

# Physique Numérique – Semaine 4

## Rappel des concepts introduits en semaine 2

- ☐ Schéma de Verlet et ses variantes
- ☐ Critère de stabilité (cas oscillateur harmonique)

## Plan de la semaine 3

- ☐ Retour sur Ex.1: convergence Euler semi-implicite d'ordre 2
  - ☐ Démonstration (simulations): convergence d'ordre 2 pour Verlet
  - ☐ Démonstration (simulations): limite de stabilité de Verlet
  - ☐ Pendule – phénomènes non linéaires
  - ☐ Sections de Poincaré
  - ☐ Chaos. Equations, expériences et simulations.
- 
- ☐ Schémas de Runge-Kutta ordre 2 et 4
  - ☐ Algorithme à pas de temps adaptatif

# Documentation

- Lecture pour la Semaine #3: Notes de cours
  - Chapitre 2, **Section 2.7.3, 2.8, 2.9, (2.10.3)**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

## 2.7.3 Stabilité du schéma de Verlet

- On montre (preuve au tableau) que le schéma de Verlet est stable pour le problème de l'oscillateur harmonique, à la condition que:

$$\omega_0 \Delta t \leq 2$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre (physique!) du système:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

N.B.: Il en est de même pour Euler-Cromer.

## 2.7.4 Extension du schéma Verlet à des forces dépendant de la vitesse et du temps

Soit le cas

$$\frac{1}{m} F(x, v, t) = a(x, v, t) = a_1(x, t) + a_2(v, t)$$

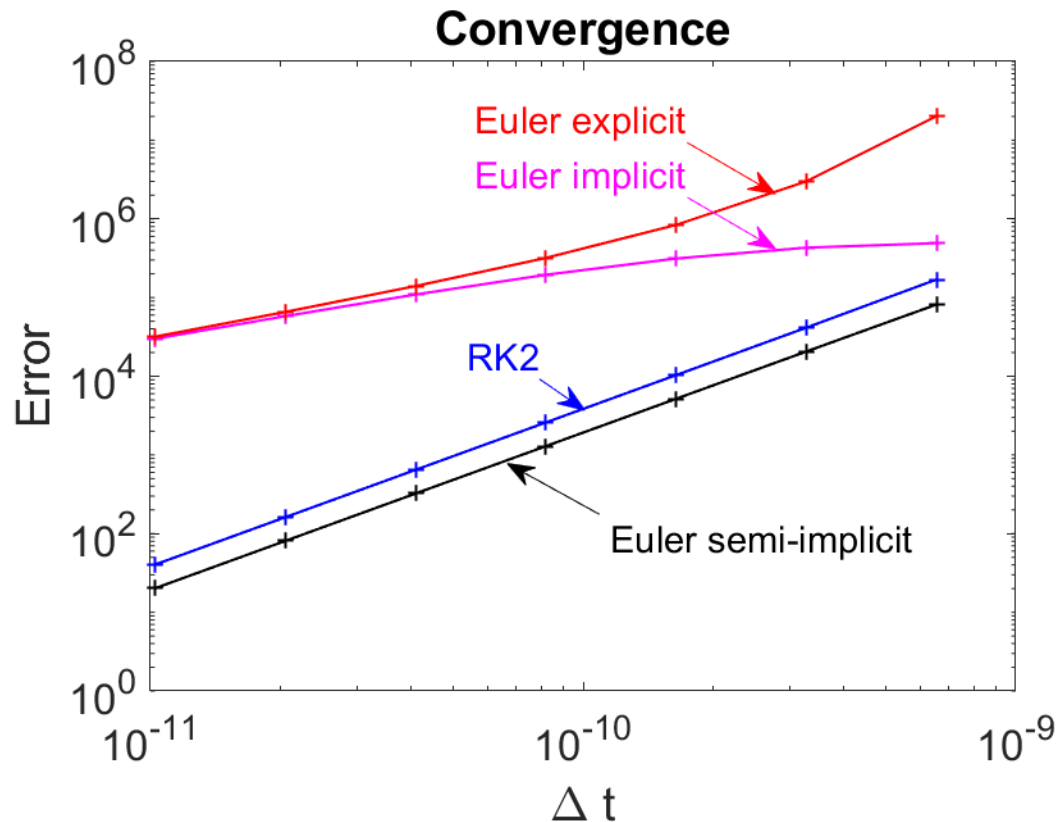
$$\boxed{x_{j+1}} = x_j + v_j \Delta t + \frac{1}{2} a(x_j, v_j, t_j) (\Delta t)^2 \quad (2.128)$$

$$\boxed{v_{j+1/2}} = v_j + \frac{1}{2} a(x_j, v_j, t_j) \Delta t \quad (2.129)$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{1}{2} (a_1(x_j, t_j) + a_1(\boxed{x_{j+1}}, t_{j+1})) \Delta t + a_2(\boxed{v_{j+1/2}}, t_{j+1/2}) \Delta t \quad (2.130)$$

# Euler semi-implicite: convergence

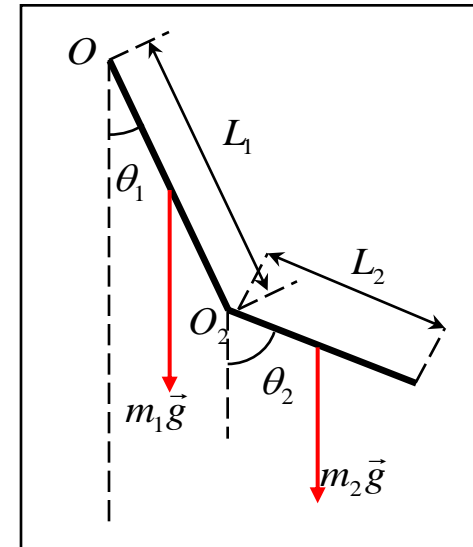
- Retour sur l'Exercice 1: pourquoi le schéma d'Euler *semi-implicite* converge à l'ordre 2 en  $\Delta t$ , alors que les schémas d'Euler explicite et implicite convergent à l'ordre 1 en  $\Delta t$  ?
- → preuve au tableau



RK2 = Runge-Kutta  
2e ordre. Notes de  
Cours section 2.8

# Pendule double articulé

Dans l'expérience montrée en classe, le pendule est constitué de deux tiges rectilignes rigides.



- Chaos dans un système conservatif (« Hamiltonien »)
  - Simulation numérique et expérience
  - Régimes périodique (petits mouvements, linéarisation des équations), multi-périodique, chaotique
  - Chaos et imprédictabilité
  - Chaos et sensibilité aux conditions initiales

# Equations du pendule double articulé

- Cas de deux tiges rigides uniformes

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \left( BD\dot{\theta}_2^2 + CD\dot{\theta}_1^2 + CF - BE \right) / (AB - C^2) \\ \left( -AD\dot{\theta}_1^2 - CD\dot{\theta}_2^2 + CE - AF \right) / (AB - C^2) \end{pmatrix}$$

$$A = (m_1/2 + m_2)L_1^2$$

$$B = m_2 L_2^2 / 3$$

$$C = (m_2/2)L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

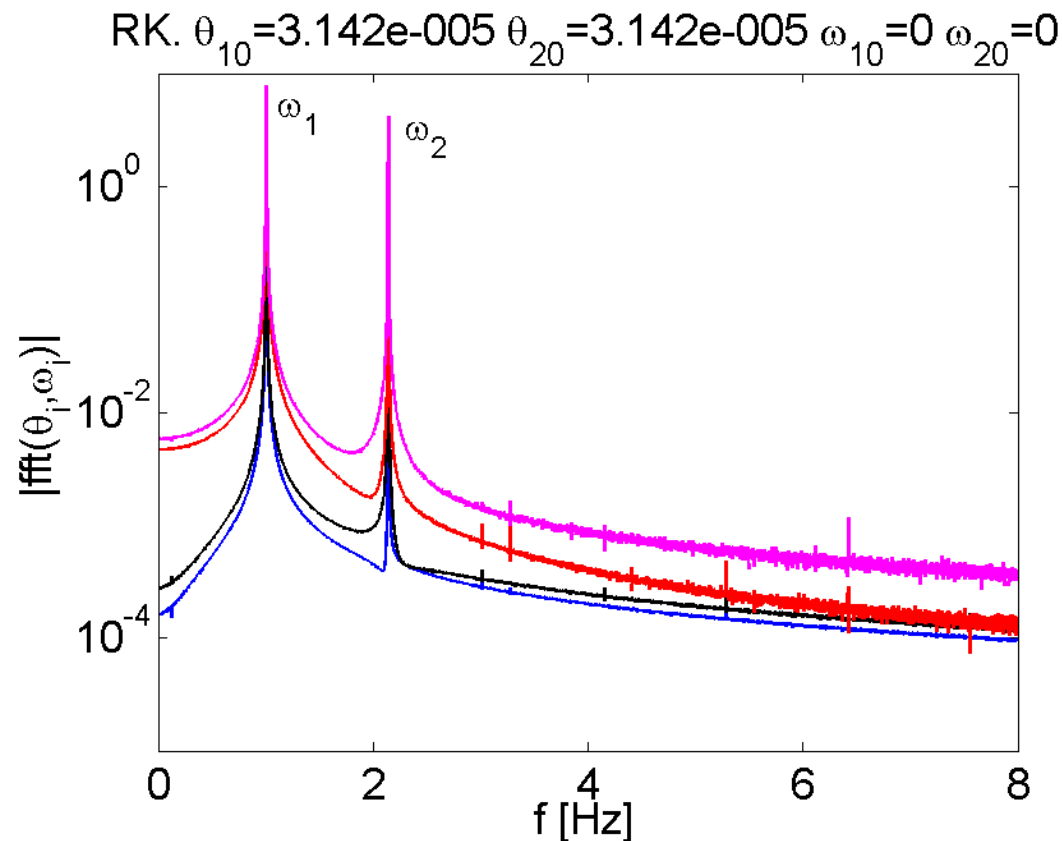
$$D = (m_2/2)L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$E = (m_1/2 + m_2)L_1 g \sin \theta_1$$

$$F = (m_2/2)L_2 g \sin \theta_2$$

- Ne sont pas sous une forme symplectique!

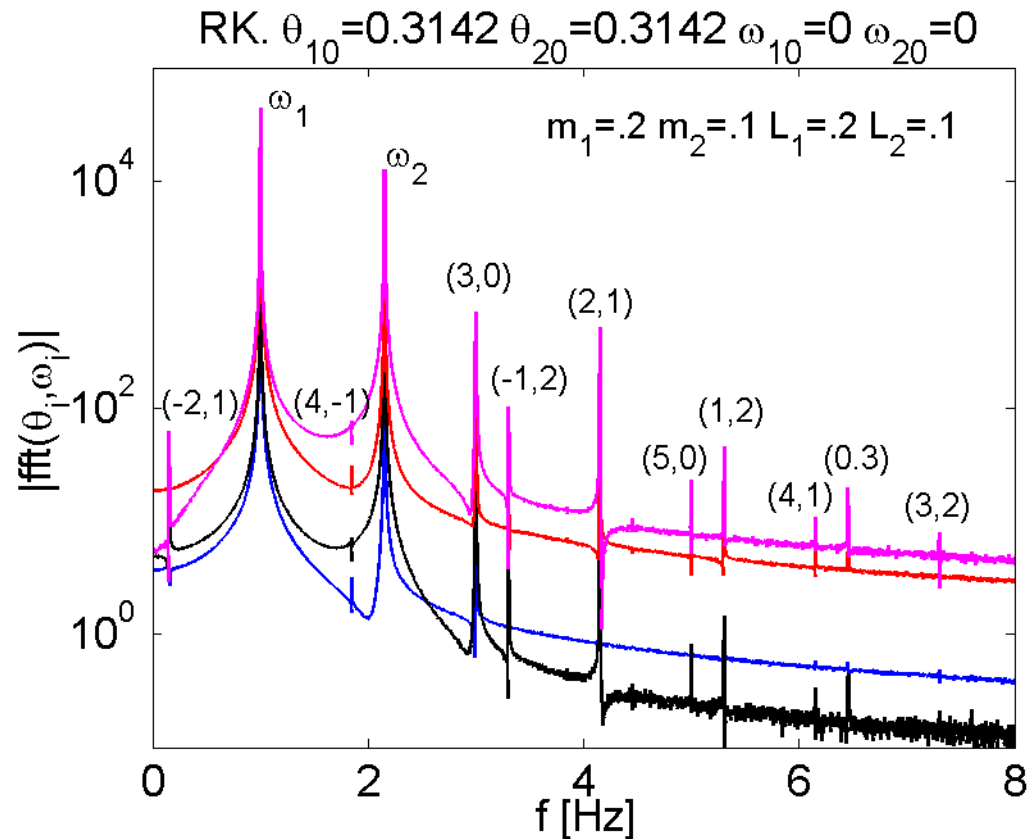
# Pendule double - simulations $m_1=2$ $m_2=1$ , $L_1=.2$ $L_2=.1$



Faible amplitude (petits mouvements): le mouvement est une superposition des deux modes propres linéaires. L'analyse spectrale des signaux montre la présence des deux fréquences propres.

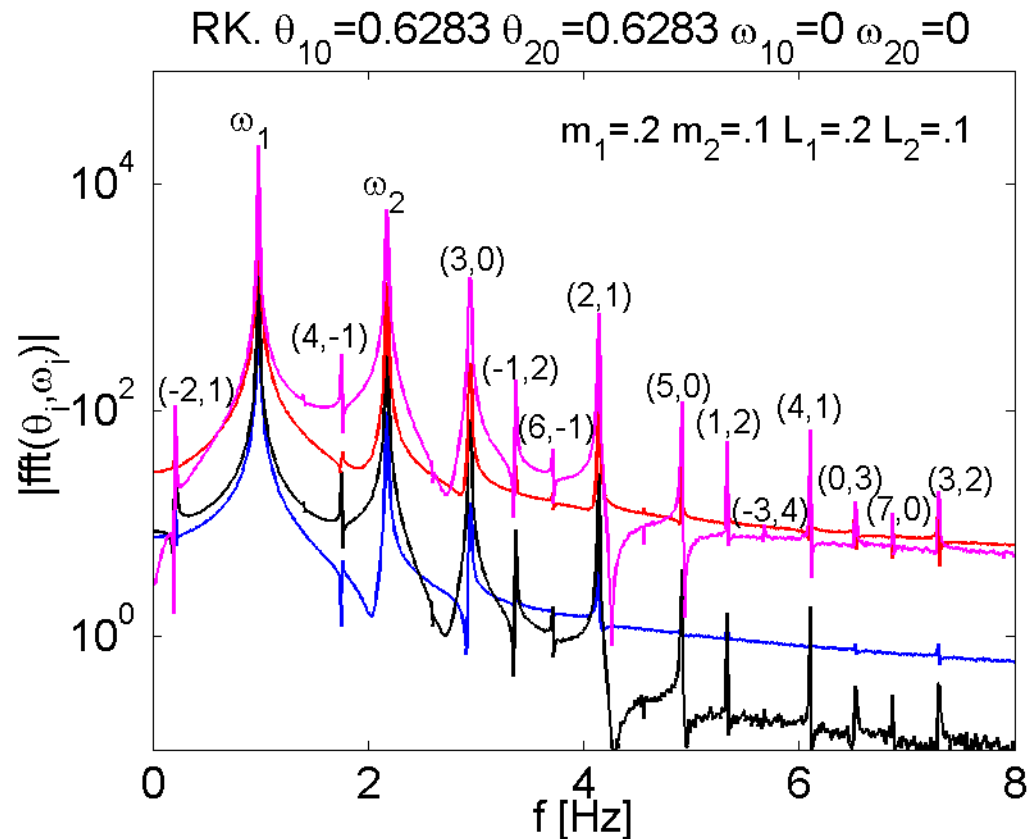


# Pendule double - simulations



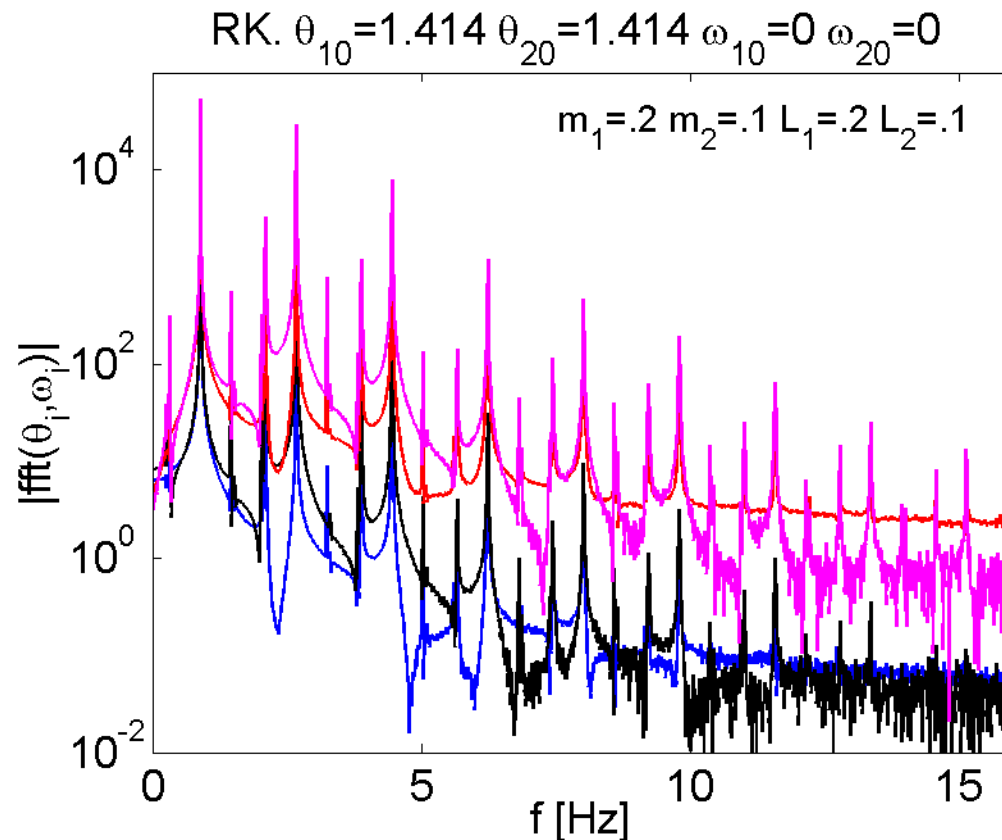
Pour une amplitude plus grande ( $\pi/10$ ), le spectre montre de multiples fréquences. Les fréquences présentes sont  $m\omega_1 + n\omega_2$ , avec  $|m| + |n| = 1, 3, 5, \dots$

# Pendule double - simulations



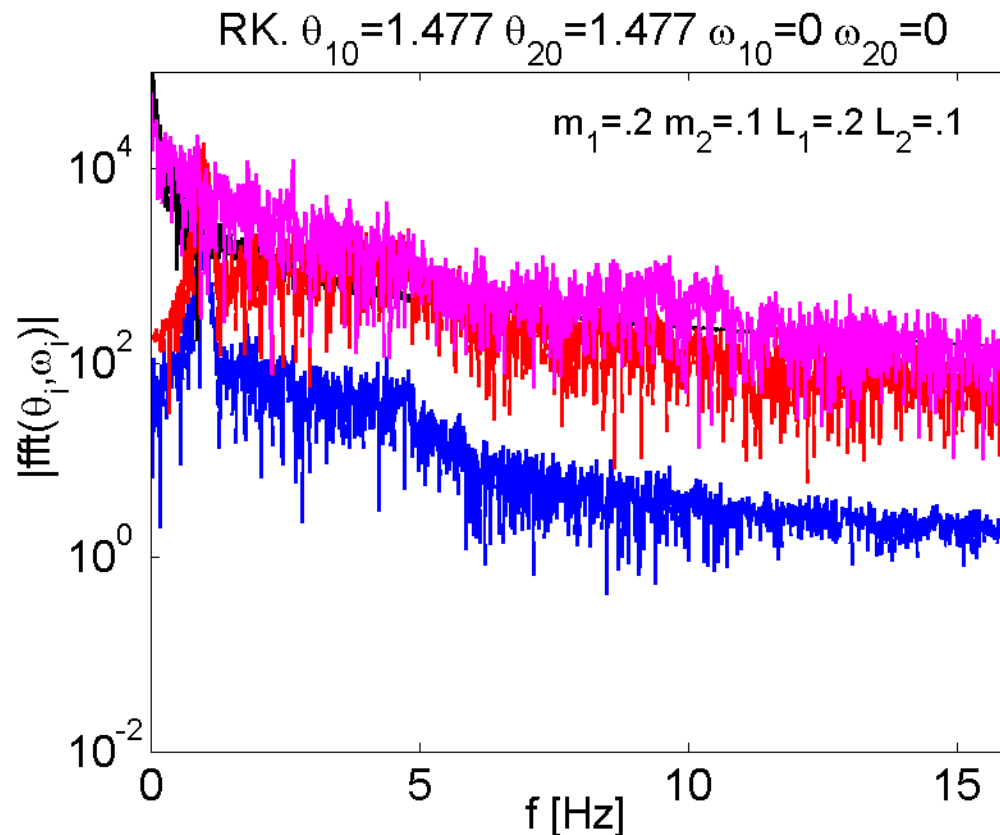
Amplitude  $2\pi/10$ . Frequences observées  $m\omega_1+n\omega_2$ , avec  $|m|+|n|=1,3,5,7,\dots$

# Pendule double - simulations



Amplitude  $0.45 \pi$  . Une forêt de pics...

# Pendule double - simulations

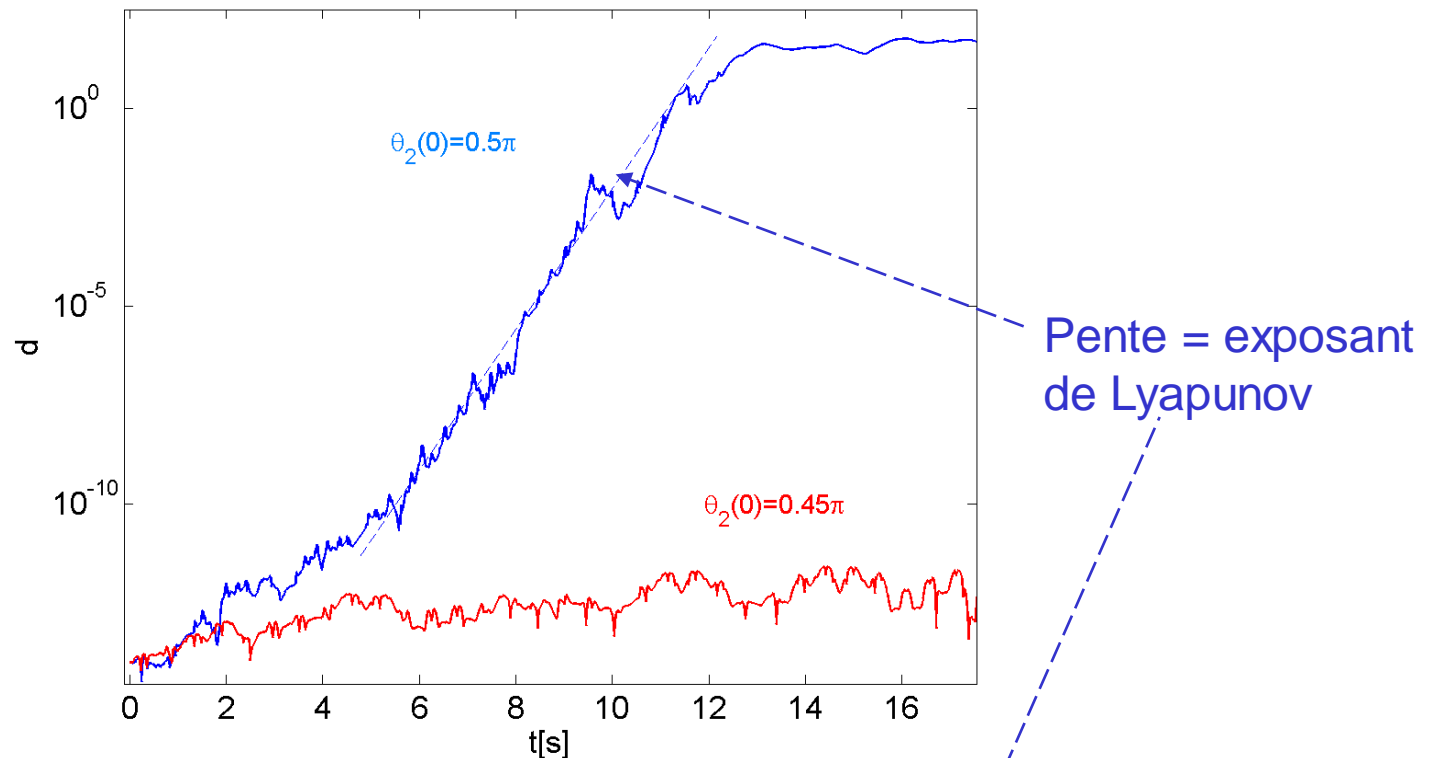


Amplitude à peine encore un peu plus élevée ( $0.47 \pi$ ): CHAOS! Plus de structure fréquentielle (« bruit »)!

# « Signature » du chaos

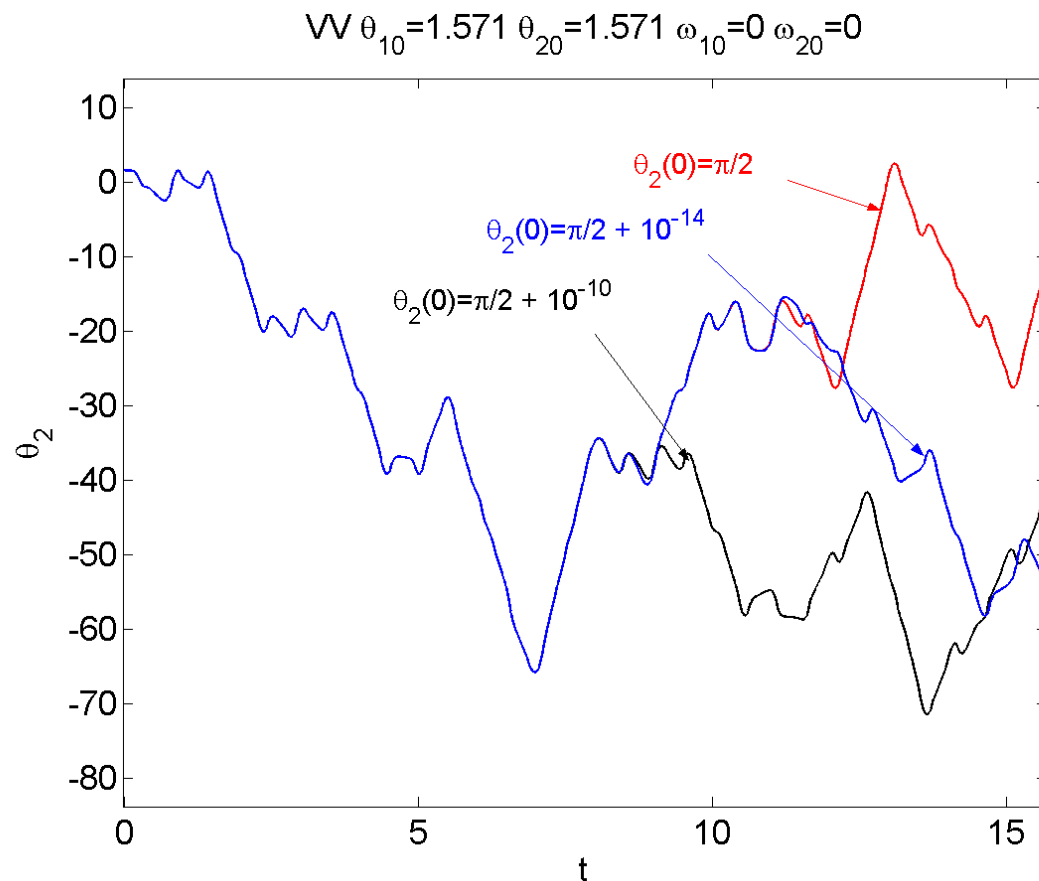
- Sensibilité extrême aux conditions initiales:
  - Soit deux conditions initiales différentes. Le mouvement est dit chaotique si, aussi ***petite*** que soit la différence entre les deux conditions initiales, il y a un ***temps  $t$  fini*** au-delà duquel les orbites respectives des deux mouvements ***s'écartent exponentiellement*** l'une de l'autre. L'exposant de l'exponentielle est appelé exposant de Lyapounov.

# Sensibilité aux conditions initiales



- Distance entre 2 orbites
- Régime chaotique : divergence exponentielle
- Régime non chaotique: pas de divergence exponentielle

# Chaos et imprédictabilité



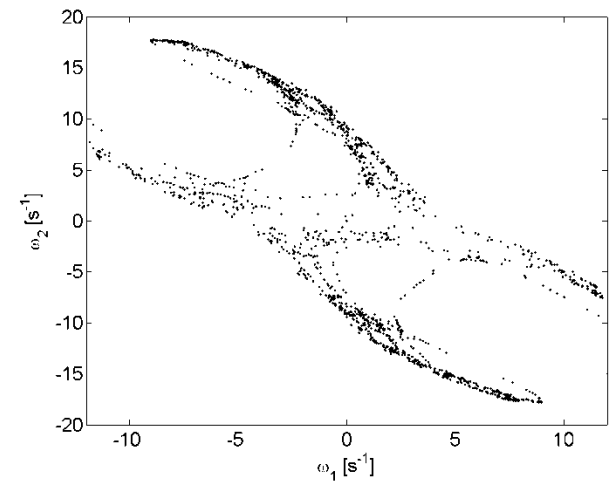
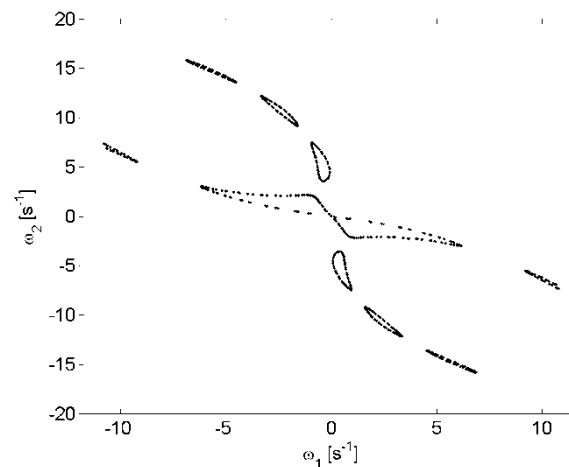
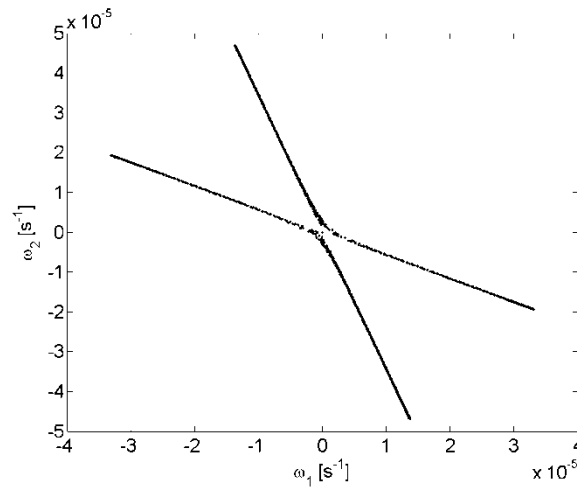
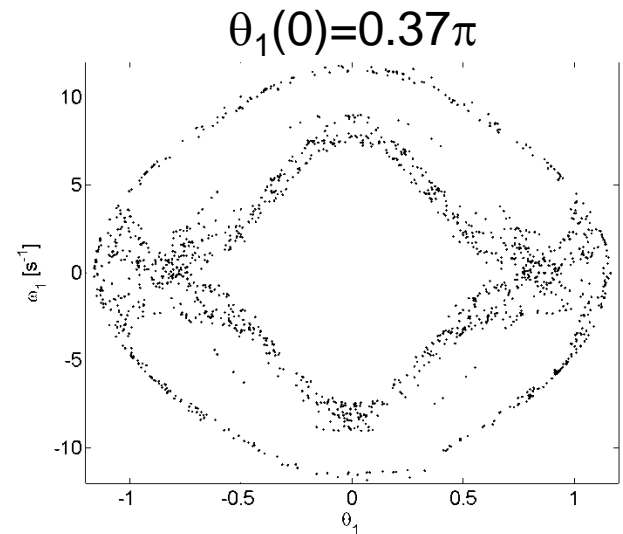
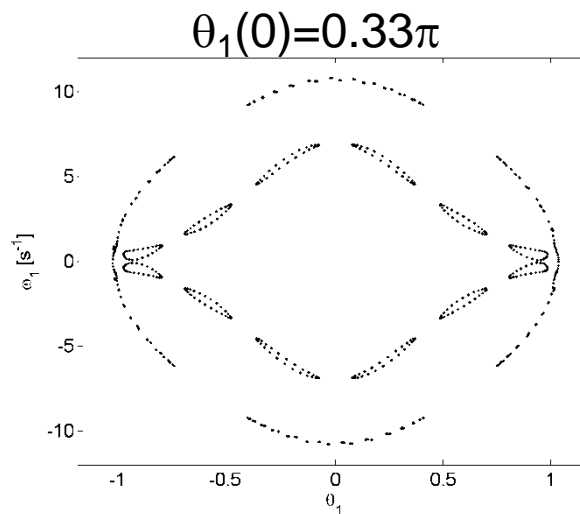
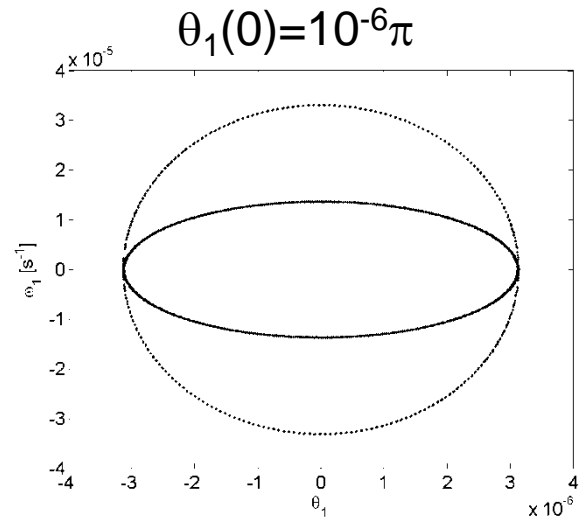
- $10^{-10}$ : taille atome,  $10^{-14}$ : taille 10 noyaux atomiques!

# Sections de Poincaré

- Longues simulations
- Représentation de toute l'orbite: pas toujours informative (l'espace de phase est 4D dans le cas du pendule articulé)
- Une Section de Poincaré est une intersection de l'orbite avec une surface de l'espace de phase
- Par exemple  $\{(\theta_1, \omega_1, \omega_2)(t_i) \mid \theta_2(t_i)=0\}$



# Sections de Poincaré – pendule double



Petits mouvements

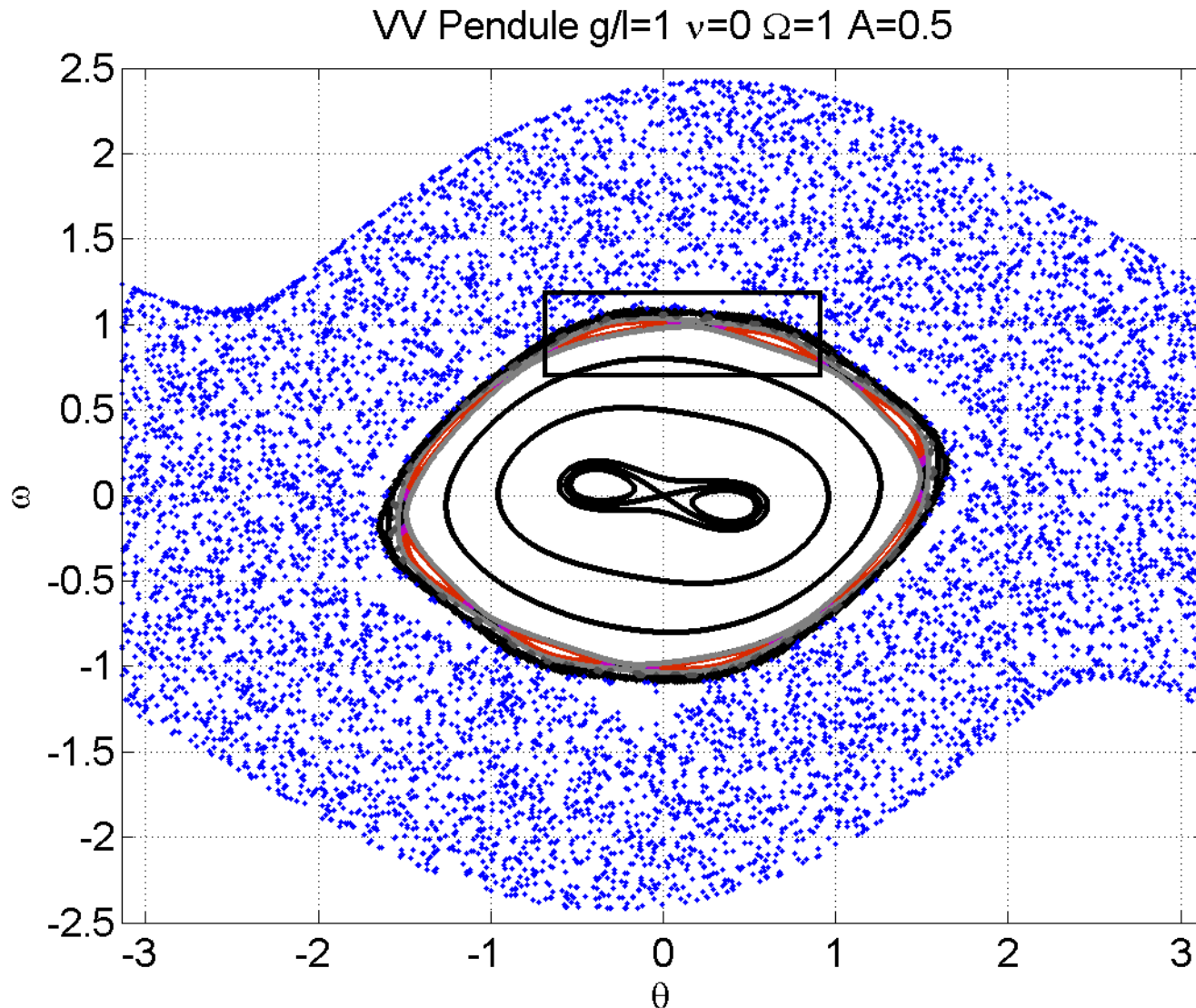
Multi-périodique

Chaotique

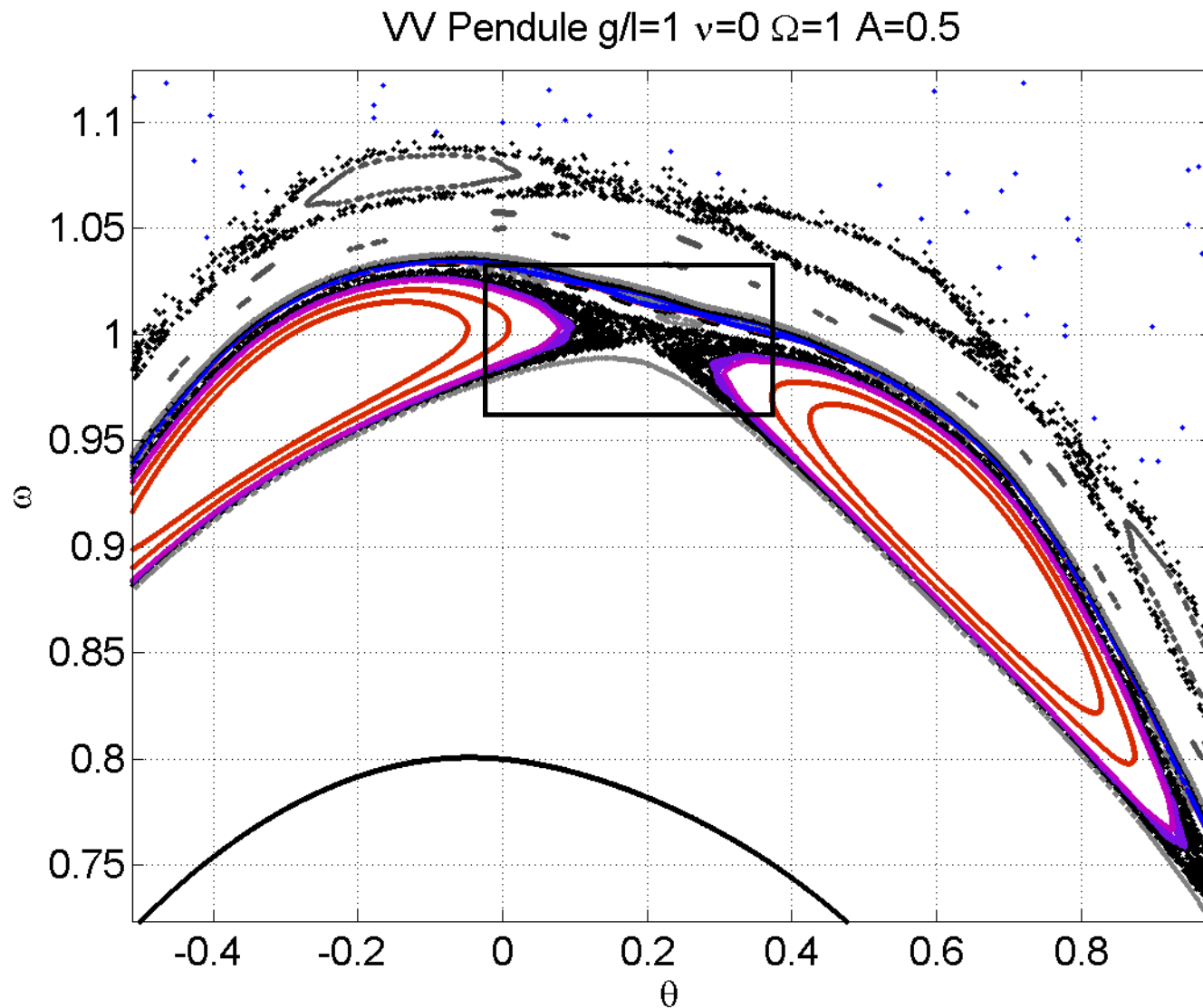
# Sections de Poincaré – pendule excité

- Excitation par une perturbation sinusoïdale (point d'attache mobile, ou couple appliqué)
- -> Expérience: pendule avec point d'attache en mvmt circulaire
- Section de Poincaré: on représente une projection dans un plan de l'espace de phase, p.ex. (angle, vitesse angulaire) pour l'Ex.3, à chaque période de l'excitation. → Illustration au tableau
  - Hint: prenez  $\Delta t = (2\pi/\Omega)/n_{\text{per}}$ ,  $n_{\text{per}}$ =nombre de pas de temps par période, et mettez `sampling=nper` en input du code: l'output contiendra ainsi directement les coordonnées des sections de Poincaré.
- Cas sans amortissement: chaque condition initiale produit une section de Poincaré différente. L'ensemble des sections de Poincaré présente une topologie de surfaces imbriquées, de chaînes d'îlots, et de régions stochastiques signalant la présence de chaos.

# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale

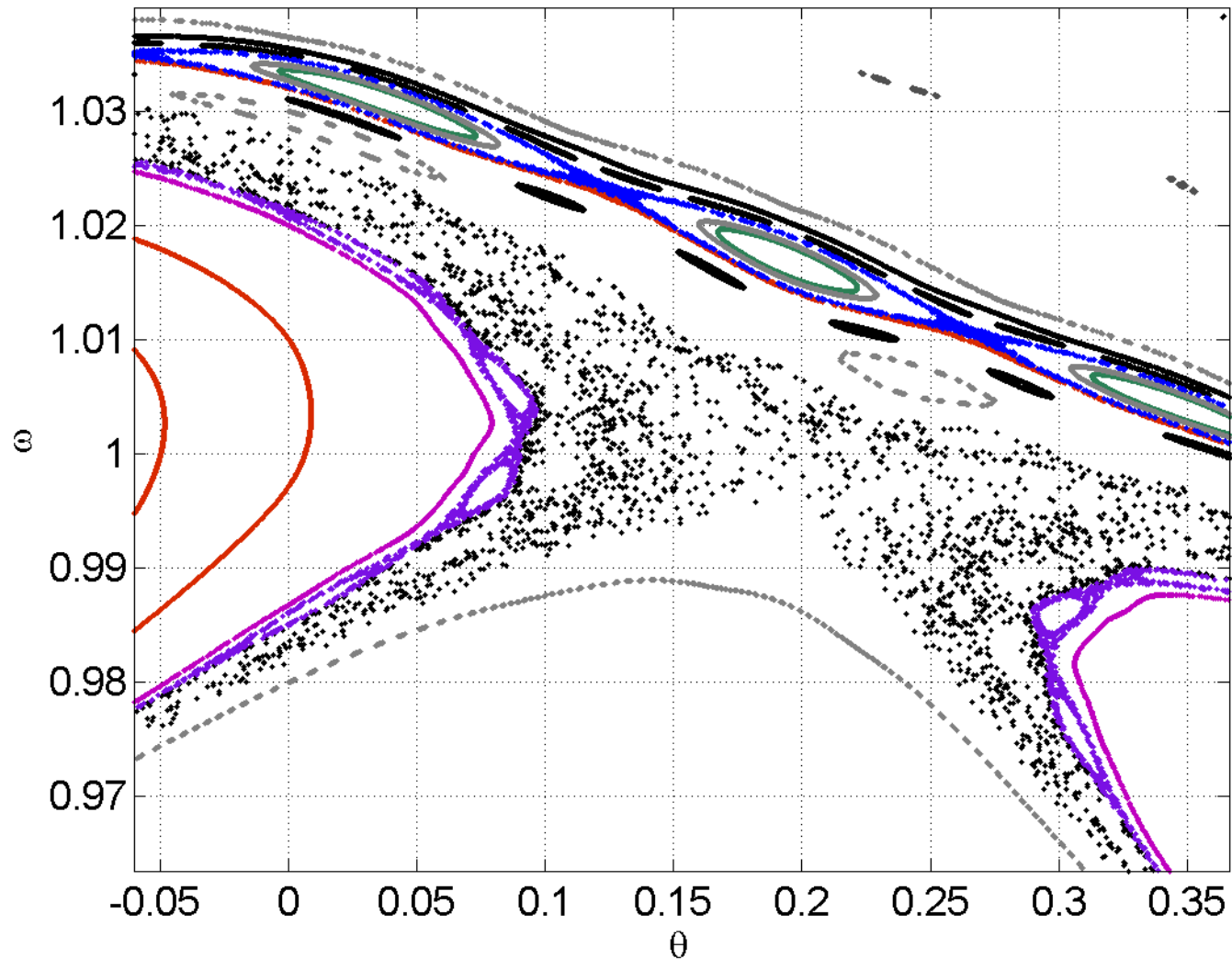


# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale zoom



# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale zoom

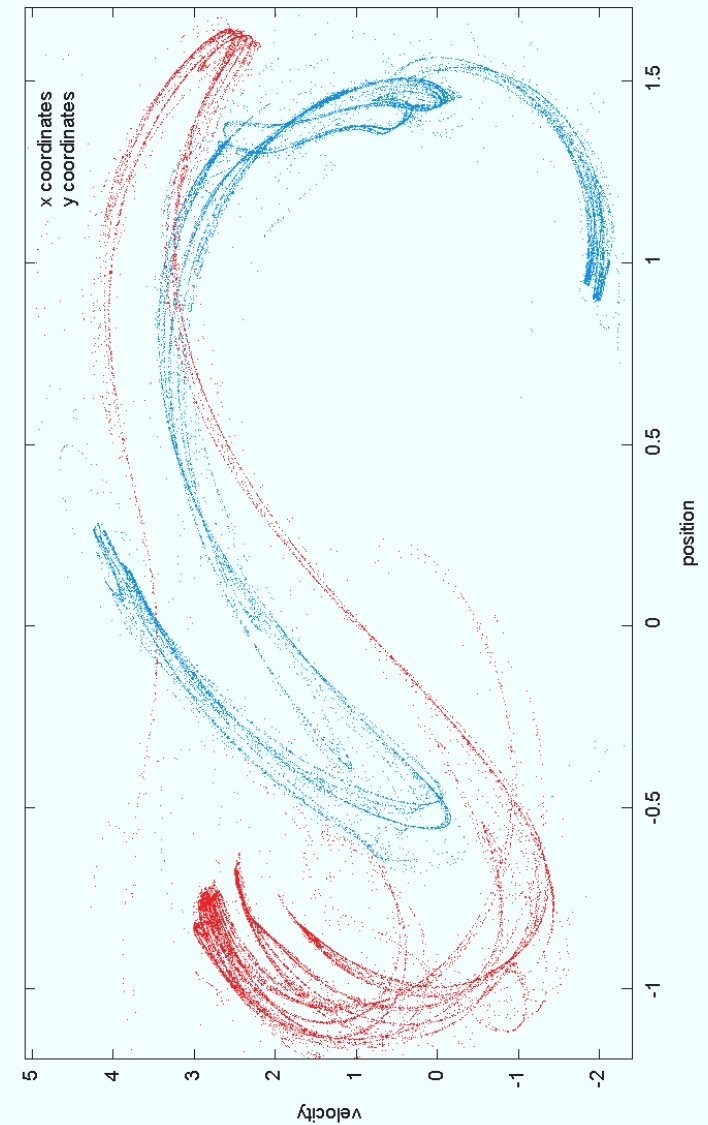
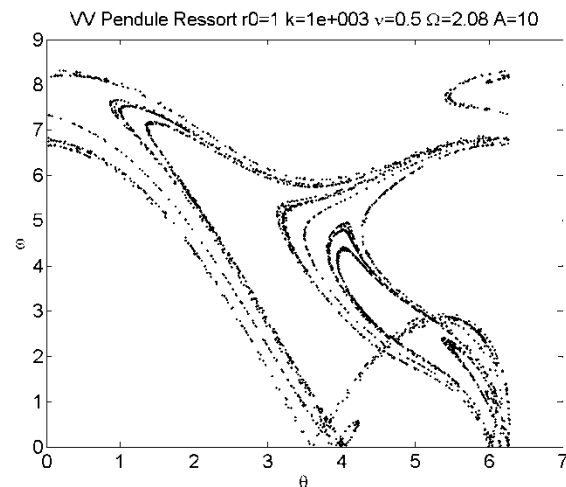
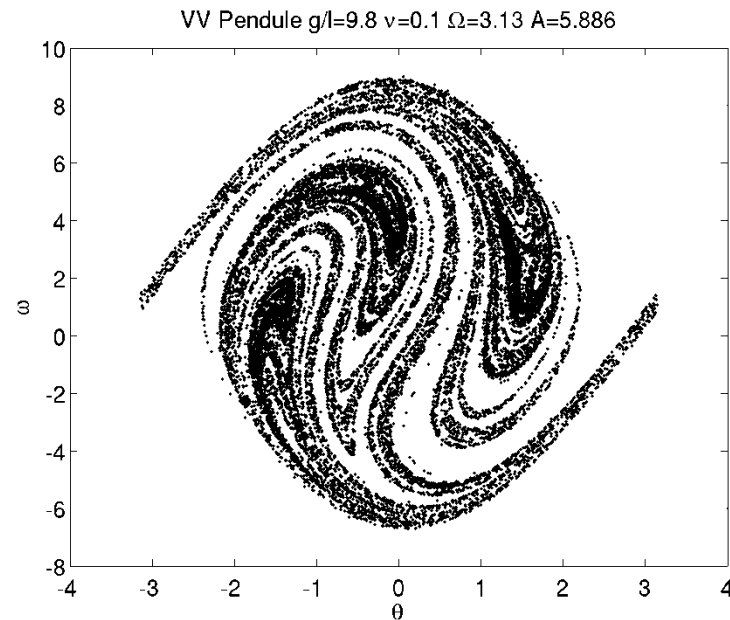
VV Pendule  $g/l=1$   $\nu=0$   $\Omega=1$   $A=0.5$



# Pendule excité *et* amorti - attracteurs

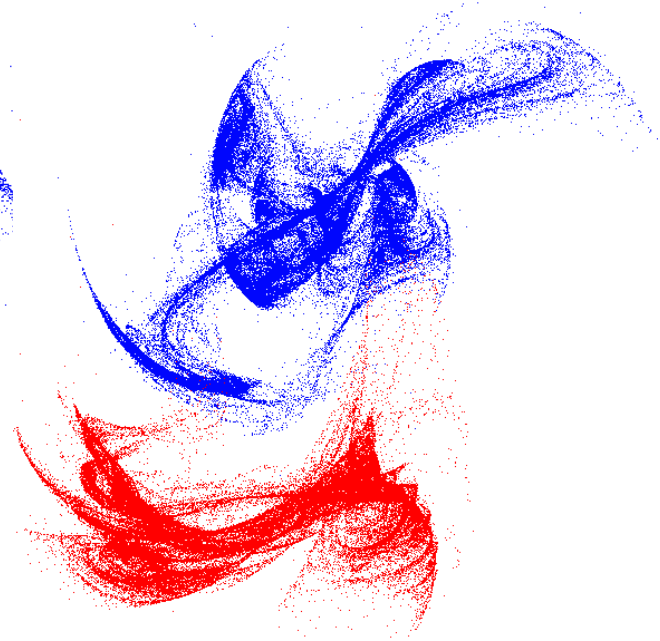
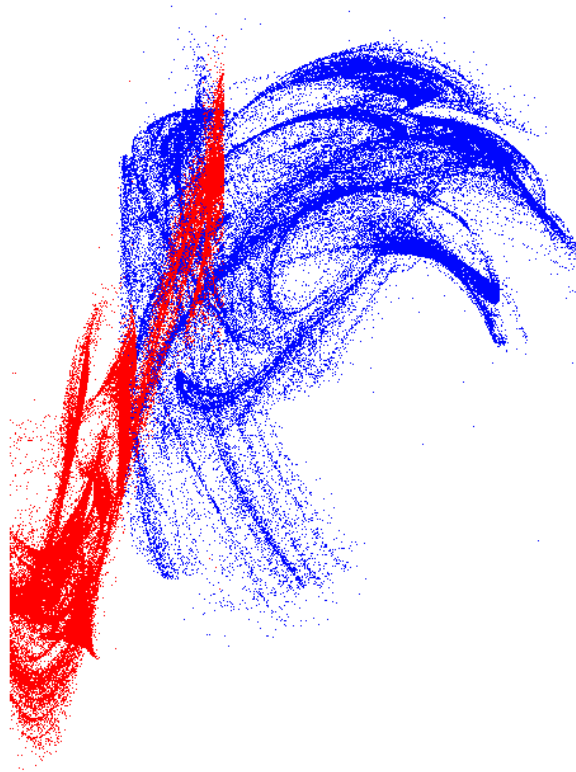
- Section de Poincaré: on représente une projection dans un plan de l'espace de phase des positions à chaque période de l'excitation.
- Attracteur: toute condition initiale (dans un domaine appelé « bassin d'attraction ») conduit à une section de Poincaré de structure similaire.
- **Attracteur** « étrange »: cas **chaotique**.
  - L'«étrangeté» vient du fait que (1) des conditions initiales même infinitésimalement voisines conduisent en un temps relativement *court* à des orbites qui divergent exponentiellement l'une de l'autre; (2) des conditions initiales même très éloignées l'une de l'autre conduisent au même attracteur pour des temps *longs*.

# Galerie d'attracteurs étranges





# Galerie (suite)





# Simulation numérique de systèmes en régime chaotique

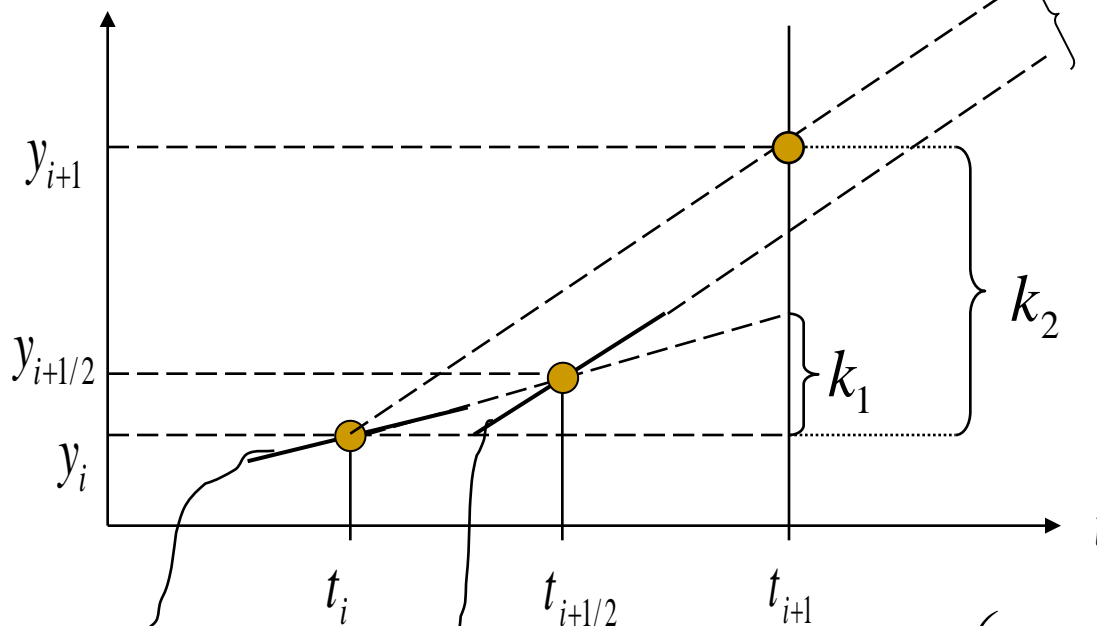
- La sensibilité extrême aux conditions initiales, avec divergence  $\sim \exp(\lambda t)$  conduit à ***l'impossibilité de converger numériquement la solution pour des temps  $t > \sim 1/\lambda$***
- Cependant:
  - La structure de l'espace de phase (p.ex. l'étendue de la zone stochastique et/ou la forme de l'attracteur étrange) converge numériquement

# Runge-Kutta d'ordre 2 (2.8)

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_{i+1/2}\right)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y_i, t_i) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y_i + 0.5k_1, t_i + 0.5\Delta t\right) \\ y_{i+1} &= y_i + k_2 \end{aligned}$$

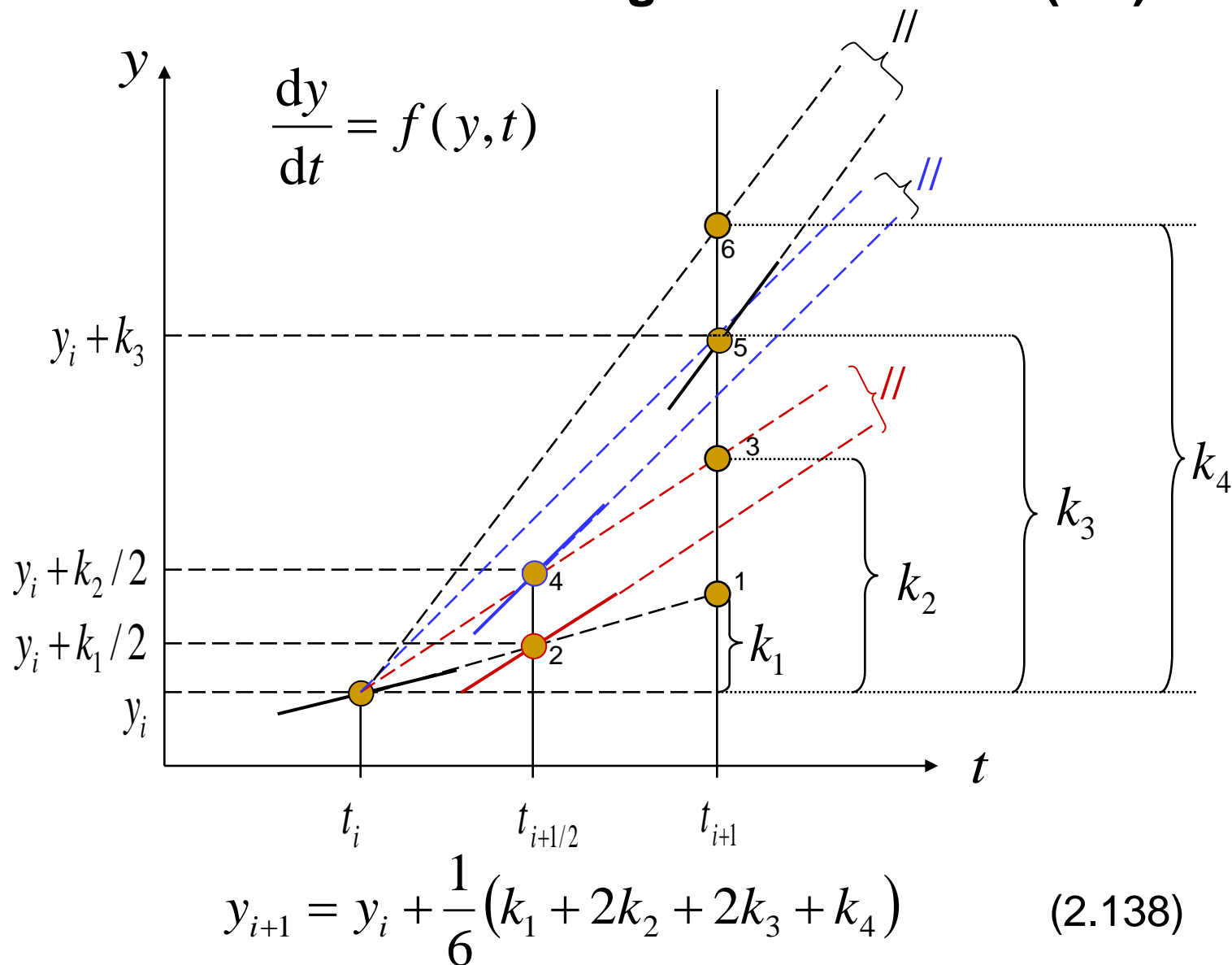


Runge-Kutta ordre 2

Voir les Notes de Cours,  
pour une généralisation

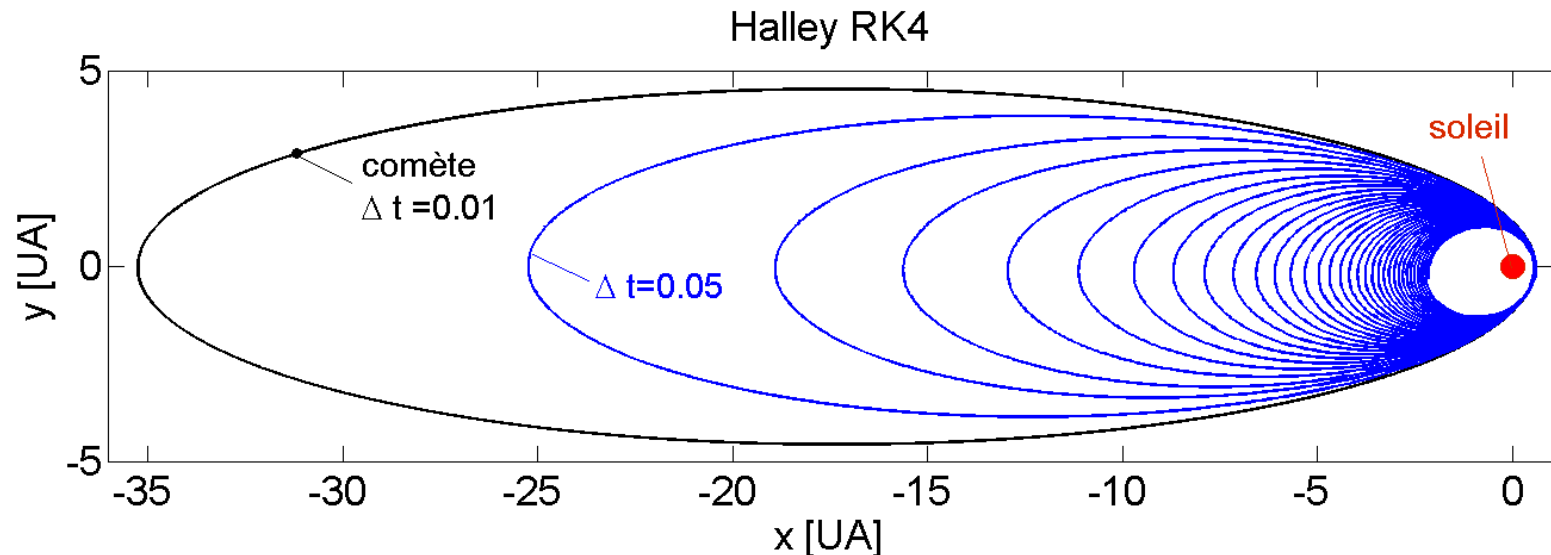
$$\text{pente } f(y_i, t_i) \quad \text{pente } f(y_{i+1/2}, t_{i+1/2}) = f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_{i+1/2}\right)$$

# Pour l'Exercice 3: Runge-Kutta ordre 4 (2.8)



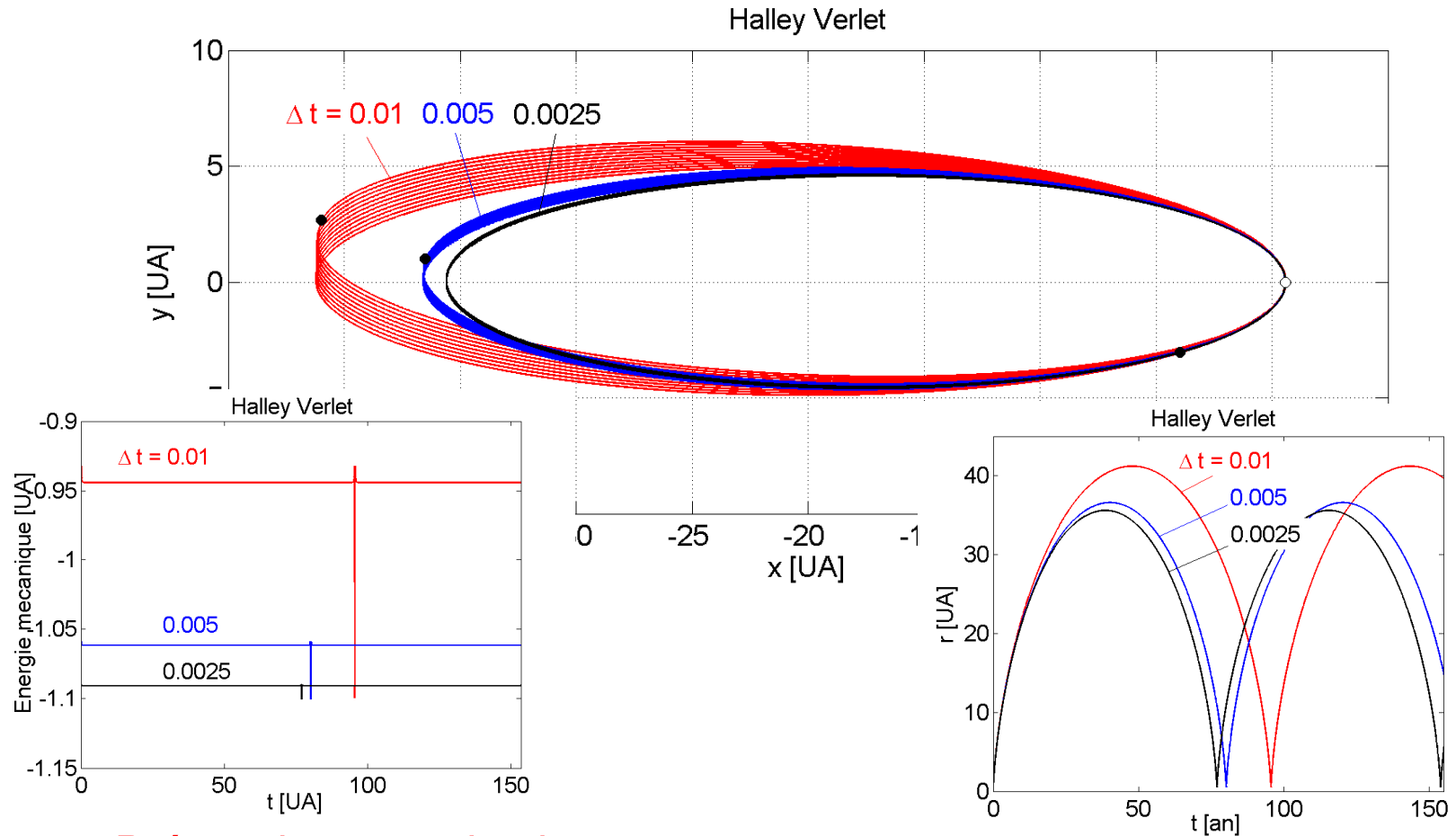
# Gravitation - 1 corps

- Comète de Halley
- Orbite elliptique fortement excentrique  
 $r_{\max}/r_{\min}=59.6$ .  $T=75.986$  ans
- Unités astronomiques (UA):
  - Demi grand axe orbite terre (150 mio km)



Intégration numérique avec Runge-Kutta d'ordre 4 et pas temporel  $\Delta t$  constant

# Halley, Verlet, 1000 ans

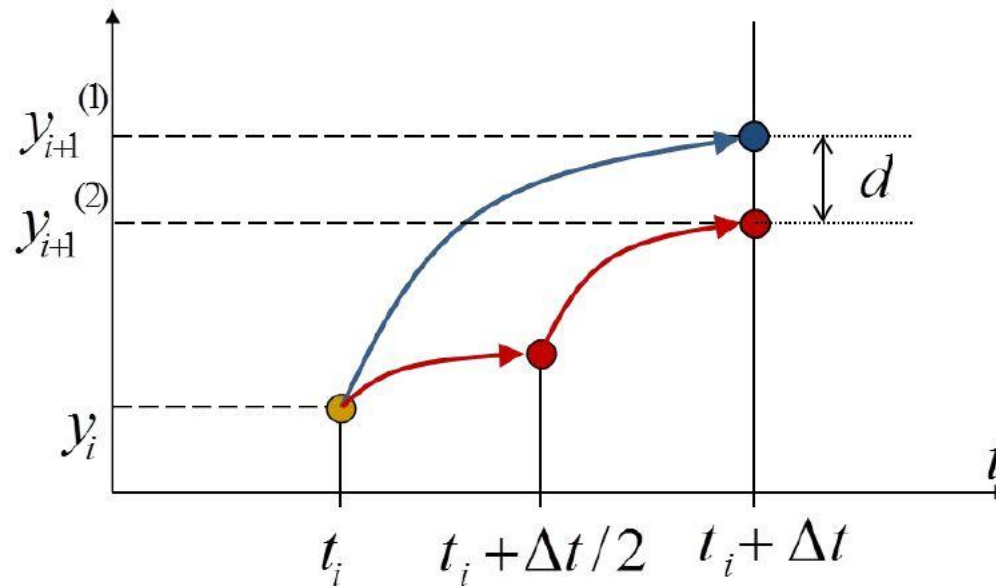


- **Précession non physique.**
- Bonne conservation de Emec en moyenne sur de longs temps.  
**Mauvaise lorsque  $r=r_{\min}$ , (accélération maximale).**
- La période obtenue converge en  $\Delta t^2$ , mais pas très grande précision.

# Schémas à pas de temps adaptatif

- On a constaté que l'erreur était importante aux instants où le corps est fortement accéléré
- Raffiner le  $\Delta t$  à ces instants, augmenter  $\Delta t$  autrement... comment faire ceci avant de connaître la solution?
- Algorithme de  $\Delta t$  adaptatif: à chaque pas de temps, comparer les résultats obtenus après
  - a) 1 pas de  $\Delta t$
  - b) 2 pas de  $\Delta t/2$
- En supposant une loi de convergence pour l'algorithme de base utilisé, on peut en déduire quel  $\Delta t$  choisir, i.e. **contrôler** l'algorithme.  
**(développements au tableau)**

# Schéma à pas de temps adaptatif



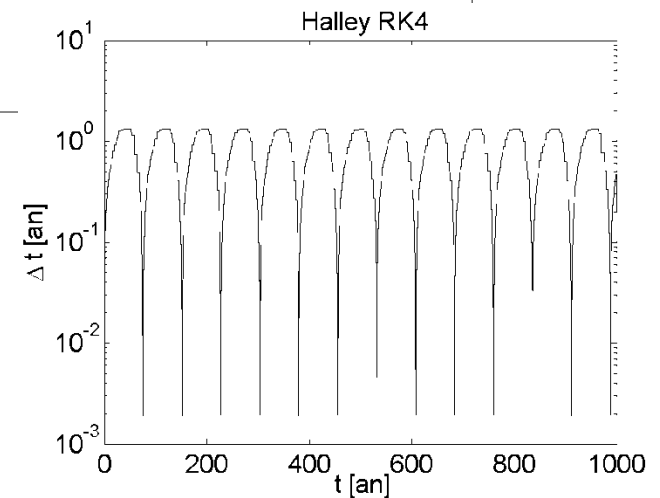
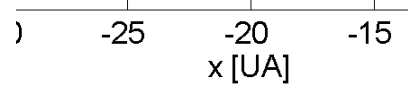
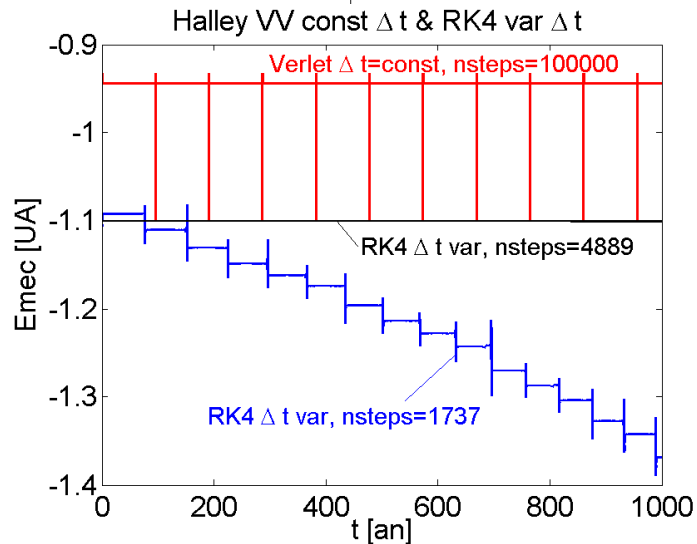
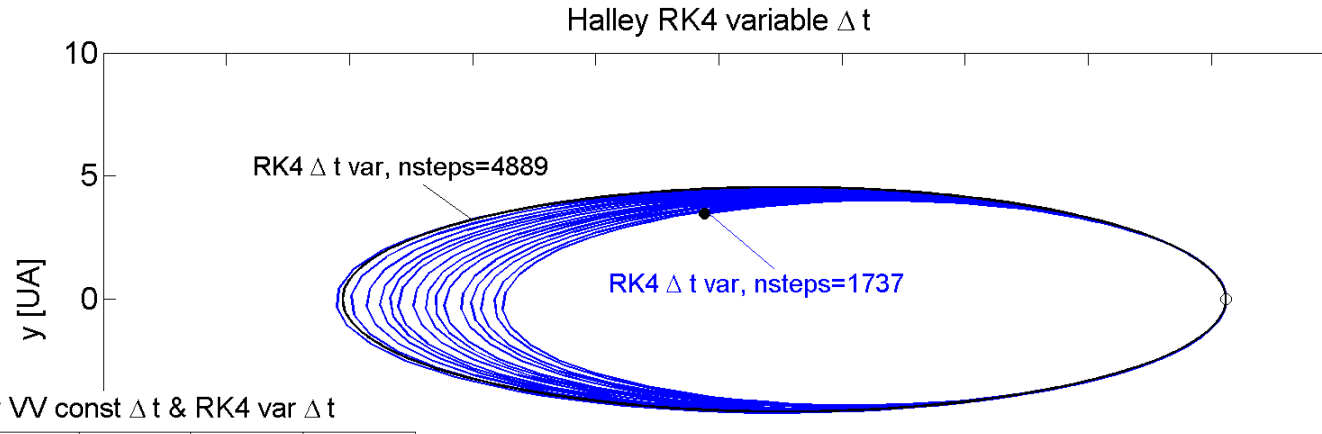
Chacune des flèches symbolise un pas complet d'un algorithme de base: par exemple les 4 étapes d'un schema Runge-Kutta du 4e ordre.

On veut choisir  $\Delta t$  de telle sorte que  $d$  soit inférieur à une valeur donnée  $\varepsilon$

$$d < \varepsilon$$

$\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre de **contrôle** de l'algorithme, et n'est PAS la précision obtenue sur  $y$  à la fin de la simulation. Cette dernière doit être obtenue par une étude de convergence:  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

# Halley, Runge-Kutta 4e ordre, $\Delta t$ variable



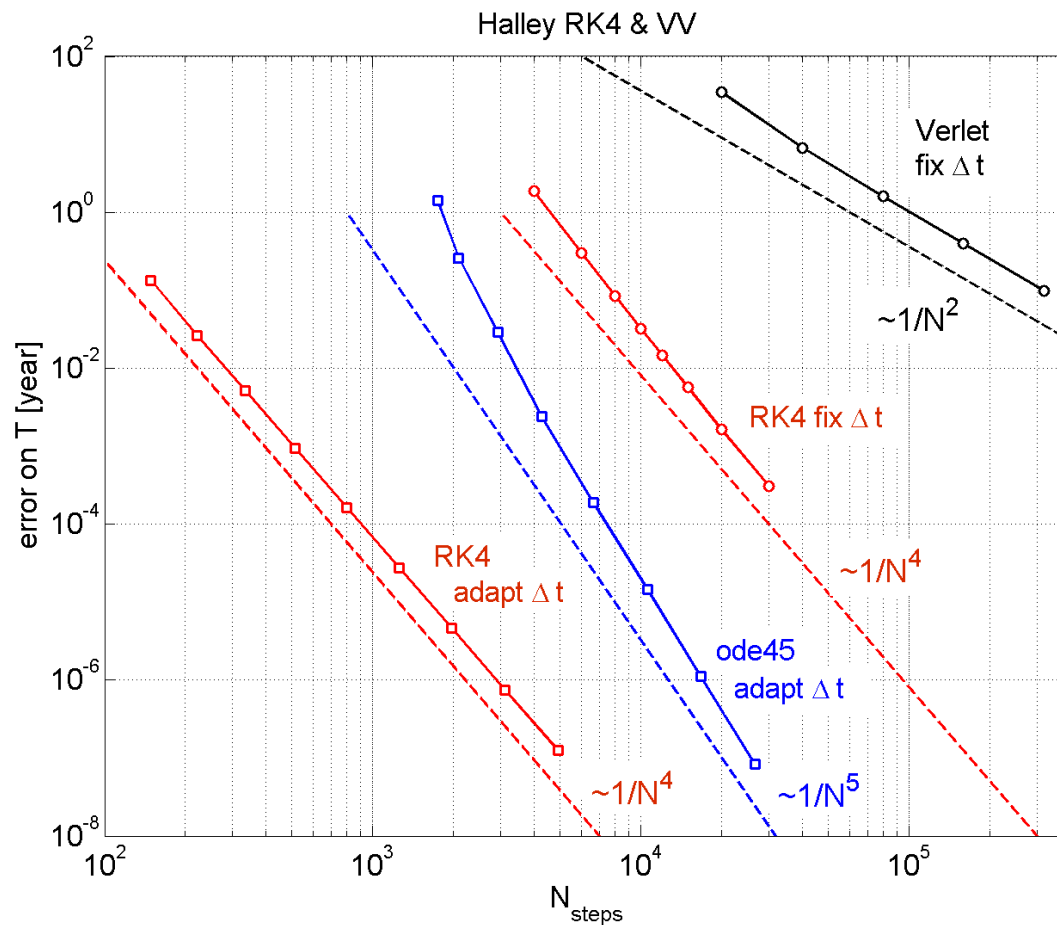
Runge-Kutta a une tendance à long terme de diminuer  $E_{\text{mec}}$

Le pas  $\Delta t$  variable permet une très grande efficacité

Convergence très rapide



# Halley, Verlet, Runge-Kutta 4, $\Delta t$ fixe ou variable, convergence de la période



Pour 5000 pas de temps, on est 10 millions de fois plus précis avec le schéma adaptatif qu'avec  $\Delta t$  fixe!

# En résumé:

- Verlet conserve bien  $E_{\text{mec}}$  *en moyenne sur de longues périodes*, mais donne une **précession non physique**.
- Runge-Kutta 4e ordre: converge très rapidement la période, la distance maximale, etc, mais **diminution séculaire non physique de  $E_{\text{mec}}$**
- **Un algorithme à pas  $\Delta t$  adaptatif est de plusieurs ordres de grandeur plus efficace qu'à  $\Delta t$  fixe.**