

# Physique Numérique – Semaine 3

## Rappel des concepts introduits en semaine 2

- Cas de l'oscillateur harmonique
- Analyse de stabilité de Von Neumann: croissance / décroissance de l'erreur
- Solution analytique du schéma d'Euler explicite

## Plan de la semaine 3

- Suite de l'analyse de stabilité: croissance / décroissance de l'énergie mécanique
- Schémas symplectiques: Euler-Cromer, Verlet
- Exercice 3: pendule de longueur variable – phénomènes non linéaires

# Documentation

- Lecture pour la Semaine #3: Notes de cours
  - Chapitre 2, section 2.4.4, **Section 2.7**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

# Rappel semaine 5

## ■ 2.4 Oscillations - Analyses de stabilité numérique

Propagation de l'erreur  $e_n$

Oscillation, (dé)croissance?

Propriétés de conservation

Matrice de gain  $G$

$$y_{num} = Ae^{i\omega t}$$

$$E_{mec} = const$$

Valeurs propres  $\lambda_i$

$$\omega = \omega_r + i\gamma$$

oscillant      exponentiel

$$E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + ??$$

Stable si

$$|\lambda_i| \leq 1$$

$$\gamma \geq 0$$

$$\frac{\Delta E_{mec}^{(num)}}{\Delta t} \leq 0$$

Section 2.4.2 – Von Neumann

Section 2.4.3

Section 2.4.4

## 2.4.3 Stabilité. Oscillations, (dé)croissance exponentielle. Sol. Analytique des Eqs. Discrètes.

$$y_n = \Re e\{Ae^{i\omega t_n}\} = \Re e\{Ae^{i\sqrt{k/m}t_n}e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n}\}$$

$$y_n = e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n} |A| \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t_n + \varphi\right)$$

**Amplitude augmentant exponentiellement dans le temps**

**Taux de croissance proportionnel à  $\Delta t$**

En posant  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  = fréquence propre

$$e^{(\omega_0 \Delta t)^2 (\frac{t_n}{\Delta t})/2} = e^{\omega_0 \Delta t^2 n/2}$$

**Paramètre crucial**

## 2.4.4 Euler expl. osc. harmo. Conservation $E_{mec}$ 1

Analytiquement:  $E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$

Numériquement:

$$\begin{aligned} E_{mec,n+1} &= \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}kx_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_n - \frac{k}{m}x_n\Delta t\right)^2 + \frac{1}{2}k(x_n + v_n\Delta t)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2 - v_n k x_n \Delta t + k x_n v_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{k^2}{m} x_n^2 \Delta t^2 + \frac{1}{2} k v_n^2 \Delta t^2 \end{aligned}$$

$$E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + \left( \frac{k}{m} E_{mec,n} \Delta t \right) \Delta t \quad (*)$$

$$E_{mec,n+1} > E_{mec,n} \quad \forall \Delta t$$

L'énergie mécanique  
augmente à chaque  
pas de temps

## 2.4.4 Euler expl. osc. harmo. Conservation E<sub>mec</sub> 2

$$\frac{\Delta E_{mec,n}}{\Delta t} = \left( \frac{k}{m} \Delta t \right) E_{mec,n}$$

$$E_{mec,n} = E_{mec,0} e^{\left( \frac{k}{m} \Delta t \right) t_n}$$

$$\gamma_{Emec} = \frac{k}{m} \Delta t$$

**L'énergie mécanique  
augmente  
exponentiellement au  
cours du temps**

**Le taux de croissance  
est proportionnel à Δt**

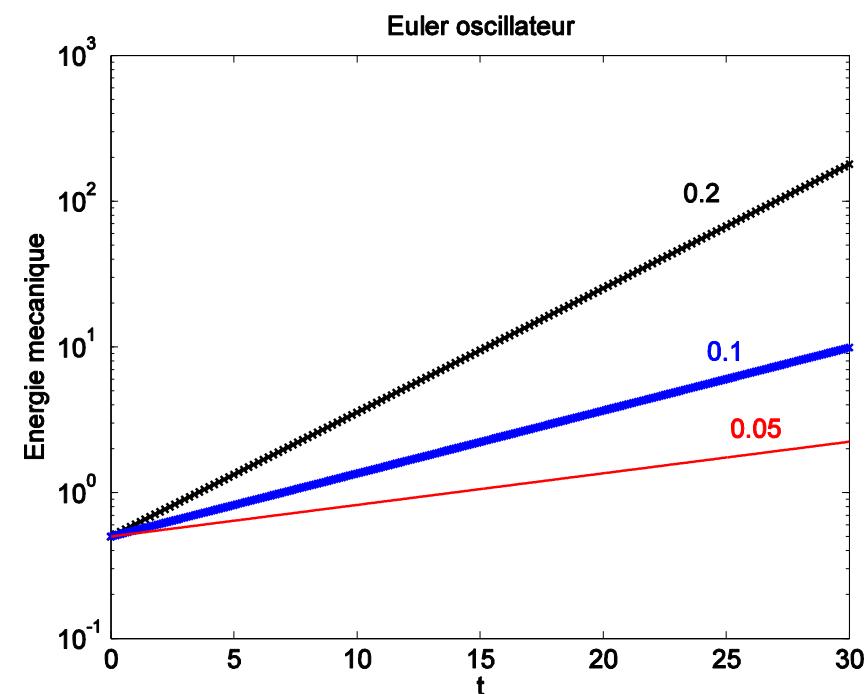


FIG. 2.10 (bas)

On trouvait un taux de croissance du mode propre

$$\gamma = \text{Im}(\omega) = -\frac{k}{m} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\gamma_{Emec} = -2\gamma$$

???

## 2.4 Oscillateur harmonique. Conclusions

- Le schéma d' **Euler explicite** est **toujours instable** lorsqu'il est appliqué à l'oscillateur harmonique. La norme de l'erreur augmente à chaque pas de temps
- L'amplitude des oscillations croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à  $\Delta t$
- L'énergie mécanique n'est pas conservée, mais croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à  $\Delta t$
- **Paramètre numérique crucial:**  $\omega_0\Delta t$ 
  - $\omega_0\Delta t \ll 1$  veut dire plusieurs pas temporels par période
- **Amélioration des schémas numériques nécessaire!**
  - **Euler – Cromer**  $\sim \Delta t$  (\*)
  - **Stormer-Verlet**  $\sim (\Delta t)^2$
  - **Runge-Kutta ordre 4**  $\sim (\Delta t)^4$

} **Symplectiques:**  $E_{\text{mech}} = \text{const}$  en moyenne
- (\*) changement apparemment minime, mais... (**demo**)

## 2.7.1 Euler-Cromer: déjà un grand progrès!

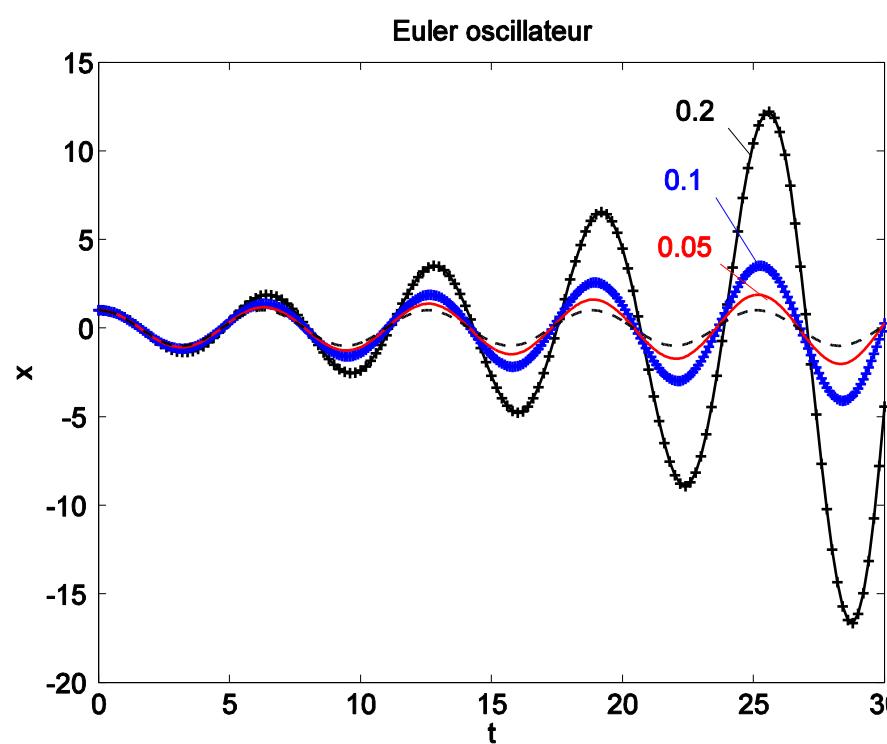


FIG. 2.8

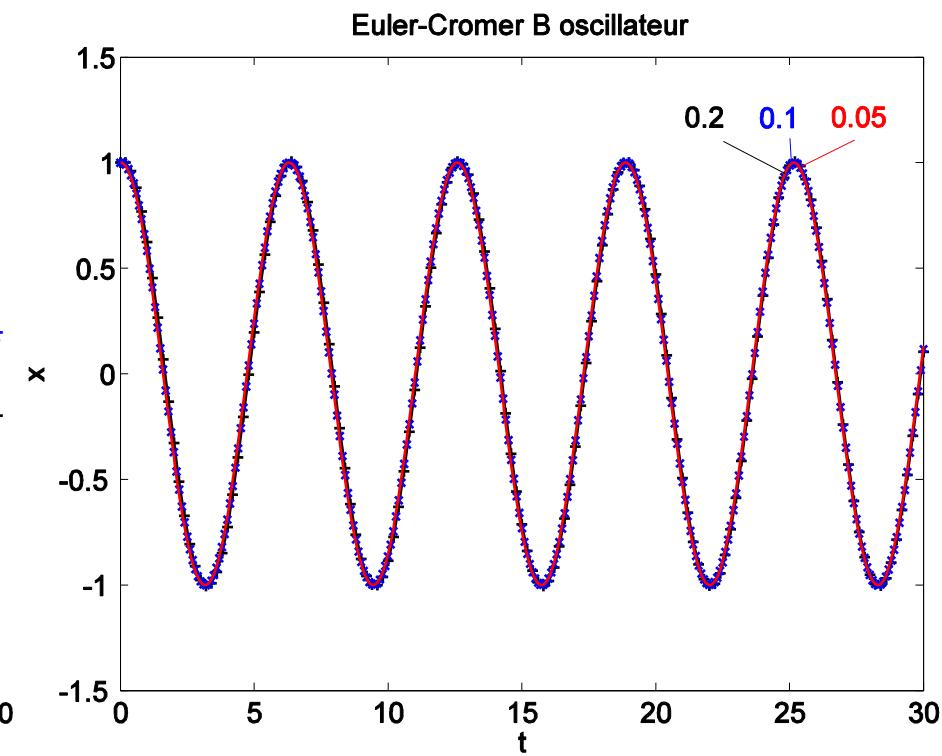


FIG. 2.9

- Les schémas d'Euler-Cromer et de Verlet seront présentés au tableau et seront illustrés par des simulations numériques.

## 2.7.1 Euler-Cromer («symplectique»)

- Pour la force de portance de Magnus, comme pour la force de Lorentz due au champ magnétique, l'accélération en  $x$  dépend de  $v_z$ , et l'accélération en  $z$  dépend de  $v_x$ .
- Le schéma d'Euler-Cromer, s'écrit, pour la particule dans un champ magnétique selon  $z$ .

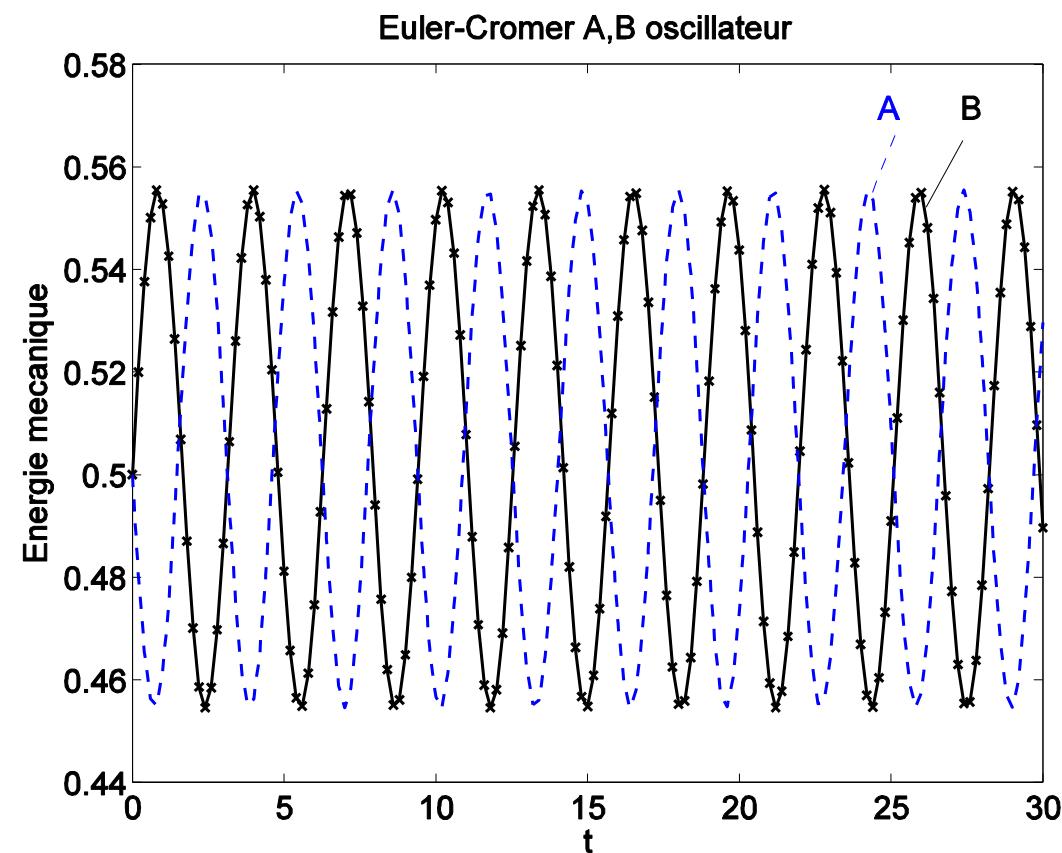
$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \Omega v_{y,n}$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \Omega v_{x,n+1}$$

Euler explicite:  $v_{x,n}$

- Vous pouvez essayer ce schéma pour le problème de Magnus (Ex.1)

## 2.7.1 Euler-Cromer: pied gauche ou pied droite d'abord?



- En combinant Euler-Cromer « A » et « B » pour deux demi-pas de temps, on aboutit au schéma de Verlet. La dérivation sera présentée au tableau.

## 2.7.2 Verlet

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= x_j + v_j \Delta t + \frac{F}{m}(x_j, t_j) \frac{\Delta t^2}{2} \\v_{j+1} &= v_j + \left( \frac{F}{m}(x_j, t_j) + \frac{F}{m}(x_{j+1}, t_{j+1}) \right) \frac{\Delta t}{2}\end{aligned}\tag{2.103}$$

- Généralisé ici à une force dépendant explicitement du temps
- L'algorithme est conditionnellement stable pour l'oscillateur harmonique (il y a une limite de stabilité,  $\Delta t$  max, cf plus loin)
- Il est d'ordre 2 en  $\Delta t$ : erreur  $\sim (\Delta t)^2$
- Une seule évaluation de  $F$  par pas temporel
- Peut être utilisé pour de longues simulations sans qu'il y ait accumulation systématique d'erreurs sur la conservation de l'énergie
- S'applique en principe bien aux systèmes conservatifs

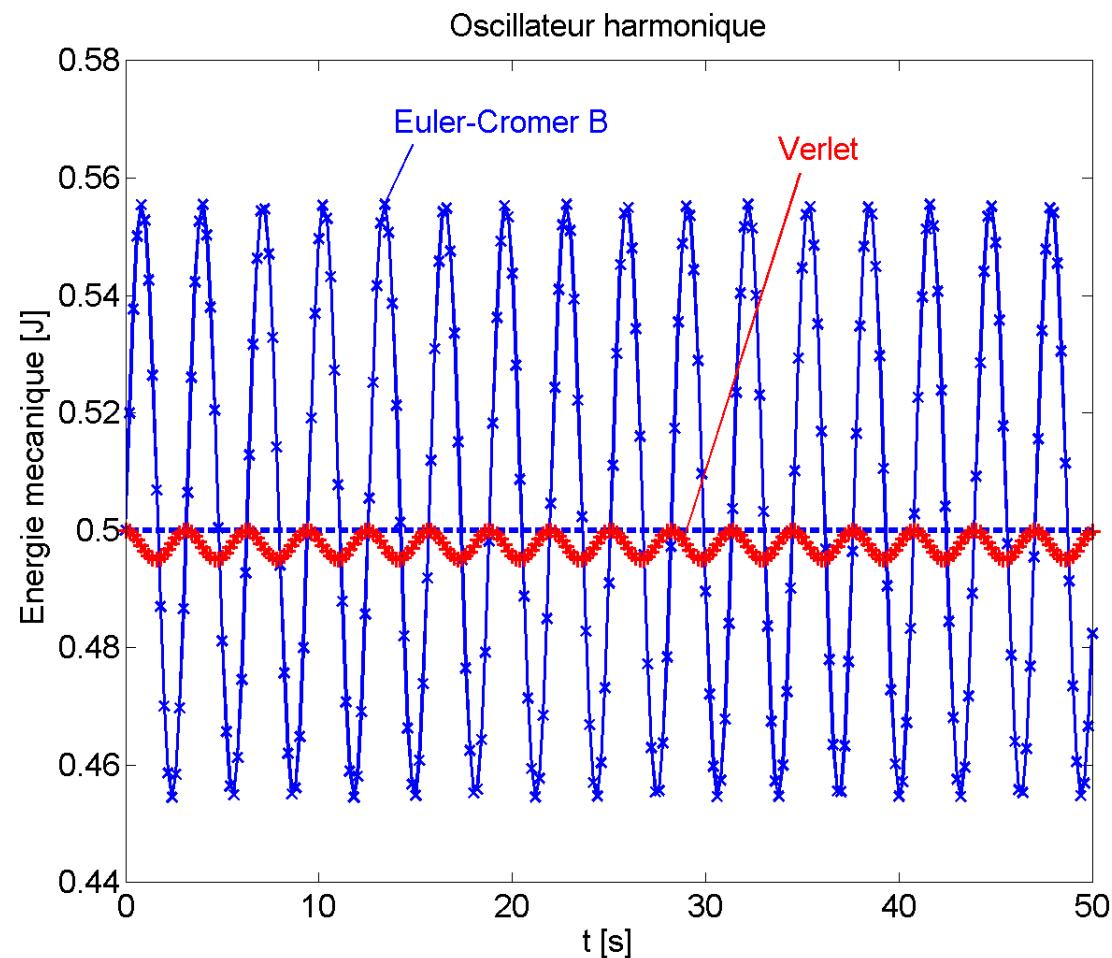
## 2.7.2 Verlet

$$q_{j+1} = q_j + \frac{p_j}{m} \Delta t + \frac{1}{2m} F(q_j, t_j) \Delta t^2 \quad (2.103)$$

$$p_{j+1} = p_j + \frac{\Delta t}{2} (F(q_j, t_j) + F(q_{j+1}, t_{j+1}))$$

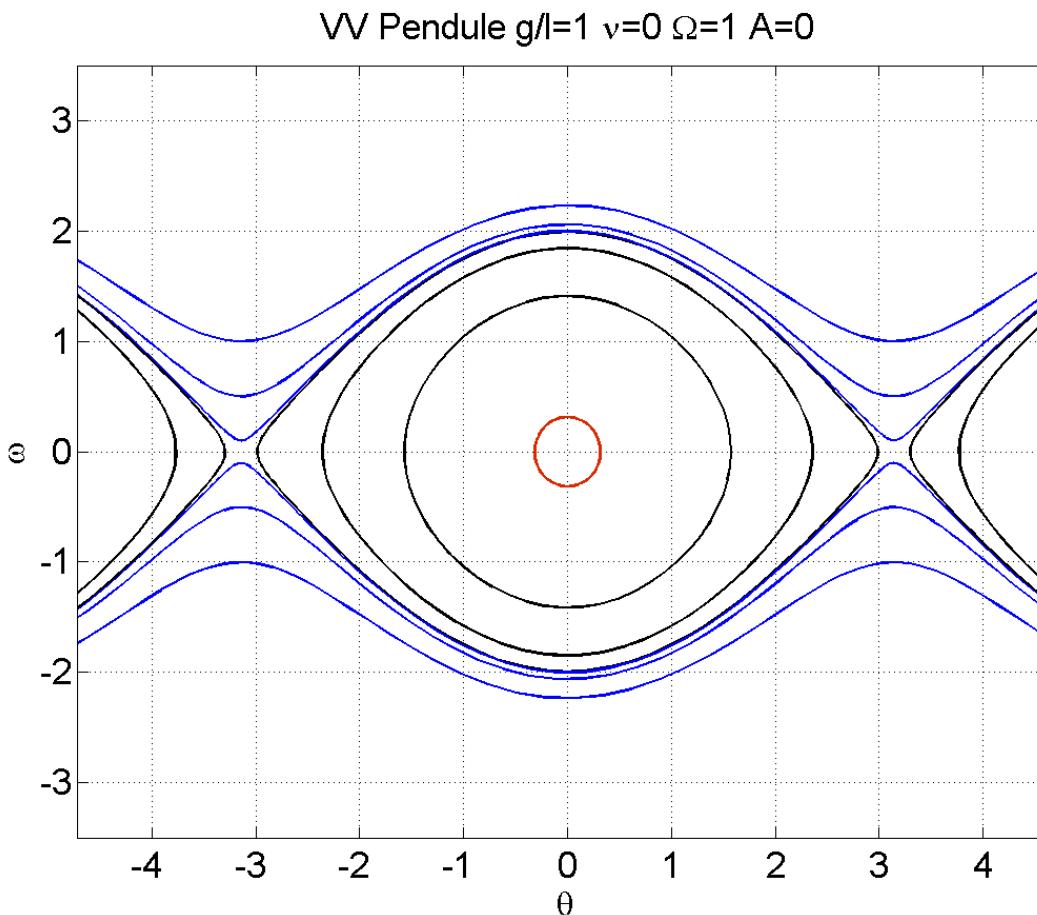
- Généralisé ici à une force dépendant explicitement du temps
- L'algorithme est conditionnellement stable pour l'oscillateur harmonique (il y a une limite de stabilité,  $\Delta t$  max, cf plus loin)
- Il est d'ordre 2 en  $\Delta t$ : erreur  $\sim (\Delta t)^2$
- Une seule évaluation de  $F$  par pas temporel
- Peut être utilisé pour de longues simulations sans qu'il y ait accumulation systématique d'erreurs sur la conservation de l'énergie
- S'applique en principe bien aux systèmes conservatifs

# Verlet – oscillateur harmonique



- Même  $\Delta t=0.2$

# Euler-Cromer et Verlet sont symplectiques



Analogie:

Ensemble d'orbites dans  
l'espace de phase



Ecoulement fluide

Symplectique



Incompressible

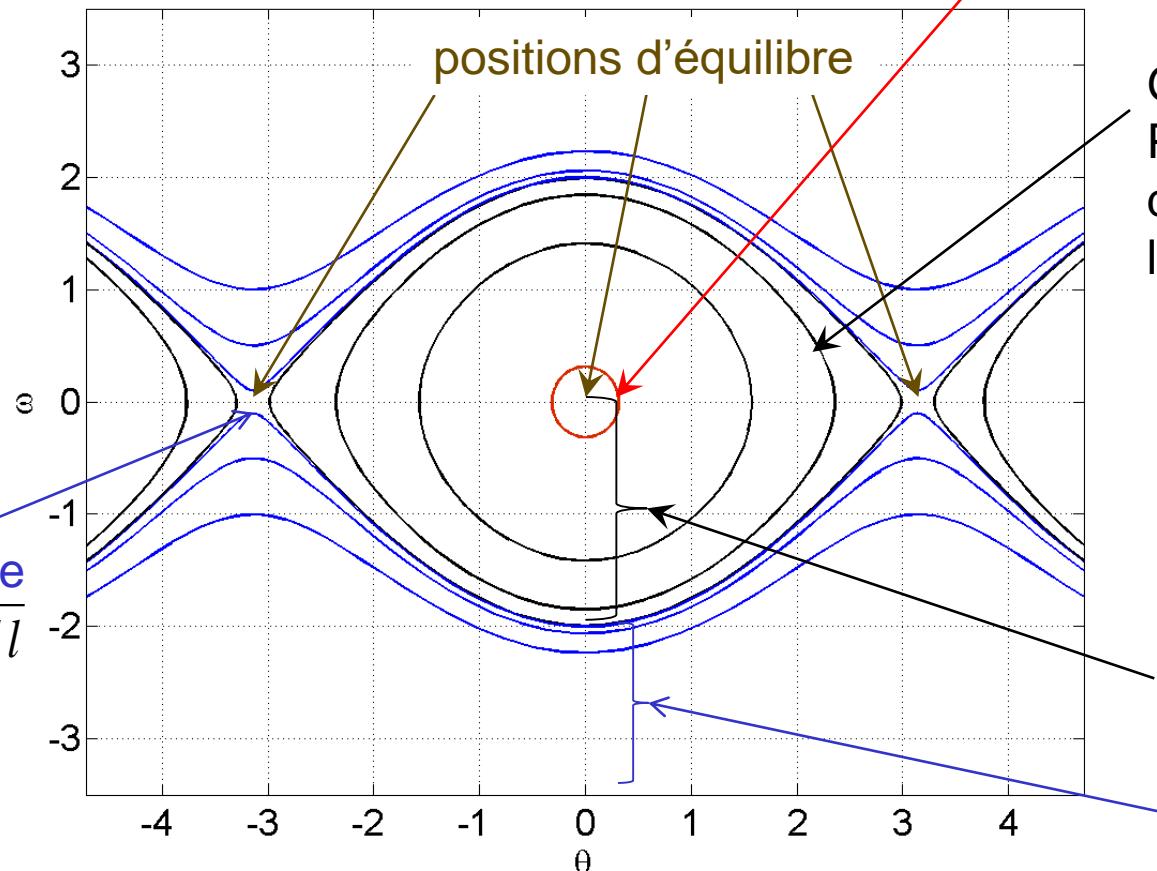
- Conservation du « volume » dans l'espace de phase ( $x, v$ )

# Orbites dans l'espace de phase

Petits mvmts,  
fréquence propre  $\sqrt{g/l}$   
indépendante de  
l'amplitude

VV Pendule  $g/l=1$   $\nu=0$   $\Omega=1$   $A=0$

Petits mvmts,  
fréquence propre  
imaginaire  $i\sqrt{g/l}$   
→ instable  
(physiquement!)



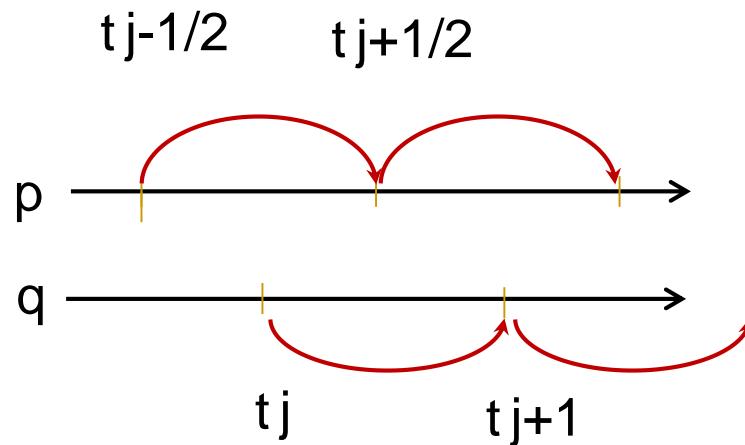
Grands mvmts,  
Période  
dépendant de  
l'amplitude

Orbites piégées

Orbites  
passantes

# Formulations alternatives de Verlet - 1

## ■ Verlet «leapfrog» (saute-mouton)



$$\begin{aligned} p_{j+1/2} &= p_{j-1/2} + \Delta t F(q_j) \\ q_{j+1} &= q_j + (\Delta t / m) p_{j+1/2} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Schéma à niveaux décalés («staggered»)

Nécessite un premier «demi-pas» pour être initialisé

Désavantage: on ne connaît pas  $p$  et  $q$  aux mêmes instants

# Formulations alternatives de Verlet - 2

## ■ Stormer - Verlet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(q) \\ p/m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = F(q)/m \quad (2.105)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}(t_j) = \frac{1}{\Delta t^2} (q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) + O(\Delta t^2)$$

$$q_{j+1} = 2q_j - q_{j-1} + (\Delta t^2 / m) F(q_j) \quad (2.107)$$

Schéma à 3 niveaux

Nécessite un premier pas «en arrière» ( $q_{-1}$ ) pour être initialisé  
Cet algorithme date de 1907 (Stormer)

## 2.7.3 Stabilité du schéma de Verlet

- On montre (preuve au tableau) que le schéma de Verlet est stable pour le problème de l'oscillateur harmonique, à la condition que:

$$\omega_0 \Delta t \leq 2$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre (physique!) du système:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

N.B.: Il en est de même pour Euler-Cromer.

## 2.7.4 Extension du schéma Verlet à des forces dépendant de la vitesse et du temps

Soit le cas

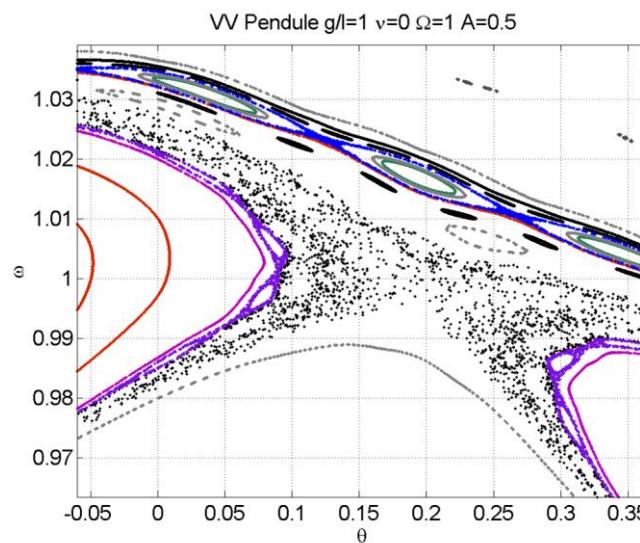
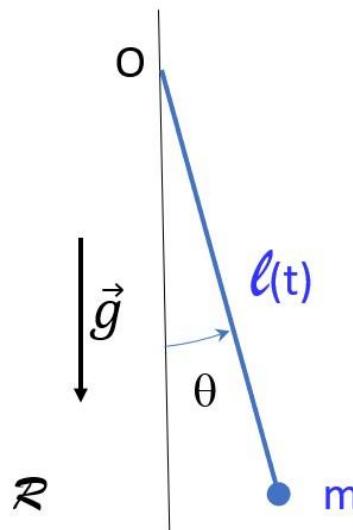
$$\frac{1}{m} F(x, v, t) = a(x, v, t) = a_1(x, t) + a_2(v, t)$$

$$\boxed{x_{j+1}} = x_j + v_j \Delta t + \frac{1}{2} a(x_j, v_j, t_j) (\Delta t)^2 \quad (2.125)$$

$$\boxed{v_{j+1/2}} = v_j + \frac{1}{2} a(x_j, v_j, t_j) \Delta t \quad (2.126)$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{1}{2} (a_1(x_j, t_j) + a_1(\boxed{x_{j+1}}, t_{j+1})) \Delta t + a_2(\boxed{v_{j+1/2}}, t_{j+1/2}) \Delta t$$
(2.127)

# Exercice 2: pendule de longueur variable



- Petits mouvements. Mode propre et fréquence propre.
- Grands mouvements. Fréquence dépendant de l'amplitude
- Rétractation du fil. Basculement oscillation → rotation.
- Oscillation du fil. Résonance paramétrique. Doublement de période.
- Mouvement chaotique. Instabilité des orbites. Non-convergence numérique.
- Sections de Poincaré.

Pendule avec oscillation verticale