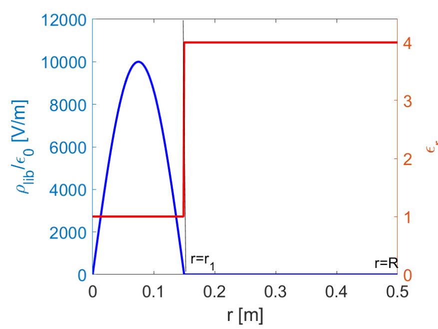
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Semestre de printemps 2025
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 4

A rendre jusqu'au mardi 15 avril 2025 sur le site Moodle

4 Electrostatique : cylindre avec diélectrique, vide et charges libres. Eléments finis.

Soit un diélectrique occupant un volume Ω, avec un bord $\partial\Omega$ au potentiel V_0 donné. Le milieu est de constante diélectrique variable $\epsilon_r(\vec{x})$ et contient des charges d'espace libres $\rho_{\text{lib}}(\vec{x})$.



Densité de charges libres $\rho_{\text{lib}}(r)/\epsilon_0$ et constante diélectrique $\epsilon_r(r)$.

Le but de l'exercice, du point de vue physique, est de calculer la distribution de potentiel électrostatique $\phi(\vec{x})$, la champ électrique $\vec{E}(\vec{x})$ et le champ de déplacement $\vec{D}(\vec{x})$, pour une configuration à symétrie cylindrique ($\Rightarrow$ $\phi(r)$). Le but de l'exercice, du point de vue numérique, est l'application, la programmation et le test d'une méthode d'élements finis pour résoudre un problème elliptique à valeurs aux bords.

4.1 Développements analytiques [18 pts]

(a) **[2 pts]** Ecrire l'équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$.

(b) **[4 pts]** Ecrire la forme variationnelle du problème. *Indication : suivre la démarche de la Section 3.3 des notes de cours.*

(c) **[2 pts]** Expliciter cette forme variationnelle dans le cas d'un cylindre de rayon R et longueur L_z, avec $\phi(r)$, $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$. (On considérera le cylindre suffisament long pour négliger les effets aux extrémités, et on prendra une longueur L_z unité.)

(d) **[4 pts]** On discrétise le problème 1-D en symétrie cylindrique avec la méthode des éléments finis linéaires (Fig. 3.10 des notes de cours). On considère le cas d'un maillage de N intervalles $[r_k, r_{k+1}]$ non nécessairement équidistants avec $h_k = r_{k+1} - r_k$. La condition au bord est $\phi(R) = V_0$, avec V_0 donné. Ecrire les éléments de matrice et du membre de droite. *Indication : suivre la méthode des notes de cours en s'inspirant des équations (3.69) à (3.71).*

(e) **[2 pts]** Donner les expressions pour le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le champ déplacement $\vec{D}(r)$ aux points milieux des intervalles *en utilisant la représentation en éléments finis.*

(f) **[4 pts]** Trouver la solution analytique pour le cas simple $\epsilon_r(r) = 1$, $\rho_{\text{lib}}(r) = \rho_0 = \text{const.}$

4.2 Implémentation dans le code C++

Programmer l'implémentation de la méthode des éléments finis tels que définis dans la partie analytique, à partir du squelette de code C++ `Exercice4_2025_students.cpp`. Implémenter la construction de la matrice et du membre de droite, en utilisant, **en l'adaptant,** l'algorithme des Eqs.(3.69 - 3.71) avec $p = 0$ (i.e. utiliser la règle du point milieu, [Annexe B, Eq. (B.2)], pour les intégrales sur les intervalles). Noter que la matrice, tridiagonale, est stockée sous la forme de l'Eq.(3.77) des notes de cours. Implémenter la condition au bord. La fonction pour résoudre le système d'équations algébriques linéaires est déja implémentée. On implémentera aussi le calcul du champ électrique E_r (*en utilisant la représentation en éléments finis*) et du champ de déplacement D_r aux points milieux des intervalles.

Comme choix de maillage, on prendra N_1 intervalles équidistants entre $r = 0$ et $r = r_1$, et N_2 intervalles équidistants entre $r = r_1$ et $r = R$, avec r_1 et R donnés, tels que $0 < r_1 < R$.

4.3 Calculs numériques. Tests de vérification et de convergence. [27 pts]

(a) **[10 pts]** On prend $V_0 = 0$, $r_1 = 0.015$m, $R = 0.05$m et $N_1 = N_2$. Tester votre algorithme pour le cas trivial $\rho_{\text{lib}}(r) = \text{const} = \epsilon_0$ et $\epsilon_r(r) = 1$. Comparer votre résultat numérique pour le potentiel avec le résultat analytique. Faire une étude de convergence de $\phi(0)$ en fonction de $N_1 (= N_2)$.

(b) **[10 pts]** Maintenant, les fonctions $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$ sont spécifiées ainsi (voir Figure page précédente) :

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} 1 & (0 \le r < r_1), \\ 4 & (r_1 \le r \le R). \end{cases} \tag{1}$$

$$\rho_{\text{lib}}(r)/\epsilon_0 = \begin{cases} \tilde{\rho}_0 \ \sin\left(\frac{\pi r}{r_1}\right) & (0 \le r < r_1), \\ 0 & (r_1 \le r \le R), \end{cases} \tag{2}$$

avec $\tilde{\rho}_0 = 10^4$ V/m^2. Obtenir et discuter la solution numérique pour $\phi(r)$ et $E_r(r)$ pour diverses valeurs de N_1 et N_2. On examinera par exemple la convergence de $\phi(r = r_1)$ avec N_2 proportionnel à N_1.

(c) **[7 pts]** Vérifier que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho_{\text{lib}}(\vec{x})$ *en utilisant les différences finies centrées aux milieux des milieux des intervalles pour* $\mathrm{d}D_r/\mathrm{d}r$. Utilisant judicieusement le théorème de Gauss, calculer la charge totale, calculer la charge libre totale et calculer la charge de polarisation en $r = r_1$.

4.4 Facultatif [5 pts]

— Choisir d'autres fonctions pour $\rho_{\text{lib}}(r)$ et $\epsilon_r(r)$ et/ou changer les dimensions du système.

— Implémenter l'intégrale mixte trapèze-point milieu, Eq.(3.56), pour la construction de la matrice et du membre de droite.

4.5 Rédaction et soumission du rapport et du code source C++

(a) Rédiger un rapport de **maximum 10 pages** dans lequel les résultats sont présentés, analysés et discutés.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice4_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice4_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, **[5 pts]** *sont attribués pour la qualité générale de votre travail : qualité rédactionnelle du rapport, mais aussi participation en classe en interaction avec les assistants.*