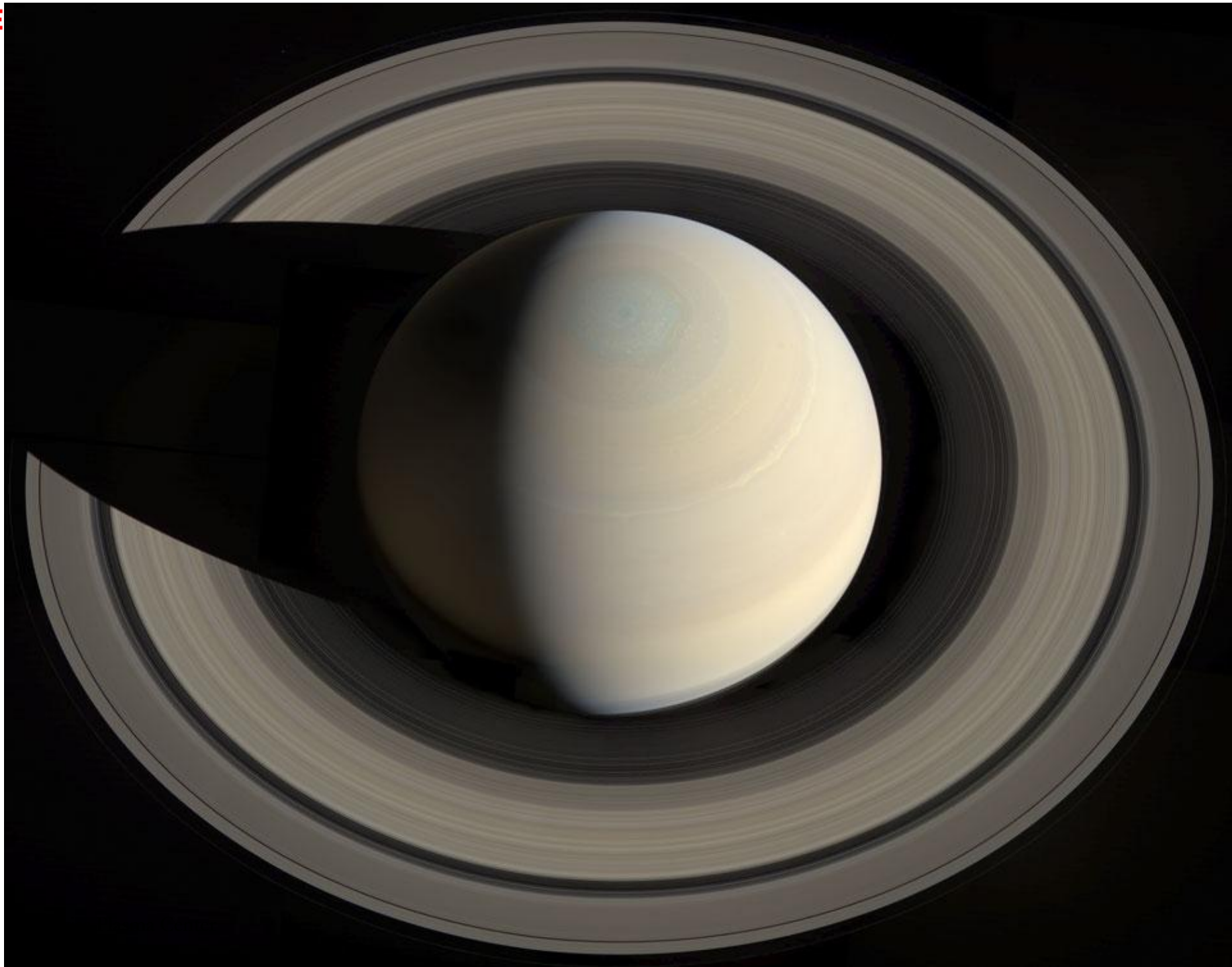
- Effet de résonance entre la période de l'astéroïde et celle de Jupiter

Kirkwood gaps

Asteroid Main-Belt Distribution Kirkwood Gaps



- Il y a des « trous » dans la population des astéroïdes à certaines distances du soleil. Correspondent à des périodes en rapport rationnel avec la période de Jupiter



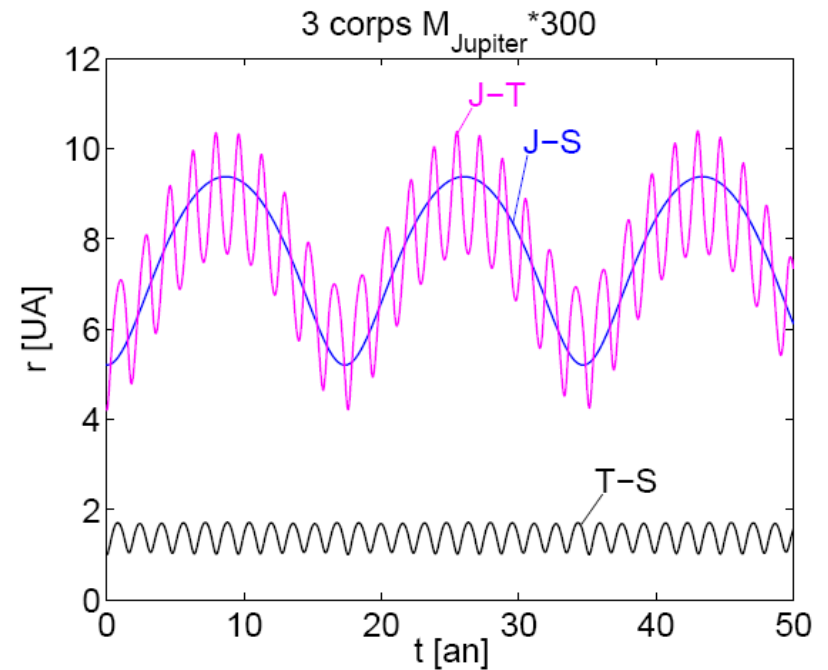
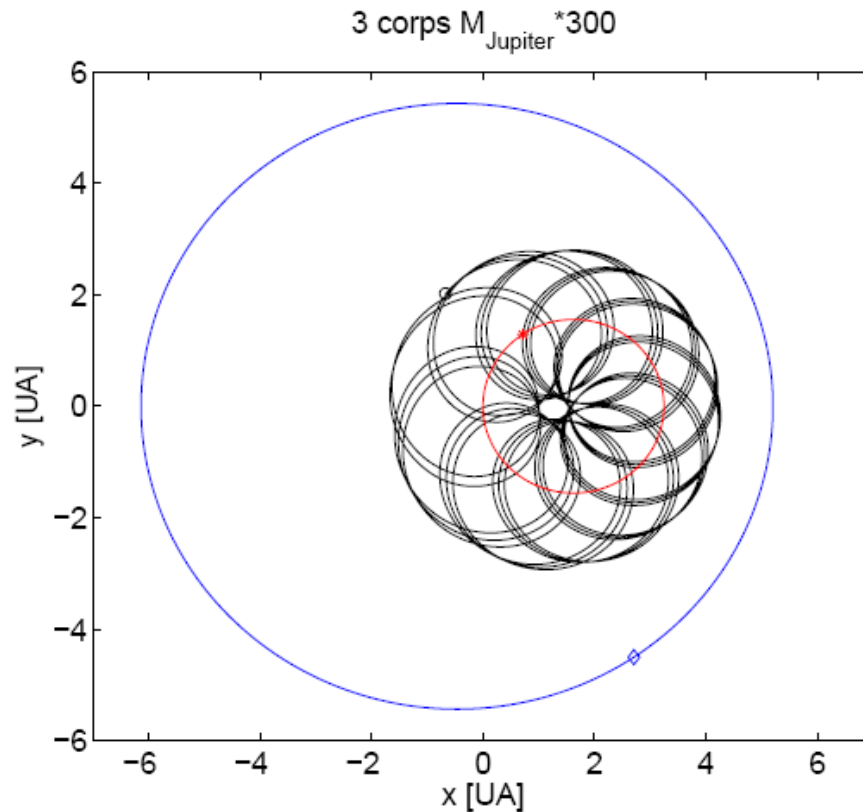
Anneaux de Saturne

- Image de la page précédente:
<http://apod.nasa.gov/apod/ap131021.html>
- Certains « gaps » sont dus à des résonances avec les orbites de certaines lunes de Saturne

3 corps: soleil, « Jupiter », terre

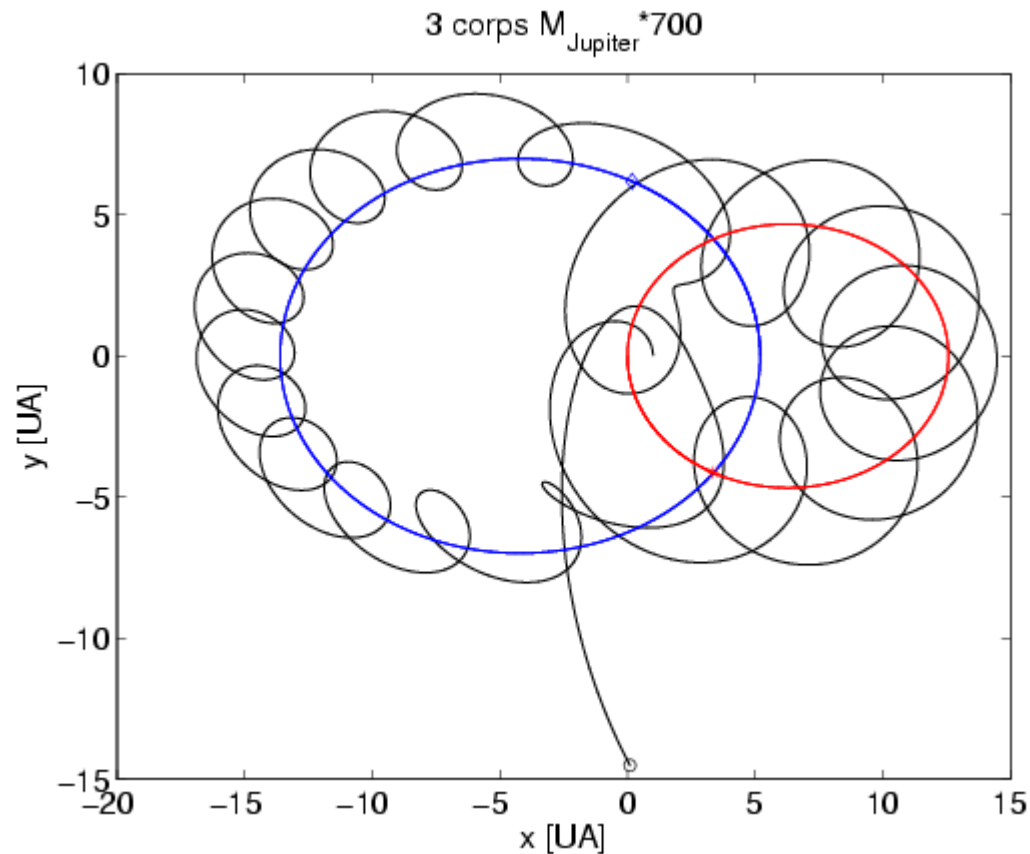
- Mvmt de la terre dans le système (soleil, « jupiter »), où *on a multiplié la masse réelle de Jupiter par un facteur arbitraire f .*
- Cf Notes de Cours, sections 2.5.1 et 2.5.2
- Simulations avec les schémas de Verlet et de Runge-Kutta 4e ordre

Jupiter*300



■ Mouvement quasi-périodique

Jupiter*700



100 ans

$\Delta t = 0.001$ an

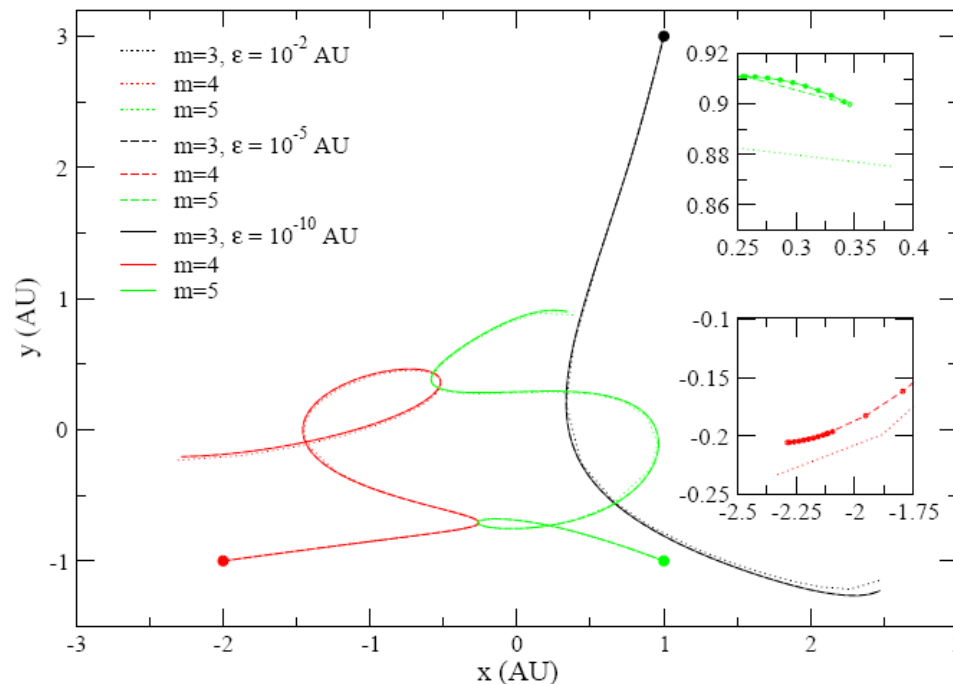
Verlet

- La terre se fait capturer par « Jupiter », puis est « éjectée »...
- Chaos: sensibilité aux conditions initiales, difficulté de convergence

Problème à 3 corps: exemples

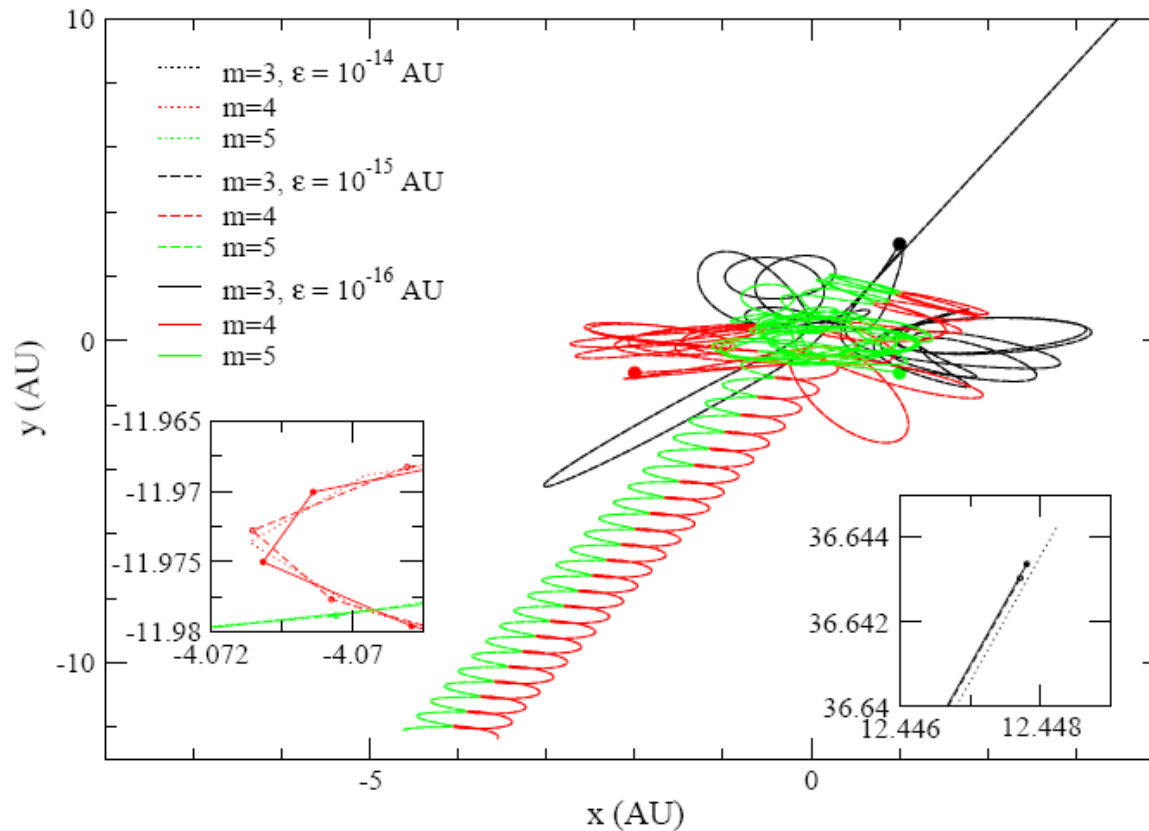
Pythagore joue au billard cosmique

- 3 corps de masses 3,4,5, placées initialement aux sommets d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3,4,5 (unités astronomiques). Les vitesses initiales sont nulles.
- Runge-Kutta ordre 4, pas variable adaptatif.



$t_{\text{fin}} = 5 \text{ ans}$

80 ans



- Quasi-collisions: problème difficile, même avec Δt adaptatif
 - Format « long double »
- Formation d'une étoile double et éjection de la troisième