École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

16 avril 2025

Physique Numérique – Exercice 5

A rendre jusqu'au mardi 13 mai 2025 sur le site https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174656

5 Propagation d'une vague dans un océan de profondeur non uniforme. Tsunami ou pas tsunami, telle est la question. Schéma explicite à 3 niveaux.

Du point de vue physique, on s'intéresse à la propagation de vagues en eaux peu profondes, avec une profondeur non uniforme. On considérera le cas à une dimension d'espace. Du point de vue numérique, on implémentera le schéma explicite à 3 niveaux. On donne trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&\text{Équation A : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\text{Équation B : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&\text{Équation C : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2 f\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Dans le cas de vagues en eaux peu profondes, on a

$$u^2(x) = g h_0(x) \tag{2}$$

avec $g = 9.81\text{m}^2/\text{s}$ l'accélération de la pesanteur et $h_0(x)$ la profondeur de l'eau au repos. Le champ scalaire $f(x,t)$ représente alors la hauteur de la vague. Le domaine est tel que $x \in [0, L]$. Diverses conditions aux bords seront considérées.

Indication : dans le schéma numérique, on considèrera une fonction $u^2(x)$ et non pas une fonction $u(x)$ (par exemple, il ne faut pas développer $d(u^2(x))/dx$ en $2u(x)(du(x)/dx)$.)

5.1 Calculs analytiques [10pts]

On considère le cas d'une profondeur h_0 constante.

(a) **[3pts]** Pour une condition au bord gauche libre et une condition au bord droite fixe, calculer les modes propres et fréquences propres correspondants.

(b) **[7pts]** On considère maintenant le cas général $h_0(x)$ non uniforme. En s'inspirant de la dérivation faite dans les Notes de Cours, Section 4.2.4, pour le cas de l' Équation B, faire les analyses WKB des Équations A et C.

5.2 Implémentation en C++ [5pts]

Télécharger le fichier Exercice5_2025_student.zip du site Moodle.

(a) On écrira et implémentera le schéma explicite à 3 niveaux (section 4.2.1 du cours), en l'adaptant : pour les dérivées en x, utiliser les différences finies centrées aux points de maillage :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2h}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2}$$

où g est f ou u^2, et $h = x_{i+1} - x_i$ (maillage régulier). Programmer les trois cas A, B et C.

(b) Implémenter 3 choix possibles pour la condition au bord gauche ($x = 0$) :

1. $f(0,t) = A\sin(\omega t)$ avec amplitude A et fréquence angulaire ω données
2. "libre", i.e. $\partial f/\partial x(0,t) = 0$
3. sortie de l'onde

Faire de même pour le bord droite ($x = L$). *Indication : pour la sortie au bord gauche, s'inspirer de la démarche des Notes de Cours, Eqs.(4.44)-(4.46).* **Votre rapport doit inclure une description de ce cas.** *Pas besoin pour les autres cas, puisque celles-ci sont déjà décrites dans les Notes de Cours, il suffit de les citer.*

(d) Implémenter 2 choix possibles pour la forme initiale de la vague, $f(x,0) = f_{\text{init}}(x)$:

— (1) donnée par

$$f_{\text{init}}(x) = \begin{cases} 0 & (x \le x_1) \\ \frac{\hat{f}}{2}\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\right) & (x_1 < x < x_2) \\ 0 & (x_2 \le x) \end{cases} \tag{3}$$

avec $\hat{f}$, x_1 et x_2 des constantes donées en input.

— (2) donnée par un mode propre tel que calculé dans la partie analytique (5.1(a)). On donnera en input le numéro n de ce mode propre.

(e) Implémenter 3 choix possibles pour la direction de propagation initiale de la vague : (1) progressive (vers les x croissants) ; (2) rétrograde (vers les x décroissants) ; (3) système initialement au repos.

(f) On programmera aussi le calcul de la quantité $E(t)$, définie par

$$E(t) = \int_0^L f^2(x,t)dx. \tag{4}$$

5.3 Vitesse de propagation constante [14pts]

On considère le cas d'un bassin de $L = 15$m de long, de profondeur $h_0 = 4$m constante. La condition au bord gauche est "libre", $\partial f/\partial x(0,t) = 0, \forall t$. La condition au bord droite est fixe $f(L,t) = 0, \forall t$.

(a) **[3pts]** Direction de propagation et réflexions :
On prend une forme de vague initiale donnée par l'Eq.(3), avec $\hat{f} = 1$m, $x_1 = 3$m, $x_2 = 8$m. Choisir les conditions initiales pour que la vague parte (1) vers la gauche, (2) vers la droite, (3) vague initialement au repos. Simuler jusqu'à un temps t_{fin} suffisant pour que l'onde ait le temps de faire au moins un aller-retour. Illustrer et discuter qualitativement les résultats.

(b) **[3pts]** Limite de stabilité :
Prendre un des cas de la partie précédente, avec un nombre d'intervalles n_x donné. Vérifier et illustrer que la solution devient instable dès que $|\beta_{\text{CFL}}| > 1$.

(c) **[4pts]** Modes propres :
Initialiser un des modes propres calculés analytiquement en 5.1 (a) (bord gauche libre, bord droite fixe), avec une amplitude arbitraire (mais non-nulle !), $f(x, t \leq 0) = f_n(x)\ \forall x$. Comparer ensuite la solution numérique avec la solution analytique après une période d'oscillation : $t_{\text{fin}} = T_n$, avec T_n égal à la période calculée analytiquement. Faire une étude de convergence en variant Δt et Δx à β_{CFL} constant. On mesurera l'erreur comme $\int_0^L |f_{num}(x, t = T) - f_{ana}(x, t = T)|\, dx$.
Inditcation : prendre un petit nombre d'intervalles n_x (par exemple 20). Choisir un nombre de pas de temps entier n_{steps}, avec $\Delta t = t_{\text{fin}}/n_{\text{steps}}$, de telle sorte que $\beta_{\text{CFL}} \leq 1$. Puis faire l'étude de convergence en effectuant une série de simulations avec $(n_x, 2n_x, 4n_x, 8n_x, ...)$ et $(n_{\text{steps}}, 2n_{\text{steps}}, 4n_{\text{steps}}, 8n_{\text{steps}}, ..)$, respectivement.

(d) **[4pts]** Excitation résonante de modes propres :
On considère maintenant une condition au bord droite donnée par $f(x_A, t) = A \sin(\omega t)$, avec une amplitude $A = 0.1$m. On garde la condition au bord gauche libre. La condition initiale est au repos non perturbé. Effetuer une série de simulations de longue durée (simuler un temps t_{fin} égal à plusieurs dizaines de temps de transit de l'onde à travers le système), à des fréquences ω différentes. Pour chacune de ces simulations, noter le maximum de la quantité $E(t)$ définie à l' Eq.(4) :

$$\hat{E}(\omega) = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t)\ .$$

Représenter $\hat{E}(\omega)$ pour une plage de fréquences ω appropriée au voisinage d'une fréquence propre ω_n.

5.4 Vague approchant de la plage : tsunami ? [16pts]

Sauf indication contraire, on considérera le cas de l'Équation B.
On représente la profondeur de l'océan par le profil suivant :

$$h_0(x) = \begin{cases} h_L & (0 \leq x \leq x_a), \\ \frac{1}{2}(h_L + h_R) + \frac{1}{2}(h_L - h_R)\cos\left(\frac{\pi(x - x_a)}{x_b - x_a}\right) & (x_a < x < x_b) \\ h_R & (x_b \leq x \leq L) \end{cases} \tag{5}$$

On prendra $h_L = 8000$m, $h_R = 20$m, $L = 1000$km, $x_a = 450$km et $x_b = 950$km. Simuler l'évolution d'une vague se propageant initialement de gauche à droite, dont la forme initiale est donnée par l'Eq.(3) avec $\hat{f} = 1$m, $x_1 = 50$km, $x_2 = 350$km, et appliquer les conditions aux bords gauche et droite "sortie de l'onde".

Indications : *Attention de prendre une résolution spatiale suffisante. D'autre part, pour éviter d'obtenir des fichiers de sortie trop volumineux, on peut n'écrire $f(x, t)$ que tous les n_{stride} pas de temps. Simuler un temps t_{fin} suffisant pour que la vague arrive sur la plage, soit environ 12000???s. Choisir Δt de telle sorte que $\max(\beta_{\text{CFL}}) = 1$.*

Pour calculer la vitesse de propagation et l'amplitude, on peut par exemple trouver le premier temps $t = t_{\text{crete,i}}$ pour lequel f est maximum pour $x = x_i$ fixé (un point de la grille spatiale), *afin d'obtenir le mouvement de la crête de la vague. Attention, il faut faire une interpolation quadratique de $f(x_i, t)$, à $x = x_i$ fixé , au voisinage du maximum sur la grille temporelle, pour éviter des sauts brusques. On obtient ainsi un ensemble de valeurs $(x_i, t_{crete,i})$. L'amplitude est alors la valeur de $f(x_i, t_{crete,i})$. Et on obtient la vitesse de propagation par différences finies $v = (x_{i+k} - x_{i-k})/(t_{crete,i+k} - t_{crete,i-k})$, avec $k \geq 1$ un nombre entier, choisi pour réduire les oscillations de v.*

(a) **[2pts]** Illuster la solution obtenue.

(b) **[3pts]** Estimer la hauteur de la vague en fonction de sa position. Comparer avec la solution WKB.

(c) **[3pts]** Estimer la vitesse de propagation de la vague en fonction de sa position. Comparer avec la solution WKB.

(d) **[4pts]** Etudier et illustrer ce qui se passe avec des fonds océaniques de plus en plus raides, en rapprochant le point x_a du point x_b. Comparer avec WKB.

(e) **[4pts]** On revient au cas $x_a = 450$km. Supposer maintenant que l'équation de la vague est donnée par l'Équation A. Recalculer la vague obtenue, illustrer le résultat. Analyser la hauteur de la vague et la vitesse de propagation. Comparer avec la solution WKB. Faire ensuite de même avec l'Équation C. Conclure par une brève discussion comparant les cas A, B et C.

5.5 Supplément facultatif [max 5pts]

Ceci n'est qu'un exemple. Si vous avez d'autres idées à explorer, lancez-vous.

— Considérer le cas à deux dimensions d'espace, $h_0 = h_0(x, y)$, avec un maillage en x et en y. Choisir différentes formes pour la profondeur de l'océan : essayer d'obtenir une focalisation des ondes.

5.6 Rédaction du rapport en LaTeX

Rédiger un rapport de **maximum 15 pages, figures comprises** dans lequel les calculs analytiques et les résultats des simulations numériques des questions ci-dessus sont présentés et discutés.

5.7 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

(a) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` `RapportExercice7_Nom1_Nom2.pdf`

(b) Préparer le fichier source C++ `Exercice7_Nom1_Nom2.cpp`

(c) Si vous avez fait des calculs en Matlab ou Python, préparer les fichier sources correspondants `Analyse_Nom1_Nom2.m ou .py`

(d) Déposer les fichiers sur Moodle avec ce lien.

En plus des points énoncés ci-dessus, on attribue **[5pts]** pour la participation en classe et la qualité générale du rapport.